ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 68. Вып. 4, 2004

УДК 531.36

© 2004 г. А. Д. Мышкис

ПРОСТЕЙШАЯ ДИСКРЕТНАЯ СИСТЕМА С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Исследуются существование и устойчивость положительных периодических режимов системы, описываемой скалярным уравнением

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} - hx_{n-2}; & x_{n-1} - hx_{n-2} > 0 \\ 1; & x_{n-1} - hx_{n-2} \le 0 \end{cases}$$

для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и различных $h = \text{const} > 0$.

1. Введение. Ранее была рассмотрена [1] *непрерывная* система с запаздыванием и релаксацией, описываемая скалярным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t+\theta_1), \ldots, x(t+\theta_m), x_t) \tag{1.1}$$

где θ_i – заданные неположительные постоянные, $x_t(\theta) := x(t+\theta)(\theta_0 \le \theta \le 0)$, и условием релаксации:

$$x(t) = 0 \Rightarrow x(t^+) = l, \quad l = \text{const} > 0 \tag{1.2}$$

Были получены достаточные условия того, что такая система имеет ровно одно (с точностью до произвольных сдвигов вдоль оси t) периодическое решение, к которому сходится при $t \to \infty$ любое неотрицательное решение той же задачи (1.1), (1.2). Аналогичный результат был получен [2] для $m = \infty$, $\theta_0 = -\infty$.

Цель этой статьи – исследование простейшей *дискретной* системы с релаксацией, описываемой скалярным уравнением

$$x_n = x_{n-1} - hx_{n-2}; \quad n \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad h = \text{const} > 0 \tag{1.3}$$

Заданные начальные значения x_{-2} и x_{-1}, а также все значения $x_n (n \in \overline{\mathbb{N}})$ считаем положительными (в дальнейшем это требование не будет оговариваться). Условие релаксации принимаем следующим: если при последовательном вычислении $x_0, x_1, \ldots$ по формуле (1.3) получаем впервые $x_{n_1} \le 0$, то вместо этого полагаем $x_{n_1} = 1$ и при $n > n_1$ строим решение уравнения (3) по найденному x_{n_1-1} и $x_{n_1} = 1$ в качестве начальных значений, до следующего значения $x_{n_2} \le 0$, вместо которого полагаем $x_{n_2} = 1$ и т.д. Другими словами, уравнение (1.3) с условием релаксации можно записать так:

$$x_{n-1} - hx_{n-2} = \begin{cases} x_n & \text{при} \quad x_{n-1} - hx_{n-2} > 0 \\ 1 & \text{при} \quad x_{n-1} - hx_{n-2} \le 0 \end{cases}, \quad n \in \overline{\mathbb{N}}$$

Аналогично определяются решение уравнения (1.3) с условием релаксации для $n \ge n_0$, а также для $n \in \mathbb{Z}$. Задачу о построении решения уравнения (1.3) с условием релаксации назовем задачей R.

2. Периодические решения малого периода. Периодические решения (ПР) $\{x_n\}$ задачи R будем рассматривать при $n \in \mathbb{Z}$. Эти решения можно классифицировать по длине N их наименьшего периода. Для ПР всегда $\max_n\{x_n\} = 1$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $x_1 = 1$. Последовательность $\{x_1, \ldots, x_N\}$ будем называть *циклом* рассматриваемого ПР. Очевидно, что каждый цикл состоит из некоторого числа $p \geq 1$ следующих друг за другом *фрагментов*, каждый из которых представляет собой убывающую последовательность, начинающуюся с 1.

При отыскании вида циклов заданной длины полезна следующая простая теорема.

Теорема 1. При $N > 1$ все фрагменты цикла имеют длину, большую 1. При $N > 4$ по крайней мере один фрагмент имеет длину, большую 2.

Доказательство. Пусть $N > 1$ и для определенности первый фрагмент цикла имеет длину 1, т.е. $x_2 = 1$. Обозначим

$$k := \min\{n \in \{1, \ldots, N\} : x_n < 1\}$$

Имеем $1 - hx_N \leq 0$, $x_k = 1 - h$. Но из равенства $x_k = 1 - h$ следует, что $h < 1$, чему противоречит неравенство $1 - hx_N \leq 0$.

Пусть теперь $N > 4$ и все фрагменты цикла имеют длину 2. Тогда N – четное число, и имеем

$$1 - hx_{2i-2} = x_{2i} \tag{2.1}$$

$$x_{2i} - h \leq 0 \tag{2.2}$$

(Здесь и далее в этом абзаце $i = 1, \ldots, N/2$; $x_0 = x_N$). Из системы равенств (2.1), в силу ее циклического характера, следует, что

$$x_{2i} = \sum_{j=0}^{(N/2)-1} (-h)^j + (-h)^{N/2} x_{2i}$$

Отсюда видим, что если число $N/2$ нечетное, то все числа x_{2i} равны, и потому наименьшим периодом служит 2, а не N. Такое же противоречие получаем, если число $N/2$ четное, а $h \neq 1$. Наконец, если число $N/2$ четное и $h = 1$, то из равенств $x_{2i-2} + x_{2i} = 1$ следует, что все числа x_{4i} равны, как и все числа x_{4i+2}, и потому наименьшим периодом служит 4, а не N.

