УДК 531.36:534.1

© 2004 г. А. С. Андреев, Т. А. Бойкова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Выводятся достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости положения относительного равновесия механической системы с нестационарными голономными связями. На этой основе предлагаются новые способы решения задачи о стабилизации программных движений управляемых механических систем. Решается задача об устойчивости положения равновесия и программного движения физического маятника, горизонтальная ось качания которого вращается с переменной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. Исследуется задача об управлении относительными движениями системы типа центрифуги посредством регулируемой скорости вращения основания.

1. Об устойчивости положения относительного равновесия механической системы с нестационарными голономными связями. Рассмотрим механическую систему с нестационарными, голономными и идеальными связями, положение которой определяется n обобщенными координатами $\mathbf{q}' = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n)$, и соответственно кинетическая энергия системы представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}'A(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad T_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = B'(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

где $A(t, \mathbf{q})$ – положительно-определенная $(n \times n)$-матрица, $B(t, \mathbf{q})$ – $(n \times 1)$-матрица-столбец, $T_0(t, \mathbf{q})$ – скалярная функция, штрих означает транспонирование.

Движение системы под действием потенциальных сил с потенциальной энергией $\Pi(t, \mathbf{q})$ и других обобщенных сил $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ может быть описано уравнениями Лагранжа, приводимыми к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} - G\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial B}{\partial t} + \mathbf{Q} \tag{1.1}$$

Матрица G определяется равенством

$$G(t, \mathbf{q}) = \frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}} - \left(\frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}}\right)' = -G'$$

и может рассматриваться как матрица линейных гироскопических сил, а $W(t, \mathbf{q}) = \Pi(t, \mathbf{q}) - T_0(t, \mathbf{q})$ можно определить как приведенную потенциальную энергию.

Допустим, что для некоторого значения $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ при всех $t \in R^+$ имеет место равенство

$$\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}_0, 0) - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}_0) - \frac{\partial B}{\partial t}(t, \mathbf{q}_0) \equiv 0 \tag{1.2}$$

Тогда система (1.1) имеет положение относительного равновесия

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = 0, \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \tag{1.3}$$

Рассмотрим задачу об его устойчивости, предполагая, что элементы матриц $A(t, \mathbf{q})$, $B(t, \mathbf{q})$ и функция $W(t, \mathbf{q})$ определены и дважды непрерывно дифференцируемы в области $R^+ \times \Gamma_1$, вектор-функция $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ определена и непрерывно дифференцируема в области $R^+ \times \Gamma_1 \times \Gamma_2$, при этом все указанные функции равномерно ограничены вместе со своими производными для ограниченных $\|\mathbf{q}\|$ и $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ при всех $t \in R^+$. Здесь

$$\Gamma_i = \{\mathbf{q} \in R^n : \|\mathbf{q}\| < H_i, 0 < H_i \leq +\infty\}, \quad i = 1, 2$$

$\|\mathbf{q}\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{q} \in R^n$, $\|\mathbf{q}\|^2 = \mathbf{q}_1^2 + \ldots + \mathbf{q}_n^2$.

Из этих условий, наложенных на функции, входящие в уравнения (1.1), следует, что уравнения (1.1) предкомпактны [1, 2], и для них определяются предельные уравнения, которые имеют вид, аналогичный уравнениям (1.1),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T_2^*}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{q}} - G^*\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial B^*}{\partial t} + \mathbf{Q}^* \tag{1.4}$$

Звездочкой обозначены функции, матрицы и выражения, которые являются предельными для соответствующих функций, матриц и выражений из уравнений (1.1) и определяются равенствами (предел берется при $t_n \to +\infty$)

$$T_2^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}'A^*(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad A^*(t, \mathbf{q}) = \lim A(t_n + t, \mathbf{q})$$

$$W^*(t, \mathbf{q}) = \lim W(t_n + t, \mathbf{q}), \quad \mathbf{Q}^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \lim \mathbf{Q}(t_n + t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$G^*(t, \mathbf{q}) = \lim G(t_n + t, \mathbf{q}), \quad B^*(t, \mathbf{q}) = \lim B(t_n + t, \mathbf{q})$$

При этом соответствующая сходимость равномерна по

$$(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in [0, T] \times \{\mathbf{q} : \|\mathbf{q}\| \leq H_0 < H_1\} \times \{\dot{\mathbf{q}} : \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq H_0 < H_1\}$$

Предельные уравнения (1.4) определяют предельные свойства движений системы (1.1), а это позволяет согласно доказанным ранее теоремам [1] найти достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения на основе функции Ляпунова, имеющей знакопостоянную производную.

