УДК 62–50

© 2004 г. **Л. В. Грауэр, Л. А. Петросян**

МНОГОШАГОВЫЕ ИГРЫ

Рассматриваются бесконечношаговая и конечношаговая игры на древовидном графе, каждой вершине которого соответствует некоторая одновременная игра. Дается определение сильного трансферабельного равновесия по Нэшу. Для бесконечношаговых игр вводится процедура регуляризации, которая позволяет построить сильное трансферабельное равновесие. Для конкретного случая повторяющейся бесконечношаговой игры "Дилемма заключенного" n лиц найдено сильное трансферабельное равновесие в явном виде. Для конечношаговых игр определен новый класс равновесий по Нэшу, основанный на использовании стратегий наказания. Получены явные аналитические формулы числа шагов, необходимых для наказания. Показано, что выигрыши в данном равновесии превосходят выигрыши в классическом абсолютном равновесии.

В литературе по теории многошаговых и повторяющихся игр известны теоремы [1–3], из которых следует возможность построения Парето оптимальных равновесий по Нэшу с использованием стратегий наказания; поскольку авторство этих теорем не определено, они получили название народных теорем. Однако в указанных работах народные теоремы доказаны для бесконечношаговых игр. Перенесение же результатов на случай конечношаговых игр сталкивалось с невозможностью реализации наказывающих стратегий на последних шагах игры. Был разработан новый подход [4], использующий как стратегии наказания, так и обычное равновесие по Нэшу, для повторяющихся биматричных игр. В данной работе полностью решена проблема построения соответствующих равновесий по Нэшу для конечношаговых игр n лиц.

В теории игр важен вопрос построения сильных равновесий, т.е. равновесий, устойчивых относительно отклонений коалиций игроков. Для классического статического случая оно не имеет особого смысла, так как такие равновесия, как правило, не существуют. Именно поэтому в классической теории игр рассматривались равновесия, устойчивые относительно отклонений отдельных игроков [5, 6]. Наиболее подробно этот вопрос освещен в [7]. В данной работе с использованием идеологии народных теорем удается при достаточно широких предположениях конструктивно построить сильное равновесие и получить условия его существования для бесконечношаговых игр. В качестве базового иллюстративного примера выбрана многошаговая игра, на каждом шаге которой играется игра "дилемма заключенного" n лиц [8].

1. Бесконечношаговая игра. Рассмотрим бесконечный древовидный граф $G = (Z, L)$, где Z – множество вершин и $L : Z \to 2^Z$, $L(z) = L_z \subset Z$, $z \in Z$. L_z – множество вершин, следующих за z. Будем полагать, что множества L_z, $z \in Z$, конечны. Каждой вершине $z \in Z$ соответствует одновременная игра n лиц

$$\Gamma(z) = \langle N; X_1^z, \ldots, X_n^z; K_1^z, \ldots, K_n^z \rangle$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, одинаковое для всех $z \in Z$, X_i^z – множество стратегий игрока $i \in N$ (множества X_i^z, $z \in Z$, конечны), $K_i^z(x_1^z, \ldots, x_n^z)$ – функция выигрыша игрока i ($i \in N$, $x_i^z \in X_i^z$). Игра $\Gamma(z)$ называется одношаговой игрой.

Для каждой $z \in Z$ определена функция перехода

$$T(z;\, x_1^z, \ldots, x_n^z) = T(z;\, x^z) \in L_z \quad (T(z;\, x^z) \neq \varnothing \Leftrightarrow L_z \neq \varnothing)$$

Функция T определяет для каждой вершины z и ситуации x^z в игре $\Gamma(z)$ вершину z' и соответственно игру $\Gamma(z')$ ($z' = T(z;\, x^z) \in L_z$), которые будут на следующем шаге.

На дереве $G = (Z;\, L)$ с помощью одновременных игр $\Gamma(z)$ и функции перехода T определим многошаговую игру $\bar{G}(z_0)$ следующим образом. На первом шаге в начальной вершине $z_0 \in Z$ происходит одновременная игра $\Gamma(z_0)$. Если в этой игре реализовалась ситуация x^{z_0}, тогда на следующем шаге будет происходить игра $\Gamma(z_1)$, где $z_1 = T(z_0;\, x^{z_0})$. Если на шаге k происходила одновременная игра $\Gamma(z_{k-1})$ и в $\Gamma(z_{k-1})$ реализовалась ситуация $x^{z_{k-1}}$, то на следующем шаге будет происходить игра $\Gamma(z_k)$ ($z_k = T(z_{k-1};\, x^{z_{k-1}})$). Многошаговая игра $\bar{G}(z_0)$ заканчивается, если на некотором шаге l имеем $L_{z_l} = \varnothing$ (в этом случае $T(z_l;\, x^{z_l}) = \varnothing$). Реализовавшуюся последовательность ситуаций x^{z_0}, x^{z_1}, … …, x^{z_k}, … назовем траекторией, а соответствующую последовательность вершин z_0, z_1, …, z_k, … – путем в графе.

Чистая стратегия поведения $\pi_i(y)$, $y \in Z$, игрока $i \in N$ в многошаговой игре $\bar{G}$ – функция, ставящая каждой вершине $y \in Z$ в соответствие чистую стратегию игрока i в одношаговой игре $\Gamma(y) : \pi_i(y) = x_i^y \in X_i^y$. Смешанная стратегия поведения $q_i(y)$, $y \in Z$, игрока $i \in N$ в игре $\bar{G}$ определяется как отображение, ставящее в соответствие каждой вершине $y \in Z$ смешанную стратегию игрока i в одношаговой игре $\Gamma(y)$.