Приведем вид циклов для небольших значений N.

Случай $N = 1$. Цикл имеет вид $\{1\}$. ПР с $N = 1$ возможно, если и только если $h \geq 1$.

Случай $N = 2$. Цикл имеет вид $\{1, a\}$, где $a \in (0, 1)$. Очевидны соотношения $a = 1 - ha$, $a - h \leq 0$. Изобразив на плоскости a, h линию и область, отвечающие этим соотношениям, получаем необходимое и достаточное условие существования ПР с $N = 2 : h \geq$ $\geq \sqrt{5/4} - 1/2 \approx 0.618$, тогда как цикл имеет вид

$$\{1, 1/(1 + h)\}$$

Видно, что при $h \geq 1$ возможны ПР как с $N = 1$, так и с $N = 2$.

Случай $N = 3$. Здесь цикл в силу теоремы 1 имеет вид $\{1, a, b\}$. При этом должны выполняться соотношения $a = 1 - hb > 0$, $b = a - h > 0$, $b - ha \leq 0$. Исключая из них b, приходим к соотношениям $a = 1 - ha - h^2$, $0 < a < 1$, $a - h > 0$, $a - h - ah \leq 0$. Изобразив на плоскости a, h соответствующие линию и области, получаем, что периодическое решение с $N = 3$ возможно, если и только если $h_1 \leq h < 1$, где $h_1 \approx 0.453$ – единственный вещественный корень уравнения $h^3 + 2h - 1 = 0$. При этом цикл имеет вид

$$\{1, (1 + h^2)/(1 + h), (1 - h)/(1 + h)\}$$

Таким образом, при $\sqrt{5/4} - 1/2 \leq h < 1$ возможны ПР как с $N = 2$, так и с $N = 3$.

Случай $N = 4$. Здесь цикл в силу теоремы 1 может иметь вид $\{1, a, b, c\}$ $(1 > a > b > c > 0)$ либо $\{1, a, 1, b\}$ $(1 > a > b > 0)$. Аналогично предыдущему заключаем, что цикл первого вида возможен, если и только если $h_2 \le h < 1/2$, где $h_2 \approx 0.373$ – единственный положительный корень уравнения $h^4 - h^2 + 3h - 1 = 0$. При этом цикл имеет вид

$$\{1, (1 + h^2)/(1 + h - h^2), (1 - h + h^3)/(1 + h - h^2), \ (1 - 2h)/(1 + h - h^2)\}$$

При $h_1 \le h < 1/2$ возможны ПР как с $N = 3$, так и с $N = 4$ (первого вида).

Для циклов второго вида из доказательства теоремы 1 следует, что $h = 1$, а цикл имеет вид $\{1, a, 1, 1 - a\}$ с любым $a \in (1/2, 1)$. Таким образом, при $h = 1$ возможны ПР с $N = 1$, $N = 2$ и $N = 4$.

Случай $N = 5$. Из теоремы 1 следует, что цикл может иметь вид $\{1, a, b, c, d\}$ $(1 > a > b > c > d > 0)$ либо $\{1, a, 1, b, c\}$ $(1 > a > 0, 1 > b > c > 0)$. Аналогично предыдущему заключаем, что цикл первого вида возможен, если и только если $h_3 \le h < 3/2 - \sqrt{5/4} \approx 0.382$, где $h_3 \approx 0.331$ – единственный положительный корень уравнения $h^5 - 3h^2 + 4h - 1 = 0$. При этом цикл имеет вид

$$\{1, (1 + h^2 - h^3)/(1 + h - 2h^2), (1 - h + h^3)/(1 + h - 2h^2),$$
$$(1 - 2h + h^4)/(1 + h - 2h^2), (1 - 3h + h^2)/(1 + h - 2h^2)\}$$

Таким образом, при $h_2 \le h < 3/2 - \sqrt{5/4}$ возможны ПР как с $N = 4$ (первого вида), так и с $N = 5$ (также первого вида).

Для циклов второго вида после исключения c и b получаем соотношения

$$a(1 - h^2) = 1 - h + h^2, \quad a \le h, \quad ah < 1 - h, \quad a(h - h^2) \ge 1 - 2h$$

Можно проверить, что уже первые три из них приводят к противоречию. Таким образом, ПР с циклами второго вида отсутствуют.