Для удобства изложения обозначим через h функцию типа Хана [3], $h : R^+ \times R^+$, $h(0) = 0$, $h(a)$ – строго монотонно возрастающая непрерывная функция; через $\gamma : R^+ \to \to R^+$ обозначим равномерно непрерывную функцию, положительную в среднем, т.е. такую, что для некоторого $T > 0$

$$\int_t^{t+T} \gamma(\tau)d\tau \geq \gamma_0 > 0, \quad \forall t \in R^+$$

Рассмотрим область

$$D = R^+ \times \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| < \delta, \|\dot{\mathbf{q}}\| < \delta\}$$

Имеют место следующие утверждения об устойчивости положения равновесия (1.3) системы (1.1).

Утверждение 1.1. Допустим, что имеет место равенство (1.2) и при этом

1) функция $W(t, \mathbf{q}) - W_0(t)$, $W_0(t) = W(t, \mathbf{q}_0)$, в окрестности $\{\mathbf{q} : \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| < \delta > 0\}$ точки $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ определенно-положительна и допускает бесконечно малый высший предел по $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$

$$h_1(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\|) \le W(t, \mathbf{q}) - W_0(t) \le h_2(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\|) \tag{1.5}$$

2) действующие силы и связи таковы, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(-T_2 - T_1 + W - W_0) + \dot{\mathbf{q}}'\mathbf{Q} \le 0, \quad \forall (t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in D$$

Тогда положение равновесия (1.3) равномерно устойчиво.

Утверждение 1.2. Допустим, что имеет место равенство (1.2) и при этом

1) для всех $\mathbf{q} \in \{\mathbf{q} : \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| < \delta > 0\}$ выполнены условия (1.5);

2) действующие силы и связи таковы, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(-T_2 - T_1 + W - W_0) + \dot{\mathbf{q}}'\mathbf{Q} \le -\gamma(t) h_3(\|\dot{\mathbf{q}}\|) \le 0, \quad \forall (t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in D$$

3) положение относительного равновесия (1.3) является изолированным: при любом $\eta > 0$ найдется $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$, такое, что при $t \ge t_0$

$$\left\| \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, 0) - \frac{\partial W(t, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial B(t, \mathbf{q})}{\partial t} \right\| \ge \varepsilon, \quad \forall \mathbf{q} \in \{0 < \eta \le \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| \le \delta\}$$

Тогда положение равновесия (1.3) равномерно асимптотически устойчиво.

Утверждения 1.1 и 1.2 выводятся на основе теоремы об устойчивости из [3, 4] и теоремы об асимптотической устойчивости из [1] с использованием функции $V = T_2 + W - W_0$.

Утверждение 1.3. Допустим, что имеет место равенство (1.2), при этом гироскопическая составляющая инерционных сил отсутствует ($G \equiv 0$), а также в окрестности $\{\mathbf{q}: \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| < \delta > 0\}$ точки $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ для всех $t \ge t_0$ выполняется неравенство

$$(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)'\left(\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial W(t, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial B(t, \mathbf{q})}{\partial t}\right) \ge 0 \tag{1.6}$$

Тогда положение равновесия (1.3) системы (1.1) неустойчиво.