Определим функцию выигрыша в игре $\bar{G}(z_0)$ как дисконтированную сумму выигрышей в одношаговых играх вдоль реализовавшегося пути. Она будет включать дисконтирующий множитель δ, $\delta \in (0;\, 1)$, так как в игре $\bar{G}(z_0)$ могут появиться бесконечные пути $z_0, z_1, \ldots, z_m, \ldots$. Таким образом, выигрыш равен

$$K_i = \sum_{m=0}^{\infty} K_i^{z_m}(x^{z_m})\delta^m, \quad i \in N \tag{1.1}$$

Для того чтобы гарантировать существование суммы (1.1), будем полагать, что все выигрыши в одношаговых играх равномерно ограничены ($K_i^z(x^z) < K$, $z \in Z$).

В игре $\bar{G}(z_0)$ игроки обладают полной информацией в том смысле, что в каждой вершине $z \in Z$ они знают одновременную игру $\Gamma(z)$, в которую играют, и каждый игрок помнит все стратегии, выбранные в предыдущих вершинах всеми игроками.

Для каждой вершины $y \in Z$ рассмотрим подыгры $\bar{G}(y)$ игры $\bar{G}(z_0)$, начинающиеся из y и играемые на подграфе $G(y) = (Z^y,\, L)$. Здесь Z^y – множество вершин подграфа $G(y)$. Функция выигрыша игрока i в игре $\bar{G}(y)$ определена как $\sum_{l=m}^{\infty} K_i^{z_l}(x^{z_l})\delta^{l-m}$.

Рассмотрим траекторию $\bar{x}^{\bar{z}_0}$, $\bar{x}^{\bar{z}_1}$, …, $\bar{x}^{\bar{z}_m}$, … с соответствующим путем $\bar{z}_0 = z_0$, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, … где $\bar{z}_k = T(\bar{z}_{k-1};\, \bar{x}^{\bar{z}_{k-1}})$, на которой сумма выигрышей всех игроков максимальна, т.е.

$$\sum_{i \in N} \sum_{m=0}^{\infty} K_i^{\bar{z}_m}(\bar{x}^{\bar{z}_m})\delta^m = \max_{x^{z_0}, \ldots, x^{z_m}, \ldots} \sum_{i \in N} \sum_{m=0}^{\infty} K_i^{z_m}(x^{z_m})\delta^m = V(z_0;\, N) \tag{1.2}$$

Такую траекторию будем называть *кооперативной* (предполагается, что максимум достигается).

Для каждой подыгры $\bar{G}(z)$, $z \in Z$, рассмотрим соответствующую игру $\bar{\bar{G}}(z) = \langle N, V(z, S)\rangle$ в форме характеристической функции. Характеристическая функция (ХФ) $V(z; S)$, $S \subset N$, определена как значение антагонистической игры $\bar{G}_{S,\,N\setminus S}(z)$, построенной по структуре игры $\bar{G}(z)$, между коалицией S, выступающей в роли максимизирующего игрока, и коалицией $N \setminus S$, выступающей в роли минимизирующего игрока. Выигрыш игрока 1 (коалиции S) определен как сумма выигрышей ее членов. Дополнительно предполагается, что эти значения $V(z; S)$ существуют для каждых $z \in Z$ и $S \subset N$. Обозначим через $(\bar{q}_S^z(\cdot), \bar{q}_{N\setminus S}^z(\cdot))$ пару оптимальных стратегий поведения в игре $\bar{G}_{S,\,N\setminus S}(z)$. Здесь

$$\bar{q}_S^z(\cdot) = \{\bar{q}_i^z(\cdot);\, i \in S\}, \quad \bar{q}_{N\setminus S}^z(\cdot) = \{\bar{q}_i^z(\cdot);\, i \in N\setminus S\} \tag{1.3}$$

Таким образом, пара стратегий $(\bar{q}_S^z(\cdot), \bar{q}_{N\setminus S}^z(\cdot))$ в игре $\bar{G}_{S,\,N\setminus S}(z)$ образует некоторую ситуацию в игре $\bar{G}(z)$: $\bar{q}^z(\cdot) = (\bar{q}_1^z(\cdot), \ldots, \bar{q}_n^z(\cdot))$.

Рассмотрим последовательность подыгр $\bar{\bar{G}}(\bar{z}_m)$ вдоль $z_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m, \ldots$ Для ХФ $V(\bar{z}_m, N)$ выполняется уравнение Беллмана, и

$$V(\bar{z}_m; N) = \max_{x^{\bar{z}_m}} \left\{ \sum_{i \in N} K_i^{\bar{z}_m}(x^{\bar{z}_m}) + \delta V(T(\bar{z}_m; x^{\bar{z}_m}); N) \right\}$$

$$V(\bar{z}_m; N) = \sum_{i \in N} K_i^{\bar{z}_m}(\bar{x}^{\bar{z}_m}) + \delta V(\bar{z}_{m+1}; N)$$

В каждой подыгре $\bar{\bar{G}}(\bar{z}_m)$ рассмотрим C-ядро $C(\bar{z}_m)$ и предположим, что $C(\bar{z}_m) \neq \varnothing$. Для каждой подыгры $\bar{\bar{G}}(\bar{z}_m)$ построим новую ХФ $\hat{V}(\bar{z}_m; S)$ следующим образом:

$$\hat{V}(\bar{z}_m; S) = \max_{x_S} \left\{ \sum_{i \in S} K_i^{\bar{z}_m}(\bar{x}^{\bar{z}_m} \| x_S) + \delta V(T(\bar{z}_m; \bar{x}^{\bar{z}_m} \| x_S); S) \right\}, \quad x_S = \{x_j,\, j \in S\} \tag{1.4}$$

Тогда

$$\hat{V}(\bar{z}_m; N) = V(\bar{z}_m; N), \quad \begin{cases} \hat{V}(\bar{z}_m; S) \geq V(\bar{z}_m; S), & S \subset N \\ \hat{V}(\bar{z}_m; S_1) \geq \hat{V}(\bar{z}_m; S_2), & S_2 \subset S_1 \end{cases} \tag{1.5}$$

ХФ $\hat{V}$ может не быть супераддитивной. В игре $\hat{G}(\bar{z}_m) = \langle N, \hat{V}(\bar{z}_m; S)\rangle$ построим C-ядро $\hat{C}(\bar{z}_m)$ с помощью новой ХФ.

