УДК 531.36;517.977

© 2004 г. М. И. Зеликин

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ КАК ГЕССИАН ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА

Изучена задача оптимального управления с разделенными условиями для концов. Предполагается, что для многообразия левых концов (а также для многообразия правых концов) существует поле экстремалей, включающее данную экстремаль. Доказывается критерий, дающий необходимые и достаточные условия оптимальности в терминах этих двух полей. Достаточным условием служит положительная определенность разности решений соответствующих матричных уравнений Риккати, необходимым условием – ее неотрицательность. Ключевую роль в доказательстве критерия играет формула, связывающая решение уравнения Риккати с гессианом функции Беллмана.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, u)dt \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad \Phi_1(t_1, x(t_1)) = 0, \quad \Phi_2(t_2, x(t_2)) = 0; \quad u(t) \in U \tag{1.2}$$

Здесь x – фазовые переменные, принадлежащие гладкому n-мерному многообразию M, управление $u(t) \in U$ непрерывно, функции f, φ, Φ_1, Φ_2 гладко зависят от своих аргументов.

Отметим, что полученные в статье результаты верны при гораздо менее жестких предположениях, но в целях наглядности и простоты изложения здесь будет приведена простейшая версия. Без ограничения общности можно считать, что $f(t, x, u) > 0$. Этого всегда можно добиться, прибавив к подынтегральной функции подходящую постоянную. Обозначим подмногообразие левых концов (второе равенство (1.2)) через $M_1 \subset \mathbb{R} \times M$, правых концов (третье равенство (1.2)) – через $M_2 \subset \mathbb{R} \times M$; размерности M_1 и M_2 произвольны.

2. Предварительные факты. Напомним факты, касающиеся задачи (1.1), (1.2). Пусть ψ – элемент кокасательного расслоения T^*M многообразия M. Условимся обозначать результат подстановки функций $\hat{x}(t)$, $\hat{\psi}(t)$, $\hat{u}(t)$ под знак некоторой функции $F(x, \psi, u)$ через $\hat{F}(t)$. Рассмотрим функцию Понтрягина

$$\mathcal{H}(t, x, \psi, u) = -f(t, x, u) + \psi\varphi(t, x, u)$$

Обозначим ее максимум по u через $H(t, x, \psi)$. Предполагаем, что задача нормальна и поэтому коэффициент при f можно взять равным –1. Всюду в дальнейшем будем также считать, что значение u, реализующее максимум $\mathcal{H}$, определено однозначно и функция $H(t, x, \psi)$ гладкая.

Пусть $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$, $t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_2]$ реализует сильный локальный минимум. Тогда в силу принципа максимума Понтрягина существует непрерывный подъем $\hat{\psi}(t)$ оптимальной траектории $\hat{x}(t)$ в кокасательное расслоение, удовлетворяющий следующим условиям.

1°. Функция $\mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \hat{\psi}(t), u)$ достигает своего максимума по u при $u = \hat{u}(t)$:

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{\psi}(t)) = \hat{H}(t) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \hat{\psi}(t), u) \tag{2.1}$$

2°. Пара функций $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{\psi}(\cdot)$ является решением гамильтоновой системы

$$\dot{x} = H_{\psi}(t, x, \psi), \quad \dot{\psi} = -H_x(t, x, \psi) \tag{2.2}$$

3°. Удовлетворяются условия трансверсальности: пара $(-\hat{H}(\hat{t}_k), \hat{\psi}(\hat{t}_k))$ является аннулятором касательной плоскости к подмногообразию M_k в точке $\hat{t}_k$, $\hat{x}(\hat{t}_k)$, т.е.

$$-\hat{H}(\hat{t}_k)\theta + \hat{\psi}(\hat{t}_k)\xi = 0 \quad \text{для любых} \quad (\theta, \xi) \in T_* M_k(\hat{t}_k, \hat{x}(\hat{t}_k)) \tag{2.3}$$

Здесь $k = 1$ для левого конца, $k = 2$ для правого конца.