Утверждение 1.4. Вывод о неустойчивости положения равновесия (1.3) остается верным, если вместо условия (1.6) предполагается, что силы $\mathbf{Q}$ являются линейными диссипативными $\mathbf{Q} = -R\dot{\mathbf{q}}$, $R = \text{const}$, а также

$$(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)'\left(\frac{\partial W(t, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial B(t, \mathbf{q})}{\partial t}\right) \le 0$$

Утверждения 1.3 и 1.4 выводятся на основе теоремы о неустойчивости из [1] с использованием соответственно функций Ляпунова

$$V_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)'\frac{\partial T_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

$$V_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)'\frac{\partial T_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)'R(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$$

Допустим, что связи и действующие силы таковы, что имеет место следующее представление:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2$$

$$\mathbf{Q}_1(t,\mathbf{q})-\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q})-\frac{\partial B}{\partial t}(t,\mathbf{q}) \;=\; -p(t,\mathbf{q})\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \qquad (1.7)$$

$$\mathbf{Q}_2=\mathbf{Q}_2(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),\quad \mathbf{Q}_2(t,\mathbf{q},0)\equiv 0$$

где $p(t, \mathbf{q})$ и $S(\mathbf{q})$ – скалярные функции, дважды непрерывно дифференцируемые по $t\in R^+$ и $\mathbf{q}\in\Gamma_1$, при этом $0<p_0\le p(t,\mathbf{q})\le p_1$.

Утверждение 1.5. Пусть имеет место представление сил в виде (1.7), а также

1) для некоторого значения $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0$

$$\frac{\partial S(\mathbf{q}_0)}{\partial \mathbf{q}}=0,\quad S(\mathbf{q})-S(\mathbf{q}_0)\ge h_1(\|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0\|)$$

2) соответствующее положение относительного равновесия (1.3) системы (1.1) является изолированным, т.е.

$$\left\|\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right\|\ne 0,\quad \mathbf{q}\in\{0<\|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0\|<\delta\} \qquad (1.8)$$

3) имеет место соотношение

$$-\frac{1}{p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial l}+\dot{\mathbf{q}}'\frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}}\right)T_2-\frac{1}{p}\frac{\partial T_2}{\partial t}+\frac{1}{p}\dot{\mathbf{q}}'\mathbf{Q}_2\le-\gamma(t)h_2(\|\dot{\mathbf{q}}\|)\le 0,\ \ (t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in D$$

Тогда положение равновесия (1.3) равномерно асимптотически устойчиво.

Предположим, что связи, наложенные на систему, и действующие силы таковы, что

$$\mathbf{Q}_1(t,\mathbf{q})-\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q})-\frac{\partial B}{\partial t}(t,\mathbf{q}) \;=\; -P(t,\mathbf{q})\frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \qquad (1.9)$$

где $S(\mathbf{q})$ – введенная выше функция, $P(t, \mathbf{q})$ – $(n\times n)$-матрица, дважды непрерывно дифференцируемая, ограниченная, невырожденная, $|\det P|\ge\alpha_0=\mathrm{const}>0$, при этом матрица $P^{-1}(t,\mathbf{q})A(t,\mathbf{q})$ является положительно-определенной, $P^{-1}(t,\mathbf{q})A(t,\mathbf{q})\ge\gamma_0E$ для $(t,\mathbf{q})\in R^+\times\Gamma_1$.

Утверждение 1.6. Допустим, что выполнены предположение (1.9) и условия 1 и 2 утверждения 1.5, а также имеет место соотношение

$$\dot{\mathbf{q}}'P^{-1}\left(G'\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{Q}_2+\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{q}}\right)-\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}'P^{-1}\frac{dP}{dt}P^{-1}A\dot{\mathbf{q}}-\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}'P^{-1}\frac{dA}{dt}\dot{\mathbf{q}}\le-\gamma(t)h_2(\|\dot{\mathbf{q}}\|)\le 0\ \ (t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in D$$

Тогда положение равновесия (1.3) равномерно асимптотически устойчиво.

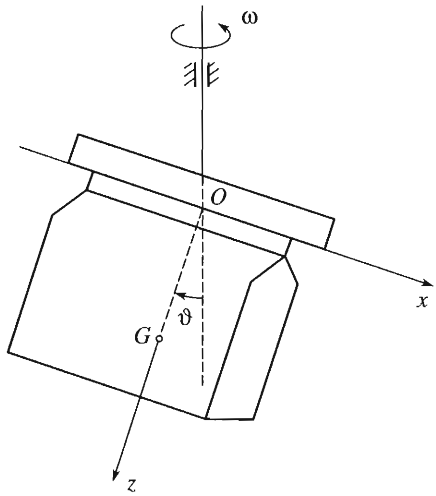
Утверждения 1.5 и 1.6 выводятся на основе теоремы об асимптотической устойчивости из [1] с использованием соответственно функций

$$V_3\;=\;\frac{T_2(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{p(t,\mathbf{q})}+S(\mathbf{q}),\quad V_4\;=\;\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}'P^{-1}(t,\mathbf{q})A(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+S(\mathbf{q})$$