Из соотношений (1.5) следует, что $\hat{C}(\bar{z}_m) \subset C(\bar{z}_m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$.

2. Регуляризация игры $\bar{G}(z_0)$. Предположим, что $\hat{C}(\bar{z}_m) \neq \varnothing$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Пусть дележ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \hat{C}(z_0)$. Последовательность векторов $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_l, \ldots$ $(\beta_l =$

$= (\beta_{1l}, \ldots, \beta_{nl}))$ называется *процедурой распределения дележа во времени* (ПРД), если выполняются следующие условия:

$$\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{il}\delta^l, \quad \alpha_i^m = \sum_{l=m}^{\infty} \beta_{il}\delta^{l-m}, \quad i \in N(\alpha = \alpha^0), \quad \alpha^m = (\alpha_1^m, \ldots, \alpha_n^m) \in \hat{C}(\bar{z}_m) \qquad (2.1)$$

ПРД β существует для каждого дележа $\alpha \in \hat{C}(z_0)$, для произвольной последовательности дележей $\alpha = \alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^m, \ldots$ $(\alpha^m \in \hat{C}(\bar{z}_m))$ ее можно определить следующим образом: $\beta_{im} = \alpha_i^m - \delta\alpha_i^{m+1}$, $i \in N$ $(m = 0, 1, \ldots)$.

Рассмотрим многошаговую игру $\hat{G}_\beta(z_0)$, которая отличается от игры $G(z_0)$ лишь значениями функций выигрыша вдоль кооперативной траектории. Предположим, что в игре $\hat{G}_\beta(z_0)$ в каждой одношаговой игре $\Gamma(\bar{z}_m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ выигрыш в ситуации $(\bar{x}_1^{\bar{z}_m}, \ldots, \bar{x}_n^{\bar{z}_m}) = \bar{x}^{\bar{z}_m}$ определен как

$$\bar{K}_i(\bar{x}_1^{\bar{z}_m}, \ldots, \bar{x}_n^{\bar{z}_m}) = \beta_{im}, \quad i \in N, \quad m = 0, 1, \ldots$$

вместо $K_i^{\bar{z}_m}(\bar{x}^{\bar{z}_m})$ (выигрыш в игре $\Gamma(\bar{z}_m)$). Для всех других ситуаций $(x_1^{\bar{z}_m}, \ldots, x_n^{\bar{z}_m})$ выигрыш остается неизменным: $\bar{K}_i(x_1^{\bar{z}_m}, \ldots, x_n^{\bar{z}_m}) = K_i^{\bar{z}_m}(x_1^{\bar{z}_m}, \ldots, x_n^{\bar{z}_m})$. Как и выше, $q_i^{z_0}(\cdot)$, $i \in N$, – стратегия поведения в игре $\hat{G}_\beta(z_0)$, а Q_i – множество стратегий поведения.

Ситуация в стратегиях поведения $q^*(\cdot) = (q_1^*(\cdot), \ldots, q_n^*(\cdot))$ называется *сильным трансферабельным равновесием по Нэшу* в игре $\hat{G}_\beta(z_0)$, если

$$\sum_{i \in S} K_i(q^*(\cdot)) \geq \sum_{i \in S} K_i(q^*(\cdot)\|q_S(\cdot)), \quad \forall S \subset N, \quad q_S(\cdot) \in \prod_{j \in S} Q_j \qquad (2.2)$$

Теорема 1. В игре $\hat{G}_\beta(z_0)$ существует сильное трансферабельное равновесие по Нэшу (2.2) в стратегиях поведения.

Доказательство. Рассмотрим следующую ситуацию $\hat{q}(\cdot) = (\hat{q}_1(\cdot), \ldots, \hat{q}_n(\cdot))$ в игре $\hat{G}_\beta(z_0)$:

$$\hat{q}_i(\cdot) = \bar{x}_i^{\bar{z}_m} \quad \text{для} \quad z = \bar{z}_m; \quad \hat{q}_i(\cdot) = \bar{q}_i^{\bar{z}_p}(z) \quad \text{при} \quad z \in Z^{\bar{z}_p}; \qquad (2.3)$$

компонента $\hat{q}_i(\cdot)$ произвольна в других случаях
где $\Gamma(\bar{z}_p)$ – первая одношаговая игра из последовательности игр $\Gamma(\bar{z}_0), \ldots, \Gamma(\bar{z}_m), \ldots$, в которых существует коалиция $S \subset N$, такая, что $i \notin S$, а игроки $j \in S$ отклоняются от $\bar{x}_j^{\bar{z}_p}$; $\bar{q}_i^{\bar{z}_p}(z)$ – i-я компонента стратегии $\bar{q}_{N\backslash S}^{\bar{z}_p}(\cdot)$ в игре $\bar{G}_{S, N\backslash S}(\bar{z}^p)$.