Случай $N = 6$. Из теоремы 1 следует, что цикл может иметь вид $\{1, a, b, c, d, e\}$ $(1 > a > b > c > d > e > 0)$, либо $\{1, a, 1, b, c, d\}$ $(1 > a > 0, 1 > b > c > d > 0)$, либо $\{1, a, b, 1, c, d\}$ $(1 > a > b > 0, 1 > c > d > 0)$. Аналогично предыдущему заключаем, что циклы первого вида возможны, если и только если $h_4 \le h < 1/3$, где $h_4 \approx 0.307$ – меньший из двух положительных корней уравнения $h^5 + h^4 + h^3 + 2h^2 - 4h + 1 = 0$. При этом цикл имеет вид

$$\{1, (1 + h + 2h^2)/(1 + 2h - h^2), (1 + h^3)/(1 + 2h - h^2),$$
$$(1 - h - h^2 - h^3)/(1 + 2h - h^2), (1 - 2h - h^2 - h^3 - h^4)/(1 + 2h - h^2), (1 - 3h)/(1 + 2h - h^2)\}$$

Таким образом, при $h_3 \le h < 1/3$ возможны периодические решения как с $N = 5$, так и с $N = 6$ (первого вида).

Для циклов второго вида после исключения d, c и b приходим к соотношениям, первые три из которых: $a(1 - h^2 + h^3) = 1 - h + 2h^2$, $a \le h$, $ah < 1 - h$ – противоречат друг другу. Таким образом, циклы второго вида отсутствуют.

Для циклов третьего вида, исключив d, c и b, приходим к соотношениям

$$a(1 - h^2) = 1 - h + h^2 - h^3, \quad a > h, \quad a(1 - h) \le h, \quad ah < 1 - h + h^2$$

$$a(h - h^2) \ge 1 - 2h + h^2 - h^3$$

Из второго и четвертого соотношений следует, что $h \neq 1$, а потому первое можно сократить на $1 - h$. Выразив из полученного равенства a, а с его помощью b, c и d, приходим к выражениям

$$a = c = (1+h^2)/(1+h), \quad b = d = (1-h)/(1+h)$$

Таким образом, цикл состоит из двух одинаковых фрагментов, что невозможно. Итак, циклы третьего вида также отсутствуют.

Исходя из полученных результатов, естественно высказать гипотезу, что при $N \geq 2$ значения h, для которых возможны циклы длины N, состоящие из единственного фрагмента, образуют интервал $[\alpha_N, \beta_N)$, причем $\alpha_N < \beta_{N+1} < \alpha_{N-1} < \beta_N$ ($\forall N \geq 3$) и $\alpha_N \to 1/4$ при $N \to \infty$ (см. разд. 3). При ее доказательстве может оказаться полезным следующее простое утверждение: последовательные элементы такого цикла $\{1, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}\}$ пропорциональны последовательным алгебраическим дополнениям элементов первой строки квадратной матрицы порядка N, у которой вторая строка имеет вид (-1, 1, $N - 3$ нуля, h), а каждая последующая строка получается из предыдущей циклической перестановкой с помощью выставления последнего элемента на первое место. Например, при $N = 4$ последние три строки этой матрицы имеют вид

$$(-1, 1, 0, h), (h, -1, 1, 0), (0, h, -1, 1)$$

Примеры циклов, состоящих более чем из одного фрагмента, при $N \neq 4$ автору неизвестны.

3. Условие отсутствия периодических решений.

Теорема 2. При $h \leq 1/4$ задача R не имеет ПР.

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы 2, но задача R имеет ПР с циклом $\{x_0 = 1, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$. Тогда из результатов разд. 2 следует, что $N \geq 7$. Пусть $N_0 := \min\{n \in \mathbb{N} : x_n = 1\}$. Тогда в силу теоремы 1 имеем $2 \leq N_0 \leq N$, причем $N_0 \neq N - 1$.

Предположим сначала, что $h < 1/4$. Тогда из формулы $x_n = C_1 p_1^n + C_2 p_2^n$ для общего решения уравнения (1.3), где

$$p_1 = (1-\lambda)/2, \quad p_2 = (1+\lambda)/2, \quad \lambda = \sqrt{1-4h} \in (0, 1)$$

а C_1, C_2 – произвольные постоянные, с учетом начальных условий $x_0 = 1$, $x_{-1} = x_{N-1} \in (0, 1)$ получаем

$$x_n = (h/\lambda)[(x_{-1} - p_2^{-1})p_1^n - (x_{-1} - p_1^{-1})p_2^n], \quad n = -1, 0, \ldots, N_0 - 1 \tag{3.1}$$

Однако, по определению N_0, правая часть этого выражения при $n = N_0$ неположительна. Отсюда с помощью простых преобразований получаем неравенство

$$(1+\lambda)^{N_0}(1+\lambda-2hx_{-1}) \leq (1-\lambda)^{N_0}(1-\lambda-2hx_{-1}) \tag{3.2}$$

очевидно, неверное.