Предположение 1. Функция $\psi(\cdot)$, которая удовлетворяет условиям (2.1)–(2.3), определена однозначно.

Пары $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, удовлетворяющие условиям (2.1)–(2.3), называются экстремалями.

Определим подъем $\mathfrak{M}_1$ многообразия M_1 в расширенное фазовое пространство переменных t, x, ψ: для каждой точки $(t, x) \in M_1$ рассмотрим все ψ, которые удовлетворяют условию (2.3) в этой точке. Легко видеть, что $\dim \mathfrak{M}_1 = n$. Подъем многообразия M_2 обозначим через $\mathfrak{M}_2$.

Предположение 2. Будем считать, что вектор скорости гамильтоновой системы (2.2), дополненной уравнением $\dot{t} = 1$:

$$\zeta_k = (1, \hat{H}_{\psi}(\hat{t}_k), -\hat{H}_x(\hat{t}_k)) \tag{2.4}$$

не касается многообразия $\mathfrak{M}_k$, $(k = 1, 2)$.

Предположение 2 сохраняется для некоторой окрестности $\mathcal{U}_k \subset \mathfrak{M}_k$ точки $(\hat{t}_k, \hat{x}(\hat{t}_k), \hat{\psi}(\hat{t}_k))$.

Обозначим n-мерный вектор координат, параметризующий $\mathcal{U}_k$, через σ_k.

Рассмотрим решения гамильтоновой системы (2.2) с начальными условиями в точках $\sigma_1 = (t_1, x(t_1), \psi(t_1)) \in \mathcal{U}_1$. Предположения 1 и 2 гарантируют, что в результате получится $(n + 1)$-мерное гладкое многообразие $\mathfrak{N}_1$, которое, в силу теоремы об интегральном инварианте Пуанкаре–Картана и в силу условий трансверсальности на левом конце (2.3), является лагранжевым, т.е.

$$\oint_{\gamma} (-Hdt + \psi dx) = 0 \tag{2.5}$$

для любой замкнутой кривой $\gamma \subset \mathfrak{N}_1$. Уменьшив при необходимости окрестность $\mathcal{U}_1$, потребуем, чтобы многообразие $\mathfrak{N}_1$ при $t \in (t_1, t_2]$, где t_1, t_2 зависят от соответствующей траектории $(x(t), \psi(t)) \subset \mathfrak{N}_1$, диффеоморфно проектировалось на некоторую область N_1 пространства (t, x). Если это возможно, то говорим, что в N_1 определено поле экстремалей $\mathfrak{P}_1$, отвечающее многообразию M_1, и что на данной экстремали нет фокальных точек многообразия M_1. В этом случае проекции экстремалей, лежащих в $\mathfrak{N}_1$, однозначно покрывают область N_1. В силу взаимной однозначности проекции, в N_1 определена функция $\psi_1(t, x)$ и тогда $-Hdt + \psi dx$ становится дифференциальной формой на N_1, причем равенство (2.5) означает, что эта форма точная. Следовательно, существует функция $S_1(t, x)$, такая, что

$$dS_1 = -Hdt + \psi dx \tag{2.6}$$

Отсюда следует выполнение уравнения Гамильтона–Якоби в форме Беллмана для S_1, и функция S_1 является функцией Беллмана в задаче минимизации функционала J с начальным многообразием M_1 и с правым концом в точке (t, x).

Точно такую же конструкцию, но только с движением по времени вспять, реализуем для многообразия M_2 и получим другое решение $S_2(t, x)$ уравнения Гамильтона-Якоби, отвечающее многообразию концов M_2.

Предположение 3. Для экстремали $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ на полуинтервале $(\hat{t}_1, \hat{t}_2]$ нет фокальных точек многообразия M_1. На полуинтервале $[\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ нет фокальных точек многообразия M_2.