Докажем, что ситуация $\hat{q}(\cdot) = (\hat{q}_1(\cdot), \ldots, \hat{q}_n(\cdot))$ является сильным трансферабельным равновесием по Нэшу. Из определения стратегий $\hat{q}_i(\cdot)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (2.3) следует, что

$$K_S(\hat{q}(\cdot)) = \sum_{i \in S} K_i(\hat{q}(\cdot)) = \sum_{i \in S}\sum_{m=0}^{\infty} \beta_{im}\delta^m = \sum_{i \in S} \alpha_i = \sum_{i \in S} \alpha_i^0$$

Теперь рассмотрим ситуации $(\hat{q}(\cdot)\|q_S(\cdot))$, $S \subset N$, и выигрыши в этих ситуациях. Если $q_S(\cdot)$ совпадает с $\hat{q}_S(\cdot)$ вдоль $\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_m, \ldots$, тогда ясно, что

$$K_S(\hat{q}(\cdot)) = K_S(\hat{q}(\cdot)\|q_S(\cdot))$$

Предположим, что стратегия $q_S(\cdot)$ предписывает поведение в одной из одношаговых игр $\Gamma(\bar{z}_m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$, отличное от поведения, предписываемого стратегией $\hat{q}_S(\cdot)$. Обозначим через $\bar{z}_p$ первую вершину пути $\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_m, \ldots$, в которой $q_j(\bar{z}_m) \neq \bar{x}_j^{\bar{z}_p}$, $j \in S$.

В этом случае в ситуации $(\hat{q}(\cdot)\|q_S(\cdot))$ отклонившаяся коалиция S не может получить больше, чем

$$\delta^p \hat{V}(\bar{z}_p; S) = \delta^p \max_{x_S}\left\{\sum_{j \in S} K_j^{\bar{z}_p}(\bar{x}^{\bar{z}_p}\|x_S) + \delta V(T(\bar{z}_p; \bar{x}^{\bar{z}_p}\|x_S); S)\right\}$$

так как после отклонения от $\bar{x}_j^{\bar{z}_p}$, $j \in S$, коалиция игроков $N \setminus S$ будет наказывать коалицию S: в соответствии со свойством (2.3) игроки из коалиции $N \setminus S$ будут играть против коалиции S в антагонистическую игру $\bar{G}_{S, N\setminus S}(z')$ (где $z' = T(\bar{z}_p; \bar{x}^{\bar{z}_p} \| x_S)$) со значением игры $V(T(\bar{z}_p; \bar{x}^{\bar{z}_p} \| x_S); S)$.

Тогда из определения ПРД β (см. условие (2.1)) получаем

$$\sum_{i \in S} K_i(\hat{q}(\cdot)) = \sum_{i \in S}\sum_{m=0}^{\infty} \beta_{im}\delta^m = \sum_{i \in S}\left[\sum_{m=0}^{p-1} \beta_{im}\delta^m + \delta^p \alpha_i^p\right] \geq \sum_{i \in S}\left[\sum_{m=0}^{p-1} \beta_{im}\delta^m\right] +$$
$$+ \delta^p \sum_{i \in S} \alpha_i^p \geq \sum_{i \in S}\sum_{m=0}^{p-1} \beta_{im}\delta^m + \delta^p \hat{V}(\bar{z}_p; S) \geq \sum_{i \in S} K_i(\hat{q}(\cdot)\|q_S(\cdot)) \qquad (2.4)$$

Здесь использовано включение $\alpha^p \in \hat{C}(\bar{z}_p)$, а также тот факт, что в предпоследнем звене цепочки неравенств (2.4) сумма по $i \in S$ равна прибыли, которую коалиция S получит на первых p шагах в случае, когда игроки из S не отклоняются от кооперативной траектории, а последнее слагаемое равно верхней границе выигрышей, которые коалиция S может получить, отклонившись. Этим завершается доказательство.

Теперь рассмотрим случай, когда $\bar{G}(z_0)$ – бесконечно повторяющаяся игра, $\Gamma = \Gamma(z)$. Тогда на каждом шаге $K_i^z = H_i$, $\bar{x}^z = \bar{x}$.

В данном случае следует рассмотреть кооперативную модификацию $\bar{\Gamma}$ игры Γ, ХФ которой $V(S)$ определена как значение антагонистической игры $\Gamma_{S, N\setminus S}$ между коалицией S как игроком 1 (максимизирующим), и коалицией $N \setminus S$ как игроком 2 (минимизирующим), порожденной игрой Γ. Предположим, что ядро в игре Γ не пусто, обозначим его $C(\Gamma)$. Значение игры $\bar{G}_{S, N\setminus S}(z_m)$ будет равно

$$V(\bar{z}_m; S) = \sum_{l=m}^{\infty} V(S)\delta^{l-m} = \frac{V(S)}{1-\delta} \qquad (2.5)$$

и ХФ $\hat{V}(\bar{z}_m; S)$ можно вычислить по формуле

$$\hat{V}(\bar{z}_m; S) = \max_{x_S}\left\{\sum_{j \in S} H_j(\bar{x}\|x_S) + \frac{\delta V(S)}{1-\delta}\right\}$$

(см. выражение (1.4), в котором следует положить $K_j^z = H_j$, $\bar{x}^z = \bar{x}$).

Для любого дележа $\gamma = \gamma_0 \in C(\Gamma)$, определив ПРД β следующим образом: $\beta_{im} = \gamma_i$ ($m = 0, 1, \ldots$), рассмотрим регуляризованную игру $\hat{G}_\gamma(z_0)$.