Если $h = 1/4$, то формулы (3.1) и (3.2) заменятся соответственно на $x_n = x_{-1}2^{-n-1} + (2 - x_{-1})(n+1)2^{-n-1}$ и $2(N_0 + 1) \leq x_{-1}N_0$, что приводит к тому же результату.

Как было отмечено в разд. 2, представляется правдоподобным, что условие $h \leq 1/4$ является не только достаточным, но и необходимым для отсутствия у задачи R ПР.

4. Устойчивость периодических решений. Далее окажется полезным следующее простое утверждение.

Теорема 3. Если $h \geq 1$, то для ПР задачи R наименьший период N равен 1, 2 или 4.

Доказательство. Пусть $h \geq 1$ и $N \notin \{1, 2, 4\}$. Тогда из результатов разд. 2 следует, что $N > 6$. Если в соответствующем цикле какой-либо не последний элемент равен 1, то, в силу теоремы 1, следующий элемент меньше 1. Если и этот элемент не последний, то следующий за ним элемент опять равен 1. Таким образом, цикл состоит из фрагментов длины 2, что невозможно в силу теоремы 1.

Понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости решения задачи R с начальными данными относительно их изменения вводим стандартным образом. ПР задачи R назовем устойчивым (асимптотически устойчивым), если оно устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво) относительно изменения начальных данных при выборе любого значения n в качестве начального.

Рассмотрим устойчивость некоторых ПР.

Пусть $N = 1$. Тогда нетрудно проверить, что для $h > 1$, при любом достаточно малом изменении начальных данных возмущенное решение совпадает с невозмущенным, которое, таким образом, асимптотически устойчиво. Для $h = 1$ оно неустойчиво; например, при $x_{-2} = 1$, $x_{-1} = 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon \in (0, 1))$ имеем

$$x_{2n} = 1, \quad x_{4n+1} = \varepsilon, \quad x_{4n+3} = 1 - \varepsilon, \quad \forall n \in \overline{\mathbb{N}}$$

Пусть $N = 2$. Тогда при $h > 1$ и при $h = \sqrt{5/4} - 1/2$ ПР неустойчиво; при $h = 1$ оно неасимптотически устойчиво; при $\sqrt{5/4} - 1/2 < h < 1$ оно асимптотически устойчиво. В самом деле, пусть

$$h > \sqrt{5/4} - 1/2, \quad x_{-2} = 1 + \varepsilon_1, \quad x_{-1} = 1/(1+h) + \varepsilon_2$$

(см. разд. 2, $N = 2$). Тогда при достаточно малых $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$ имеем

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1/(1+h) - h\varepsilon_2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1/(1+h) + h^2\varepsilon_2$$

и т.д., пока (и если) не потребуется применить условие релаксации. Начальные условия

$$x_{-2} = 1/(1+h) + \varepsilon_1, \quad x_{-1} = 1 + \varepsilon_2$$

приводит к аналогичной последовательности, откуда сразу получаются приведенные выше утверждения об устойчивости для рассматриваемых значений h. Если же $h = \sqrt{5/4} - 1/2$, то за счет выбора как угодно малых по модулю ε_1, ε_2 при первом виде начальных условий можно сделать величину x_0 положительной и как угодно малой, откуда следует неустойчивость ПР.

Приведенное рассуждение имеет общий характер. Принимая во внимание теорему 3 и результат, приведенный в разд. 2 при $N = 4$, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $N \geq 3$, причем выполнено условие

$$x_n \neq h x_{n-1}, \quad \forall n = 1, \ldots, N$$

Тогда ПР $\{x_n\}$ задачи R асимптотически устойчиво. Если же это условие нарушено, то такое решение неустойчиво. Особый случай: если $N = 4$, $h = 1$, то ПР неасимптотически устойчиво.

Из этой теоремы и из сказанного в разд. 2 следует, в частности, что при $N \in [3, 6]$ для интервала $h \in [\alpha_N, \beta_N)$ существования ПР, это ПР при $h \in (\alpha_N, \beta_N)$ асимптотически устойчиво, а при $h = \alpha_N$ неустойчиво.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00665) и Фонда научно-исследовательских и опытно–конструкторских работ Министерства транспорта РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мышкис А.Д.* Системы с последействием и релаксацией // ПММ, 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 141–144.
2. *Myshkis A. D.* Autonomous differential equations with impulsive self–support and infinite delay // Functional Differential Equations, 1995. V. 3. № 1–2. P. 145–154.

Москва
e-mail: amyshkis@mtu-net.ru

Поступила в редакцию
19.I.2004