Если бы, скажем, многообразие M_2 сводилось к точке, то отсутствие фокальных точек многообразия M_1 наряду с принципом максимума Понтрягина давало бы достаточные условия сильного минимума, так как экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ была бы погружена в поле, а условие максимума функции Понтрягина гарантировало неотрицательность функции Вейерштрасса. Однако, если оба многообразия, как M_1 так и M_2 – нетривиальны, предположение 3 необходимо, но далеко не достаточно для оптимальности.

Данная статья посвящена нахождению важной формулы для вычисления гессиана (матрицы второго дифференциала) функций $S_k(t, x)$. Эта формула – не просто новая интерпретация известных конструкций, а удобный математический аппарат. В частности, она позволила найти приведенные ниже необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (1.1), (1.2) столь же простые и эффективные, как критерий отсутствия фокальной точки для задачи с одним закрепленным концом.

3. Основные теоремы. Рассмотрим систему уравнений в вариациях для уравнений (2.2)

$$\begin{aligned} \dot{q} &= H_{\psi x}(t, x, \psi)q + H_{\psi\psi}(t, x, \psi)p \\ \dot{p} &= -H_{xx}(t, x, \psi)q - H_{x\psi}(t, x, \psi)p \end{aligned} \tag{3.1}$$

Через q и p обозначены производные по начальным данным соответственно для функций x и ψ, являющихся решениями системы (2.2). В дальнейшем под q и p нам будет удобно понимать $(n \times n)$-матрицы из производных по значениям σ_1. Коэффициенты системы (3.1) это тоже $(n \times n)$-матрицы.

Основным инструментом исследования будет служить матричное уравнение Риккати [1] для переноса лагранжевых плоскостей по решениям системы (3.1). Обозначим через $W = pq^{-1}$ матричные координаты лагранжевых плоскостей. Прямым дифференцированием легко получить матричное уравнение Риккати для W

$$-\dot{W} = H_{xx} + H_{x\psi}W + WH_{\psi x} + WH_{\psi\psi}W \tag{3.2}$$

Так как матрица коэффициентов системы (3.1) принадлежит алгебре Ли симплектической группы Ли, матрица $W(t)$ будет симметрической, если ее начальное значение $W(t_1)$ – симметрическая матрица. Начальное значение $W(t_1)$ определяется из условия трансверсальности (2.3), которое задает лагранжеву плоскость и, следовательно, является симметрической матрицей.

При вырождении матрицы q решение $W(t)$ уравнения (3.2) уходит в бесконечность (фокальная точка), и при необходимости начать или продолжить решение уравнения (3.2) надо совершить матричное дробно-линейное преобразование, чтобы перейти в другую карту на многообразии Лагранжа–Грассмана.

Теорема 1. Предположим, что на экстремали $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{\psi}(\cdot)$ выполнены предположения 1, 2 и 3. Пусть решение $p(t)$, $q(t)$ уравнений (3.1) описывает эволюцию производных по начальным данным на многообразии $\mathfrak{N}_1$ вдоль экстремали $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{\psi}(\cdot)$.

Тогда соответствующее решение $W_1(t)$ уравнения Риккати (3.2) задает гессиан функции Беллмана $S_1(t, x)$ поля $\mathfrak{P}_1$

$$W_1(t) = \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2}(t, \hat{x}(t)) \tag{3.3}$$

Доказательство. Из формулы (2.6) следует, что вектор ψ_1 в любой точке (t, x), покрытой полем экстремалей, задает градиент функции Беллмана

$$\psi_1(t, x) = \frac{\partial S_1(t, x)}{\partial x} \tag{3.4}$$

Матрица p есть, по определению, матрица производных от ψ_1 по начальным значениям σ_1, а q – матрица производных от x по начальным значениям σ_1. Следовательно, матрица q^{-1} – это производные от σ_1 по x, т.е.

$$pq^{-1} = \frac{\partial \psi_1(t, x)}{\partial \sigma_1}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 S_1(t, x)}{\partial x^2} \tag{3.5}$$

Аналогично для поля $\mathfrak{P}_2$ имеем

$$pq^{-1} = -\frac{\partial^2 S_2(t, x)}{\partial x^2} \tag{3.6}$$

Знак минус появляется из-за того, что $\psi_2(t, x) = -\dfrac{\partial S_2(t, x)}{\partial x}$, так как для отождествления S_2 с J приходится иметь дело с нижним пределом интегрирования.