Существование ПРД эквивалентно непустоте ядра $\hat{C}(\bar{z}_m)$ с ХФ $\hat{V}(\bar{z}_m; S)$, что подразумевает существование решения следующих неравенств:

$$\sum_{i \in S} \gamma_i \ge \hat{V}(S), \quad S \subset N; \quad \hat{V}(S) = (1-\delta)\max_{x_S}\left\{\sum_{j \in S} H_j(\bar{x}\|x_S)\right\} + \delta V(S) \tag{2.6}$$

Здесь было учтено, что

$$\alpha_i^m = \sum_{l=m}^{\infty} \beta_{il}\delta^{l-m} = \sum_{l=m}^{\infty} \gamma_i\delta^{l-m} = \frac{\gamma_i}{1-\delta}$$

Из неравенств (2.6) следует, что дележ $\gamma \in C(\Gamma)$ должен всегда принадлежать и $\hat{C}(\Gamma)$, C-ядру, порожденному ХФ $\hat{V}(S)$ (2.6) в одношаговой игре Г. Ясно, что $\hat{V}(S) \ge$ $\ge V(S)$, $S \subset N$, и $\hat{C}(\Gamma) \ne \varnothing$ означает, что и $C(\Gamma) \ne \varnothing$.

ХФ $\hat{V}(S)$ может быть интерпретирована как математическое ожидание максимального выигрыша коалиции S в игре Г, если коалиция S отклоняется от кооперации с вероятностью δ ($\delta \in (0; 1)$).

Можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Если в одношаговой игре Г ядро $\hat{C}(\Gamma)$, определенное ХФ (2.6), не пусто, то для любого дележа $\gamma \in \hat{C}(\Gamma)$ в регуляризации $\hat{G}_\gamma$ игры $\bar{G}(z_0)$ существует сильное трансферабельное равновесие.

3. Повторяющаяся игра n лиц "дилемма заключенного". В игре n лиц "дилемма заключенного" каждый из n игроков имеет две стратегии, назовем их C и D, такие, что

1) для каждого игрока D – доминирующая стратегия ($D \succ C$),

2) если все игроки выбирают стратегию D, их выигрыши будут меньше, чем если бы все игроки выбрали стратегию C.

Рассмотрим повторяющуюся игру $\bar{G}$, в которой на каждом шаге играется игра n лиц "дилемма заключенного" $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N}\rangle$.

Для каждого игрока i множество стратегий X_i состоит из двух стратегий: C и D ($X_i = \{C, D\}$); $H_i(x_1, \ldots, x_n)$ – функция выигрыша игрока i ($i \in N$, $x_i \in X_i$). Выигрыш H_i игрока i зависит от того, какую игрок выбирает стратегию (C или D), а также от количества игроков k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), выбравших стратегию C, и определяется следующим образом:

$H_i(\cdot) = c_k$ при выборе игроком i стратегии C,

$H_i(\cdot) = d_k$ при выборе игроком i стратегии D.

Здесь k – число игроков из $N\backslash\{i\}$, выбравших стратегию C (остальные $(n-1-k)$ игроков выбрали стратегию D). Параметры c_k, d_k удовлетворяют условиям

1) $d_k > c_k$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, так как $D > C$;
2) $c_{n-1} > d_0$;
3) $c_k \geq c_{k-1}$ и $d_k \geq d_{k-1}$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Так как $D > C$, ситуация $(D, D, \ldots, D)$ является равновесием по Нэшу в игре Γ, но она не оптимальна по Парето, поскольку ситуация $(C, C, \ldots, C)$ лучше для всех игроков.

Рассмотрим кооперативную модификацию игры Γ с ХФ $V(S)$. Имеем

$$V(S) = \max_{0 \leq l \leq s} (lc_{l-1} + (s-l)d_l), \quad s = |S| \tag{3.1}$$

так как стратегия D для каждого игрока из коалиции $N\backslash S$ является оптимальной стратегией коалиции $N\backslash S$ в игре $\Gamma_{S, N\backslash S}$. Тогда

$$V(\{i\}) = d_0, \quad i \in N$$

$$V(N) = \max_{x \in \Pi_{i \in N} X_i} \sum_{i \in N} H_i(x) = \max_{0 < l \leq n} (lc_{l-1} + (n-l)d_l)$$

Можно показать, что С-ядро $C(\Gamma)$ в игре Γ не пусто. Для этого достаточно проверить, что дележ $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, такой, что $\gamma_i = V(N)/n$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, принадлежит С-ядру $C(\Gamma)$.

Пусть $\bar{x}$ – произвольная ситуация в игре Γ, для которой сумма выигрышей игроков максимальна, т.е.

$$\sum_{i \in N} H_i(\bar{x}) = \max_{x \in \Pi_{i \in N} X_i} \sum_{i \in N} H_i(x) = V(N) \tag{3.2}$$

Определим кооперативную траекторию следующим образом: $\bar{x}^z = \bar{x}$. Рассмотрим ХФ $\hat{V}(S)$ (см. (2.6)) и соответствующее С-ядро $\hat{C}(\Gamma)$. Для произвольного дележа $\gamma \in \hat{C}(\Gamma)$ рассмотрим регуляризованную игру $\hat{G}_\gamma(z_0)$. На каждом шаге m $(m = 0, 1, \ldots)$ игры $\hat{G}_\gamma(z_0)$ в ситуации $\bar{x}^z$ игрок i получает выигрыш $\beta_{im} = \gamma_i$. Для удобства записи введем следующие обозначения:

$$H(S) = \sum_{i \in S} \gamma_i, \quad K(S) = \max_{x_S \in \Pi_{i \in x_S} X_i} H_i(\bar{x} \| x_S)$$

Можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $H(S) > V(S)$ для всех $S \subset N$. Если дисконтирующий множитель $\delta \in$ $\in (0, 1)$, такой, что

$$1 > \delta \geq \max_{S \subset N \,:\, K(S) > H(S)} \frac{K(S) - H(S)}{K(S) - V(S)} \tag{3.3}$$

то в регуляризации $\hat{G}_\gamma$ повторяющейся игры "дилемма заключенного" существует ситуация сильного трансферабельного равновесия.

Для доказательства достаточно заметить, что в повторяющейся игре "дилемма заключенного" наказание одно и то же для всех коалиций $S \subset N$, отклонившихся от кооперативной траектории (каждый игрок из коалиции $N\backslash S$ выбирает стратегию D).