Пример 1.1. Рассмотрим физический маятник [5], горизонтальная ось качания OO' которого вращается вокруг вертикальной оси ON по нестационарному закону $\omega=\omega(t)$. Пусть линии OO' и OG, где точка G – центр тяжести тела, являются главными осями эллипсоида инерции тела для точки O, $z_0=|OG|$.

Введем жестко связанную с телом прямоугольную систему координат $Oxyz$, направив оси x и z соответственно вдоль OO' и OG, а ось y ортогонально осям x и z. За обобщенную координату примем ϑ – угол между нисходящей вертикалью и осью z (фиг. 1).

Пусть A, B, C – моменты инерции тела относительно осей x, y, z.



Фиг. 1

Находим составляющие кинетической энергии и приведенную потенциальную энергию

$$T_2 = \frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2, \quad T_1 = 0, \quad W = -mgz_0\cos\vartheta - \frac{1}{2}\omega^2(t)(B\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)$$

Положения относительного равновесия (ПОР) определяются из уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial\vartheta} = (\omega^2(t)(C-B)\cos\vartheta + mgz_0)\sin\vartheta = 0$$

которое при любом $\omega(t)$ имеет решения

$$\vartheta = 0, \quad \dot{\vartheta} = 0 \tag{1.10}$$

$$\vartheta = \pi, \quad \dot{\vartheta} = 0 \tag{1.11}$$

Из утверждения 1.1 получаем следующие условия равномерной устойчивости ПОР:

$$\pm mgz_0 + (C-B)\omega^2(t) \geq \alpha_0 > 0, \ \ (C-B)\omega(t)\dot{\omega}(t) \leq 0 \tag{1.12}$$

причем верхний знак берется для ПОР (1.10), нижний – для ПОР (1.11).

Предположим, что кроме силы тяжести на тело действуют силы вязкого трения, образующие момент $M_\vartheta = -k\dot{\vartheta}$, $k = \text{const} > 0$. Тогда по утверждению 1.2 имеем, что ПОР (1.10) и (1.11) при условиях (1.12) равномерно асимптотически устойчивы.

Введем функции

$$p(t, \vartheta) = \pm mgz_0 + (C-B)\omega^2(t)\cos\vartheta, \quad S(\vartheta) = 1 \mp \cos\vartheta$$

(как и выше, верхний знак берется для ПОР (1.10), нижний – для ПОР (1.11)).

Используя утверждение 1.5, можно получить следующие условия равномерной асимптотической устойчивости ПОР:

$$p(t, 0) \geq \alpha_0 > 0, \quad k(t) \geq k_0 - \frac{A(C-B)\omega(t)\dot{\omega}(t)}{p(t, 0)}$$

Из утверждения 1.3 можно получить, что как при наличии сил вязкого трения, так и без них, условия

$$p(t, 0) \le -\alpha_0 < 0$$

будут достаточными условиями неустойчивости ПОР (1.10) и (1.11).

2. О стабилизации программного движения механической системы. Пусть положение управляемой голономной механической системы определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а ее движение под действием совокупности управляющих и внешних сил $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_y + \mathbf{Q}_b$ описывается уравнениями Лагранжа второго рода.

Пусть $(\mathbf{q}^0(t), \dot{\mathbf{q}}^0(t))$ – программное движение системы, осуществляемое управляющими силами $\mathbf{Q}_y^0 = \mathbf{Q}_y^0(t)$. Рассмотрим задачу о стабилизации этого движения, состоящую в определении стабилизирующих сил $\mathbf{Q}_c$, $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y^0(t) + \mathbf{Q}_c$, которые обеспечили бы асимптотическую устойчивость данного программного движения [6].