Рассмотрим поле экстремалей $\mathfrak{P}_1$ для левого многообразия M_1 и поле экстремалей $\mathfrak{P}_2$ для правого многообразия M_2. Поскольку оба поля включают экстремаль $\hat{x}(\cdot)$, имеем

$$\hat{\psi}_1(t) = \hat{\psi}_2(t), \quad t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_2] \tag{3.7}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S_1(t, \hat{x}(t))}{\partial x} = -\frac{\partial S_2(t, \hat{x}(t))}{\partial x} \tag{3.8}$$

т.е. касательные плоскости к поверхностям уровня функций S_1 и S_2 в точках траектории $\hat{x}(\cdot)$ совпадают и противоположно ориентированы.

В следующих ниже теоремах покажем, что необходимым условием оптимальности является неотрицательность, а достаточным – положительная определенность квадратичной формы с матрицей $(W_1 - W_2)$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1, 2 и 3 для траектории $\hat{x}(\cdot)$, удовлетворяющей принципу максимума Понтрягина (2.1)–(2.3).

Тогда необходимым условием для того, чтобы траектория $\hat{x}(\cdot)$ доставляла слабый минимум функционалу (1.1), является неотрицательность квадратичной формы с матрицей $(W_1(\tau) - W_2(\tau))$ при любом $\tau \in (\hat{t}_0, \hat{t}_1)$.

Доказательство. Для траектории $\hat{x}(\cdot)$, дающей слабый минимум, предположим противное, т.е. что найдется момент τ и вектор ξ, такие, что

$$(W_1(\tau)\xi, \xi) - (W_2(\tau)\xi, \xi) < 0 \tag{3.9}$$

Рассмотрим траекторию $x_1(\cdot)$ поля $\mathfrak{P}_1$, которая кончается в точке $(\tau, \hat{x}(\tau) + \xi)$. Такая траектория существует, так как без ограничения общности в силу однородности можно считать вектор ξ сколь угодно малым. Точно так же существует траектория $x_2(\cdot)$ поля $\mathfrak{P}_2$, которая начинается в точке $(\tau, \hat{x}(\tau) + \xi)$. Заметим, что для любой точки $(t, x) \in N_1 \cap N_2$ и для составной экстремали $(x(\cdot), u(\cdot))$, составленной из полей $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$, проходящей через точку (t, x), имеет место равенство

$$S_1(t, x) + S_2(t, x) = J(u(\cdot)) \tag{3.10}$$

Рассмотрим разложения Тейлора

$$S_k(\tau, \hat{x}(\tau) + \xi) = S_k(\tau, \hat{x}(\tau)) + \frac{\partial S_k(\tau, \hat{x}(\tau))}{\partial x}\xi + \frac{(-1)^{k-1}}{2}(W_k(\tau)\xi, \xi) + o(|\xi|^2) \tag{3.11}$$

Складывая формулы (3.11) для $k = 1$ и $k = 2$ при учете равенства (3.8), получаем

$$(S_1 + S_2)(\tau, \hat{x}(\tau) + \xi) - (S_1 + S_2)(\tau, \hat{x}(\tau)) = \frac{1}{2}((W_1 - W_2)(\tau)\xi, \xi) + o(|\xi|^2) < 0 \tag{3.12}$$

В силу соотношений (3.9) и (3.10) удалось добиться уменьшения функционала J. В силу произвольной малости ξ и гладкости полей $\mathfrak{P}_i$, углы наклона как левой, так и правой половины построенной кривой в точке их стыковки сколь угодно мало отличаются от угла наклона экстремали $\hat{x}(\tau)$. Следовательно, построенную составную экстремаль $x(\cdot)$ можно сгладить в точке излома, не нарушая неравенства (3.12) и не выходя из C^1-окрестности траектории $\hat{x}(\cdot)$. Следовательно, на траектории $\hat{x}(\cdot)$ не достигается слабый минимум, что противоречит сделанному предположению.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1, 2 и 3 для траектории $\hat{x}(\cdot)$, удовлетворяющей принципу максимума Понтрягина (2.1)–(2.3).