Из определения С-ядра $C(\Gamma)$ следует, что $H(S) \geq V(S)$. Если существует хотя бы одна коалиция S_0, $|S_0| < n$, для которой $H(S_0) = V(S_0)$, то коалицию S_0 наказать невозможно.

4. Конечношаговая игра. Рассмотрим конечное дерево игры $G = (Z, L)$. Как и ранее, каждой вершине $z \in Z$ поставлена в соответствие одновременная (одношаговая) игра n лиц

$$\Gamma(z) = \langle N; X_1^z, \ldots, X_n^z; K_1^z, \ldots, K_n^z \rangle$$

На графе $G = (Z; L)$ с помощью одношаговых игр $\Gamma(z)$ и функции перехода T определим многошаговую игру $\bar{G}(z_0)$ аналогичным образом, как и для случая бесконечношаговых игр. Многошаговая игра $\bar{G}(z_0)$ заканчивается, если на некотором шаге $lL_{z_l} = \varnothing$ (в этом случае $T(z_l; x^{z_l}) = \varnothing$).

Функция выигрыша в игре $\bar{G}(z_0)$ определяется как сумма выигрышей в одношаговых играх вдоль реализовавшегося пути $z_0, \ldots, z_k, \ldots, z_l$. Таким образом, выигрыш игрока i в игре $\bar{G}(z_0)$ равен

$$K_i = \sum_{m=0}^{l} K_i^{z_m}(x^{z_m}), \quad i \in N$$

В игре $\bar{G}(z_0)$ игроки обладают полной информацией в том смысле, что в каждой вершине $z \in G$ они знают игру $\Gamma(z)$, в которую одновременно играют, и каждый игрок помнит все стратегии, выбранные в предыдущих вершинах всеми игроками.

Для каждой вершины $y \in Z$ рассмотрим подыгры $\bar{G}(y)$ игры $\bar{G}(z_0)$, начинающиеся в вершине y и играемые на подграфе $G(y) = (Z^y, L)$.

Будем полагать, что все одношаговые игры конечны (имеют конечные множества стратегий). Рассмотрим теперь антагонистическую игру $\bar{\bar{G}}_i(y)$, играемую по структуре игры $\bar{G}(y)$ между игроком i (максимизирующий) и коалицией $(N \setminus \{i\})$, играющей как минимизирующий игрок. Значение данной игры существует в стратегиях поведения, обозначим его $V(y; \{i\})$. Обозначим через $(\hat{q}_i^y(z), \hat{q}_{N\setminus\{i\}}^y(z)) = (\hat{q}_1^y(z), \ldots, \hat{q}_n^y(z))$ соответствующую ситуацию равновесия в игре $\bar{\bar{G}}_i(y)$, $y \in Z$.

Зафиксируем некоторую ситуацию $\bar{x}^z = (\bar{x}_1^z, \ldots, \bar{x}_n^z)$ в игре $\Gamma(z)$ и определим для каждой вершины $z \in Z$ следующие функции:

$$w_i(z) = \max_{x_i^z \in X_i^z} \{K_i^z(\bar{x}^z \| x_i^z) + V[T(z; \bar{x}^z \| x_i^z); \{i\}]\} = \max_{x_i^z \in X_i^z} \{K_i^z(\bar{x}^z \| x_i^z) + V(z'; \{i\})\}$$

$w_i(z)$ – максимальный выигрыш, который игрок i может себе гарантировать в подыгре $\bar{G}(z)$, если отклонится на первом шаге подыгры $\Gamma(z)$ от заданной ситуации $\bar{x}^z = (\bar{x}_1^z, \ldots, \bar{x}_n^z)$.

Обозначим через $\bar{\pi}^y(z) = (\bar{\pi}_1^y(z), \ldots, \bar{\pi}_n^y(z))$ некоторое равновесие по Нэшу в стратегиях поведения в подыгре $\bar{G}(y)$ и через $\lambda_i(y)$, $i \in N$, – соответствующие выигрыши игроков в подыгре $\bar{G}(y)$ $(y \in Z)$.

Для каждого пути $z_0, z_1, \ldots, z_l$ в игре $\bar{G}(z_0)$ и s, $0 \le s \le l$, рассмотрим выражение

$$H_i^s(z_0, \ldots, z_l) = \sum_{m=0}^{s} K_i^{z_m}(x^{z_m}) + \lambda_i(z_{s+1}) \tag{4.1}$$

Теорема 4. Предположим, что существует такое s $(0 \le s \le l)$, что для каждого $s' < s$ следующие условия выполняются:

$$H_i^s(z_0, \ldots, z_l) = \sum_{m=0}^{s} K_i^{z_m}(x^{z_m}) + \lambda_i(z_{s+1}) \ge \sum_{m=0}^{s'-1} K_i^{z_m}(x^{z_m}) + w_i(z_{s'}) \tag{4.2}$$

или

$$\sum_{m=s'}^{s} K_i^{z_m}(x^{z_m}) + \lambda_i(z_{s+1}) \ge w_i(z_{s'}) \tag{4.3}$$

Тогда в игре $G(z_0)$ существует равновесие по Нэшу с выигрышами

$$H_i^s(z_0, \ldots, z) = \sum_{m=0}^{s} K_i^{z_m}(x^{z_m}) + \lambda_i(z_{s+1}), \quad i \in N \tag{4.4}$$