Если ввести новые обобщенные координаты $\mathbf{x} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^0(t)$, поставленная задача сведется к задаче об определении стабилизирующих сил $\mathbf{Q}_c = \mathbf{Q}_c(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, обеспечивающих при одновременном действии внешних сил $\mathbf{Q}_b = \mathbf{Q}_b(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} = 0$ системы с кинетической энергией

$$T = T_2(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + T_1(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + T_0(t, \mathbf{x})$$

Без ограничения общности можем считать, что обобщенные координаты $\mathbf{q}$ выбраны таким образом, что программное движение системы есть положение равновесия $\dot{\mathbf{q}} \equiv 0$, $\mathbf{q} \equiv 0$, и соответственно движение системы описывается уравнениями, аналогичными уравнениям (1.1),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial T_0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial B}{\partial t} - G\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_b \tag{2.1}$$

$G' = -G$, $\mathbf{Q}_c$ и $\mathbf{Q}_b$ – соответственно стабилизирующие (управляющие) и внешние (естественные) силы. Для существования программного движения $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = 0$ действующие силы должны удовлетворять соотношению, аналогичному (1.2),

$$\mathbf{Q}_c(t, 0, 0) + \mathbf{Q}_b(t, 0, 0) + \frac{\partial T_0}{\partial \mathbf{q}}(t, 0) - \frac{\partial B}{\partial t}(t, 0) \equiv 0$$

Задача о стабилизации программного движения может быть решена исходя из утверждений, аналогичных утверждениям 1.2, 1.5, 1.6.

Допустим, что силы $\mathbf{Q}_c$ и $\mathbf{Q}_b$ разделяются:

$$\mathbf{Q}_c(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}_c^1(t, \mathbf{q}) + \mathbf{Q}_c^2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{Q}_b = \mathbf{Q}_b^1(t, \mathbf{q}) + \mathbf{Q}_b^2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\mathbf{Q}_c^2(t, \mathbf{q}, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{Q}_b^1(t, \mathbf{q}, 0) \equiv 0$$

а составляющие стабилизирующих сил $\mathbf{Q}_c^1$ выбраны таким образом, что выполняются соотношения

$$\mathbf{Q}_c^1(t, \mathbf{q}) + \mathbf{Q}_b^1(t, \mathbf{q}) - \frac{\partial B(t, \mathbf{q})}{\partial t} + \frac{\partial T_0(t, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = -p(t, \mathbf{q})\frac{\partial S(\mathrm{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

причем функции $p(t, \mathbf{q})$ и $S(\mathbf{q})$ удовлетворяют условию (1.8) и предположениям 1, 2 утверждения 1.5 при $\mathbf{q}_0 = 0$, составляющие стабилизирующих сил $\mathbf{Q}_c^2$ выбраны таким образом, что для всех $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in D$

$$-\frac{1}{p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}}'\frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}}\right)T_2 - \frac{1}{p}\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{1}{p}\dot{\mathbf{q}}'(\mathbf{Q}_c^2 + \mathbf{Q}_b^2) < -\gamma(t)h_2(\|\dot{\mathbf{q}}\|) \qquad (2.2)$$

Тогда на основании утверждения 1.5 стабилизирующие силы $\mathbf{Q}_c$ обеспечивают равномерную асимптотическую устойчивость программного движения $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = 0$.

Замечание 1°. Если стабилизирующие силы $\mathbf{Q}_c = \mathbf{Q}_c^1 + \mathbf{Q}_c^2$ определить таким образом, чтобы условия (1.7), (1.8) и (2.2) выполнялись для всех $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in R^+ \times \Gamma_1 \times \Gamma_2$, при этом $S(\mathbf{q}) \to +\infty$ при $\mathbf{q} \to \partial\Gamma_1$, то силы $\mathbf{Q}_c$ будут обеспечивать равномерную асимптотическую устойчивость положения равновесия $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = 0$ в целом, т.е. относительно любых начальных возмущений $(t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}) \in \in R^+ \times \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Замечание 2°. Задача о стабилизации программного движения рассматривалась и ранее, например, она решалась управляющими силами вида [7, 8]

$$\mathbf{Q}_y = \dot{B} + \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial T_0}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q}_b - A_1\mathbf{q} - B_1\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{Q}_y = \dot{B} + \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial T_0}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q}_b - A_1\mathbf{q} - B_1\dot{\mathbf{q}} - gF(\dot{\mathbf{q}} + fC_1A\mathbf{q})$$