Тогда достаточным условием для того, чтобы траектория $\hat{x}(\cdot)$ доставляла сильный минимум функционалу (1.1), является положительная определенность квадратичной формы с матрицей $(W_1(\tau) - W_2(\tau))$ при некотором $\tau \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную допустимую траекторию $x(\cdot) \subset N_1 \cap N_2$, отвечающую управлению $u(\cdot)$ и лежащую в ε-окрестности (в топологии C) кривой $\hat{x}(\cdot)$. Тогда $|x(\tau) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon$, следовательно, $x(\tau) = \hat{x}(\tau) + \xi$, где $|\xi| < \varepsilon$. Пусть траектория $x(\cdot)$ пересекает многообразия M_1 при $t = t_1$ и M_2 при $t = t_2$. Заметим, что $\tau \in (t_1, t_2)$ при достаточно малом ε. В силу определения функций $S_k(t, x)$ имеем неравенства

$$\int_{t_1}^{\tau} f(t, x(t), u(t))dt \ge S_1(\tau, x(\tau)), \quad \int_{\tau}^{t_2} f(t, x(t), u(t))dt \ge S_2(\tau, x(\tau))$$

Складывая, получаем

$$J(u(\cdot)) \ge S_1(\tau, x(\tau)) + S_2(\tau, x(\tau))$$

Вновь используя разложение Тейлора (3.12), получаем

$$J(u(\cdot)) - J(\hat{u}(\cdot)) \ge \frac{1}{2}((W_1 - W_2)(\tau)\xi, \xi) + o(|\xi^2|) > 0$$

Замечания. 1°. Задачи, в которых граничные значения для левого и правого концов траектории встречаются в одной общей формуле, сводятся к задаче с разделенными условиями для концов, рассмотренной в данной работе, с помощью введения вспомогательных переменных.

Рассмотрим, например, задачу минимизации функционала

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T f(t, x, u)dt$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad \Phi(x(0), x(T)) = 0; \quad u(t) \in U$$

Введем новые переменные

$$y(t) = x(t), \quad z(t) = x(T-t)$$

Тогда граничные условия примут вид

$$\Phi(y(0), z(0)) = 0, \quad \Phi(z(T), y(T)) = 0$$

2°. Из теорем 2 и 3 следует, что если матрица $(W_1 - W_2)$ положительна при одном значении t, то она остается неотрицательной при всех $t \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$.

3°. Проверка необходимых и достаточных условий, приведенных в теоремах 2 и 3, не вызывает дополнительных трудностей по сравнению с проверкой предположения 3. При этом не требуется дополнительного интегрирования матричного уравнения Риккати (3.2), так как решение этого уравнения выражается через решения уравнений Эйлера–Якоби, которое уже оказывается решенным при проверке предположения 3. Остается лишь вопрос о положительной определенности найденных матриц.

Полученные результаты остаются в силе и в более общей ситуации, в частности при наличии поверхностей переключения. Для преодоления возникающих при этом трудностей можно воспользоваться техникой кусочно-гладких лагранжевых многообразий, развитой ранее [2]. Кроме того, поскольку решения уравнений в вариациях при пересечении поверхностей переключения претерпевают скачки, придется рассматривать разрывные решения уравнений Риккати [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00735) и Минтехпрома РФ (НШ-304.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зеликин М.И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал, 1998. 350 с.
2. *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering. Boston: Birkhäuser, 1994. 242 p.
3. *Osmolovskii N.P., Lempio F.* Transformation of quadratic forms to perfect squares for broken extremals // Set-Valued Analysis. 2002. V. 10. № 2–3. P. 209–232.

Москва
e-mail: zelikin@mike.math.msu.su

Поступила в редакцию
9.XII.2003