Доказательство. Обозначим через $u_i(z)$, $z \in Z$, $i \in N$, стратегию поведения игрока i в игре $\bar{G}(z_0)$ и через $\bar{K}_i(u_1(z), \ldots, u_n(z)) = \bar{K}_i(u(z))$ соответствующие выигрыши. Определим ситуацию в стратегиях поведения $u^*(z) = (u_1^*(z), \ldots, u_n^*(z))$ в игре $\bar{G}(z_0)$ следующим образом:

$$u_i^*(z) = \begin{cases} x_i^{z_m} & \text{для} \quad z = z_m, \quad m \le s \\ \bar{\pi}_i^{z_{s+1}} & \text{для} \quad z \in Z^{z_{s+1}} \\ \hat{q}_i^{z_p}(z) & \text{для} \quad z \in Z^{z_p} \end{cases}$$

где $\Gamma(z_p)$ – первая одношаговая игра в последовательности игр $\Gamma(z_0), \ldots, \Gamma(z_l)$, в которых существует игрок $j \ne i$, отклонившийся от $x_j^{z_p}$. Докажем, что данная ситуация $u^*(z) = (u_1^*(z), \ldots, u_n^*(z))$ является равновесием по Нэшу в игре $\bar{G}(z_0)$.

Из определения стратегий $u_i^*(z)$, $i \in N$, и выражения (4.1) следует, что

$$K_i(u^*(\cdot)) = H_i^s(z_0, \ldots, z_l) = \sum_{m=0}^{s} K_i^{z_m}(x^{z_m}) + \lambda_i(z_{s+1})$$

Рассмотрим теперь ситуацию $(u^*(z)\|u_j(z))$, $j \in N$, и выигрыши в этой ситуации.

Если $u_j(z)$ совпадает с $u_j^*(z)$ вдоль $z_0, \ldots, z_s$ и для $z \in Z^{z_{s+1}}$ ситуации в стратегиях поведения $u^*(z)$ и $(u^*(z)\|u_j(z))$ порождают одни и те же вероятностные распределения на пучке путей с общим корнем $z_0, z_1, \ldots, z_s$, то $\bar{K}_j(u^*(z)) = \bar{K}_j(u^*(z)\|u_j(z))$. Теперь предположим, что $u_j(z)$ совпадает с $u_j^*(z)$ для $z = z_0, z_1, \ldots, z_s$, но предписывает поведение, отличное от $\bar{\pi}_j^{z_{s+1}}(z)$ в подыгре $\bar{G}(z_{s+1})$. Так как $\bar{\pi}^{z_{s+1}}(z) = (\bar{\pi}_1^{z_{s+1}}(z), \ldots, \bar{\pi}_n^{z_{s+1}}(z))$ – равновесие по Нэшу в подыгре $\bar{G}(z_{s+1})$, выигрыш игрока j в данной подыгре не может превышать $\lambda_i(z_{s+1})$, а на шагах $z_0, \ldots, z_s$ (в одношаговых играх $\Gamma(z_0), \ldots, \Gamma(z_s)$) выигрыши игрока j в ситуациях $u^*(z)$ и $(u^*(z)\|u_j(z))$ совпадают. Тогда в данном случае

$$\bar{K}_j(u^*(z)) \ge \bar{K}_j(u^*(z)\|u_j(z))$$

Предположим, что $u_j(z)$ предписывает стратегию, отличную от $u_j^*(z)$ в одной из игр $\Gamma(z_m)$, $0 \le m \le s$. Обозначим через z_p первую вершину пути $z_0, \ldots, z_s$, в которой $u_j(z_p) \ne x_j^{z_p}$. В этом случае в ситуации $(u^*(z)\|u_j(z))$ игрок j не может получить больше, чем

$$\sum_{m=0}^{p-1} K_i^{z_m}(x^{z_m}) + \max_{\tilde{x}_j^{z_p} \in X_j^{z_p}} [K_i^{z_p}(x^{z_p}\|\tilde{x}_j^{z_p}) + V(T(z^p; x^{z_p}\|\tilde{x}_j^{z_p}); \{j\})] =$$

$$= \sum_{m=0}^{p-1} K_i^{z_m}(x^{z_m}) + w_j(z_p)$$

так как после отклонения от $x_j^{z_p}$ на шаге p он будет наказываться коалицией $N \setminus \{j\}$, так как игроки из $N \setminus \{j\}$, в соответствии с определением $u^*(\cdot)$, будут играть против него в антагонистическую игру $\bar{\bar{G}}(z')$ $(z' = T(z^p;\ x^{z_p} \| \tilde{x}_j^{z_p} = u_j(z_p)))$ со значением $V(T(z_p;\ x^{z_p} \| \tilde{x}_j^{z_p} = u_j(z_p)); \{j\})$. Из условий (4.2), (4.3) теоремы получаем неравенство

$$K_j(u^*(z)) \geq K_j(u^*(z) \| u_j(z)), \quad j \in N$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай повторяющейся игры $\bar{G}(z_0)$, когда на каждом шаге имеет место одна и та же игра Г. В этом случае введем значение одношаговой антагонистической игры Γ_i, в которой игрок i выступает как максимизирующий игрок, а коалиция $N \setminus \{i\}$ – как минимизирующий. Игра происходит по структуре одношаговой игры Г. Обозначим значение игры Γ_i через V_i, $i \in N$. Все пути в графе G имеют одну и ту же длину M. Значение игры $\bar{\bar{G}}_i(z_k)$ равно $V(z_k; \{i\}) = (M-k)V_i$ и зависит только от числа шагов в игре $\bar{\bar{G}}_i(z_k)$ и не зависит от вершины z_k. Также $\lambda_i(z_k) = (M-k)\lambda_i$, где λ_i – выигрыш в некотором заданном равновесии по Нэшу в игре Г.