где f, g – неотрицательные числа, A_1, B_1, C_1 – постоянные симметричные $(n \times n)$-матрицы, удовлетворяющие оценкам с положительными постоянными a_i, b_i, c_i $(i = 1,2)$ соответственно:

$$a_1E_n \le A_1 \le a_2E_n, \quad b_1E_n \le B_1 \le b_2E_n, \quad c_1E_n \le C_1 \le c_2E_n$$

F – постоянная матрица, удовлетворяющая оценке

$$d_1E_n \le (F + F')/2 \ (d_1 > 0)$$

При таком представлении эти силы существенно зависят от параметров механической системы и не учитывают действие внешних сил, которое может оказывать стабилизирующее воздействие.

Пример 2.1. Для физического маятника (см. пример 1.1 в случае действия сил вязкого трения) рассмотрим задачу о стабилизации некоторого программного нестационарного его движения $\vartheta = \vartheta_0(t)$, которое создается регулируемой скоростью вращения $\omega(t)$ вокруг вертикальной оси ON. Пусть закон вращения $\omega = \omega(t)$ таков, что маятник движется нестационарно: $\vartheta = \vartheta_0(t)$, т.е.

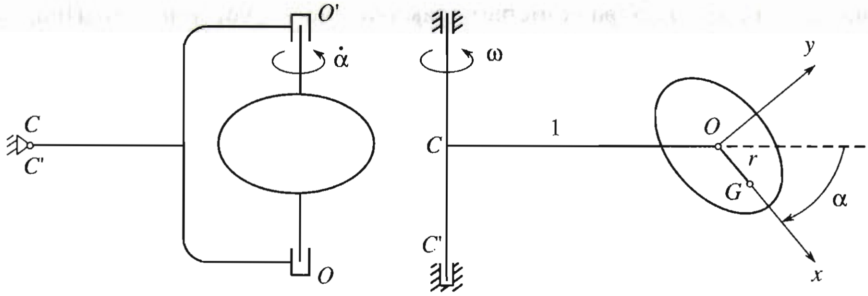
$$\omega^2(t)(C - B)\cos\vartheta_0(t)\sin\vartheta_0(t) = A\ddot{\vartheta}_0(t) + mgz_0 - k\dot{\vartheta}_0(t)$$

Если ввести $x = \vartheta - \vartheta_0(t)$ – отклонение истинного движения от программного, то уравнения возмущенного движения запишутся в виде

$$\ddot{x} = -p(t, x)\frac{\partial S}{\partial x} - k_0\dot{x}$$

$$p(t, x) = \frac{1}{A}\left(mgz_0\cos\left(\vartheta_0(t) + \frac{x}{2}\right) + (C - B)\omega^2(t)\cos 2\left(\vartheta_0(t) + \frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$S(x) = 4\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right), \quad k_0 = \frac{k}{A}$$



Фиг. 2

При выполнении условий

$$p(t,0) = mgz_0\cos\vartheta_0(t) + (C-B)\omega^2(t)\cos 2\vartheta_0(t) \geq p_0 > 0$$

$$\frac{d}{dt}(\ln p(t,0)) \geq -2k_0 + \alpha_0, \quad \alpha_0 = \text{const} > 0$$

заданное движение маятника $\vartheta = \vartheta_0(t)$ асимптотически устойчиво. Эти условия можно представить как условие определенной положительности второй вариации приведенной потенциальной энергии W на движении $\vartheta = \vartheta_0(t)$ и условие ограниченности логарифмического изменения этой вариации во времени снизу значением $-2k_0$.

Пример 2.2. Рассмотрим задачу об устойчивости программных нестационарных движений центрифуги (фиг. 2).

Кабина центрифуги представляет собой твердое тело, которое может свободно поворачиваться вокруг оси OO' относительно державки COO'. Ось OO' ортогональна плоскости L, проходящей через ось CC' центрифуги и центр масс G кабины. Державка COO' приводится во вращение вокруг неподвижной оси CC', при этом скорость вращения изменяется согласно заданному закону $\omega = \omega(t)$. За обобщенную координату примем α – угол поворота кабины вокруг оси OO'.

Пусть L – плоскость симметрии кабины, а ось x, проходящая в этой плоскости через точку G и пересекающаяся с осью OO' в точке O, является главной осью центрального эллипсоида инерции. Обозначим через A, B, C моменты инерции кабины относительно осей x, y, z, расстояние OC через l, расстояние OG через r [5].

Соответственно находим

$$T = \frac{1}{2}C\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}\omega^2(t)(A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha + 2mlr\cos\alpha + ml^2)$$

$$\Pi = mgr\sin\alpha$$

Предположим, что в шарнирных опорах OO' действуют силы вязкого трения, образующие момент

$$M = -k\dot\alpha, \quad k = \text{const} > 0 \tag{2.3}$$

Пусть регулируемое вращение державки COO' вокруг оси CC' по закону $\omega = \omega(t)$ таково, что кабина движется нестационарно: $\alpha = \alpha_0(t)$, т.е.

$$\omega^2(t)((A-B)\cos\alpha_0(t) - mlr)\sin\alpha_0(t) = C\ddot\alpha_0(t) + k\dot\alpha_0(t) + mgr\cos\alpha_0(t)$$

На основании утверждения 1.5 можно получить, что при всех условиях

$$p(t) = -mgr\sin\alpha_0(t) + \omega^2(t)(mlr\cos\alpha_0(t) - (A-B)\cos 2\alpha_0(t)) \geq p_0 > 0$$

$$\frac{d}{dt}(\ln p(t)) \geq -2k_0 + \beta_0$$

движение $\alpha = \alpha_0(t)$ будет равномерно асимптотически устойчивым. При условии $p(t) \le -p_0 < 0$ оно будет неустойчивым.

Пример 2.3. Рассмотрим задачу из примера 2.2 в предположении, что ось OO' параллельна оси CC' центрифуги. За обобщенную координату по-прежнему примем α – угол поворота кабины вокруг оси OO'. Обозначим момент инерции кабины относительно оси OO' через I [5].

Предположим, что в шарнирных опорах OO' действуют силы вязкого трения, образующие момент (2.3). Запишем уравнения движения

$$I\ddot{\alpha} = -\omega^2(t)mlr\sin\alpha + u(2mlr\omega(t)\cos\alpha + I) - k\dot{\alpha}, \quad u = \dot{\omega}(t)$$

Пусть регулируемое вращение державки COO' вокруг оси CC' $\omega = \omega(t)$ под действием управляющего момента u таково, что кабина движется нестационарно: $\alpha = \alpha_0(t)$.

Уравнение возмущенного движения можно привести к виду

$$\ddot{x} = -p(t, x)\frac{\partial S}{\partial x} - k_0\dot{x}, \quad x = \alpha - \alpha_0(t)$$

$$p(t, x) = \frac{1}{I}mlr\omega(t)\left(\omega(t)\cos\left(\alpha_0(t) + \frac{x}{2}\right) - \dot{\omega}(t)\sin\left(\alpha_0(t) + \frac{x}{2}\right)\right)$$

$$S(x) = 4\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right), \quad k_0 = \frac{k}{I}$$

На основании утверждения 1.5 при выполнении условий

$$p(t, 0) = \omega(t)(\omega(t)\cos\alpha_0(t) - u(t)\sin\alpha_0(t)) \ge p_0 = \text{const} > 0$$

$$\frac{d}{dt}(\ln p(t, 0)) \ge -2k_0 + \beta_0$$

имеем равномерную асимптотическую устойчивость заданного нестационарного движения $\alpha = \alpha_0(t)$.

При противоположном условии $p(t, 0) \le -p_0 < 0$ согласно утверждению 1.4 движение $\alpha = \alpha_0(t)$ будет неустойчивым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00877) и в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2000.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.
2. *Андреев А.С.* Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // ПММ. 1996. Т. 60 Вып. 3. С. 388–396.
3. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability Theory by Liapunov's Direct Method. Berlin, etc.: Springer, 1977 = *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
4. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
5. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
6. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
7. *Зубов В.И.* Методы Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. 241 с.
8. *Смирнов Е.Я., Павликов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В.* Управление движением механических систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 313 с.

Ульяновск
e-mail: andreevas@ulsu.ru

Поступила в редакцию
24.VI.2003