Теорема 5. Рассмотрим ситуацию $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в игре и обозначим

$$H_i(x_1, \ldots, x_n) = \bar{\lambda}_i, \quad i \in N$$

Предположим, что существует такое s, $0 \leq s \leq M$, что следующие условия выполняются:

$$\bar{\lambda}_i + (M-s)\lambda_i \geq \max_{\tilde{x}_i} H_i(x \| \tilde{x}_i) + (M-s)V_i, \quad i \in N \tag{4.5}$$

Тогда в игре $\bar{G}(z_0)$ существует равновесие по Нэшу с выигрышами

$$s\bar{\lambda}_i + (M-s)\lambda_i, \quad i \in N$$

Теорема 2 – следствие теоремы 1 для повторяющихся игр. Заметим, что в повторяющихся играх, если условия (4.5) выполняются для некоторого s, $0 \leq s \leq M$, то они выполняются также и для всех $s' < s$ (так как $\lambda_i \geq V_i$), что неверно в общем случае, рассмотренном в теореме 1.

5. Примеры. *(3 × 3)-игра "дилемма заключенного"*. Рассмотрим повторяющуюся 40-шаговую игру двух лиц, в которой на каждом шаге играется биматричная игра

$$\Gamma : I = \left\| \begin{matrix} (8;\,8) & (0;\,0) & (0;\,20) \\ (0;\,0) & (0;\,0) & (0;\,0) \\ (20;\,0) & (0;\,0) & (1;\,1) \end{matrix} \right\|$$

Здесь

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 8, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad V_1 = V_2 = 0$$

Из условий (4.5) получаем $s \leq 28$; это означает, что в рассматриваемой игре существует равновесие по Нэшу, в котором игроки на первых s ($s \leq 28$) шагах выбирают ситуацию (1.1) и на последних $40 - s$ ($40 - s \geq 12$) шагах ситуацию (3.3) на каждом шаге. В равновесии по Нэшу, предложенном в этой статье, выбирая $s = 8$, игроки могут получить $8 \cdot 28 + 12 \cdot 1 = 236$, в то время как в повторяющемся равновесии по Нэшу они получат только $40 \cdot 1 = 40$, что существенно меньше.

Повторяющаяся M-шаговая игра $\bar{G}$ *n лиц "дилемма заключенного"* (см. разд. 3). Для каждого игрока i выигрыш в ситуации равновесия по Нэшу в игре Г будет $\lambda_i =$

$= H_i(D, \ldots, D) = d_0$ и равен максимальному выигрышу V_i, который игрок i может гарантировать себе в игре Γ_i, вследствие чего в данной игре метод построения нового класса равновесий, предложенный в разд. 4, не может быть применен.

По этой причине предлагается построить регуляризацию игры. Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ – ситуация в игре Γ, такая, что $H_i(\bar{x}) \geq d_0$, для $i \in N$. Такая ситуация всегда существует, например $(C, C, \ldots, C)$. Теперь рассмотрим кооперативную траекторию с соответствующим путем $\bar{x}^{\bar{z}_0}, \bar{x}^{\bar{z}_1}, \ldots, \bar{x}^{\bar{z}_M}$. Здесь $\bar{x}^z = \bar{x}$ и $\bar{z}_k = T(\bar{z}_{k-1}; \bar{x}^{\bar{z}_{k-1}})$.

Построим новый древовидный граф $G_m = (Z_m, L^m)$ с помощью древовидного графа G следующим образом: если путь $z_0, z_1, \ldots, z_M$ в графе G таков, что существует $k \leq M$: $z_j = \bar{z}_j$ для всех $j < k$ и $z_k = T(\bar{z}_{k-1}; \bar{x}\|x_i) \neq \bar{z}_k$ для некоторого $i \in N$, то в графе G_m имеем $L_{z_M} \neq \varnothing$ и любой путь, проходящий через вершину z_M, имеет длину $(M + m)$. В остальных случаях $L_{z_M} = \varnothing$. На древовидном графе G_m с помощью одношаговой игры Γ и функции перехода T определим регуляризованную игру $\bar{G}_m$. Таким образом, в игре $\bar{G}_m$ в некоторых случаях одношаговая игра Γ повторяется $(M + m)$ раз, т.е. если игрок i отклоняется от кооперативной траектории, игра будет продолжаться дополнительные m шагов и у игроков из $N \setminus \{i\}$ будет возможность наказать игрока i.

Теорема 6. Предположим, что $d_0 < 0$. Для

$$m \geq \max_{i \in N}\{[H_i(\bar{x}) - \max_{x_i \in X_i} H_i(\bar{x}\|x_i)]/V_i\}$$

в игре $\bar{G}_m$ существует ситуация равновесия по Нэшу с выигрышами

$$H_i^m(z_0, z_1, \ldots, z_l) = MH_i(\bar{x}), \quad i \in N.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fudenberg D., Tirole J.* Game Theory. Cambridge: MIT press, 1991. 603 p.
2. *Osborne M.J., Rubinstein A.* A course in game theory. Cambridge: MIT press, 1996. 352 p.
3. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М: Высш. шк., 1998. 299 с.
4. *Petrosjan L.A., Egorova A.A.* New class of solutions for repeated bimatrix games // Proc. 11th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. St. Petersburg, Russia, 2000. V. 2. P. 617–622.
5. *Nash J.F.* Equilibrium points in *n*-person games // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1950. V. 36. № 1. P. 48–49.
6. *Kuhn H.W.* Extensive games and the problem of information // Ann. Math. Studies. 1953. V. 28. P. 193–216.
7. *Van Damme E.E.C.* Stability and Perfection of Nash Equilibria. Berlin: New York: Springer, 1991. 339 p.
8. *Straffin P.D.* Game Theory and Strategy. Washington. Math. Associat. America, 1993. 244 p.

Санкт-Петербург
e-mail: grauer_ lidia@pochta.ru
spbuoasis7@peterlink.ru

Поступила в редакцию
14.I.2004