УДК 62–50

© 2004 г. С. А. Брыкалов

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОДНОЗНАЧНЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧАХ УКЛОНЕНИЯ

Рассматриваются непрерывные способы управления по обратной связи в задачах уклонения в присутствии помехи. Состояние управляемой системы характеризуется конечномерным вектором. Динамика описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, которое линейно по фазовому вектору. Управляющий параметр может нелинейно входить в уравнение, и в том числе в коэффициент при фазовом векторе. Дифференциальное уравнение содержит также неизвестную помеху. Предполагается, что управление и помеха подчинены геометрическим ограничениям. Цель управления состоит в уклонении от выпуклого замкнутого целевого множества, заданного в функциональном пространстве траекторий системы. В частности, такая постановка задачи содержит случай целевого множества в конечномерном пространстве состояний системы на правом конце отрезка. Изучаются способы управления, которые описываются однозначными отображениями, непрерывно зависящими от фазового вектора. Эти способы управления могут использовать отклонение аргумента. При естественных ограничениях, накладываемых на систему, показано, что если некоторый непрерывный способ управления по обратной связи гарантирует уклонение при любой допустимой помехе, то найдется способ управления без обратной связи, также гарантирующий уклонение.

В теории позиционных дифференциальных игр [1–4] стратегия игрока есть функция, описывающая обратную связь в конфликтно управляемой системе. Свойства непрерывных по фазовому вектору стратегий подробно обсуждались ([1], § 55, [2], § 3, [3], с. 232–239, [5–8]). Непрерывные стратегии в дифференциальной игре с линейным по фазовому вектору уравнением рассматривались в предположении, что коэффициент при фазовом векторе не зависит от управления.

Ниже изучается ситуация, когда такая зависимость может присутствовать, и, кроме того, эти результаты распространяются с начальных на некоторые краевые задачи. При этом удалось дать достаточно простое доказательство теоремы о непрерывных стратегиях, основанное на применении теоремы Какутани в пространстве непрерывных функций и леммы о замкнутости графика многозначного отображения. Здесь используются налагаемые ниже упрощающие предположения (выпуклость целевого множества, однозначность стратегий и некоторые другие). Соображения о том, как отбросить или ослабить эти упрощающие предположения за счет усложнения доказательства, можно найти в работах [7, 8], которые основаны на методах алгебраической топологии.

1. Постановка задачи. Будем исследовать управляемую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t, \upsilon)x + g(t, u, \upsilon)$$

Независимая переменная $t \in [t_0, \vartheta]$ обычно обозначает время, x – конечномерный фазовый вектор, υ – управление, u – помеха. Заданы геометрические ограничения $u \in P$, $\upsilon \in Q$. Фиксировано целевое множество M в функциональном пространстве траекторий системы. Требуется воздействовать на систему с помощью управления $v \in Q$ так, чтобы гарантировать уклонение $x(\cdot) \notin M$, какой бы ни была реализация помехи $u(t) \in P$.

Целевое множество в пространстве траекторий естественно появляется, в частности, как множество уровня нетерминального функционала (например, зависящего от значений решения в нескольких точках или содержащего максимум, интеграл, другие нелокальные операции). Были рассмотрены конкретные примеры дифференциальных игр с нетерминальными функционалами платы [4].

Часто встречается ситуация, в которой целевое множество M_ϑ задается в конечномерном пространстве, и уклоняющийся игрок старается добиться выполнения соотношения $x(\vartheta) \notin M_\vartheta$. Эту ситуацию можно рассматривать как частный случай задачи с целевым множеством M в пространстве траекторий. Достаточно взять в качестве M множество всех непрерывных функций, заканчивающихся на M_ϑ, т.е. удовлетворяющих условию $x(\vartheta) \in M_\vartheta$.

Можно формировать требуемое управление v по обратной связи, учитывая замеры фазового вектора, а также использовать более общие стратегии с памятью $v = v(t, x(\cdot))$. Было бы естественным попытаться обойтись стратегиями, обладающими свойством непрерывности по фазовому вектору. Однако во многих задачах возможности таких стратегий ограничены.

Ниже при достаточно общих предположениях о системе будет показано следующее. Если можно гарантировать уклонение посредством непрерывной по $x(\cdot)$ стратегии $v = v(t, x(\cdot))$, то удается обеспечить уклонение с помощью программного управления $v = v(t, y(\cdot))$, где $y(\cdot)$ – подходящая фиксированная функция. Таким образом, если в этих задачах можно уклониться с помощью управления по непрерывной обратной связи, то удается уклониться и без обратной связи, т.е. по программе.

Результат иллюстрируется простым примером дифференциальной игры, в которой требуется уклониться от начала координат в конечный момент времени, причем сначала движение системы определяется только помехой, а затем только уклоняющимся игроком. Это приводит к разрывным коэффициентам в уравнении.

Отметим, что приведенный ниже математический результат доказан для стратегий $v = v(t, x(\cdot))$, содержащих как запаздывание, так и опережение. Этот результат позволяет также рассмотреть случай не только начальной, но и некоторых краевых задач, что оказывается полезным, если независимая переменная имеет смысл не времени, а координаты. Стратегии с отклонением аргумента и краевые условия, содержащие управляющие параметры, возникают в некоторых задачах о стационарных распределениях температуры на стержне, управление нагреванием которого осуществляется по непрерывной обратной связи, см. [9].

Будем использовать следующие обозначения (n – целое число, $n \ge 1$): $\mathbf{R}^n$ – пространство n-мерных векторов (столбцов), норма $|\cdot|_n$ которого фиксирована; $\mathbf{R}^{n \times n}$ – пространство $(n \times n)$-матриц с вещественными элементами, норма которого $|\cdot|_{n \times n}$ согласована с рассматриваемой векторной нормой, т.е. $|Ab|_n \le |A|_{n \times n}|b|_n$ для произвольных $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbf{R}^n$, C^0 – пространство непрерывных функций; L_1 – пространство измеримых по Лебегу функций с интегрируемым модулем (с интегрируемой нормой $|x(t)|_n$ или $|x(t)|_{n \times n}$ для функций $x(t)$ со значениями в пространстве n-мерных векторов или $(n \times n)$-матриц); AC – пространство абсолютно непрерывных функций.

Используются обычные нормы перечисленных функциональных пространств, в частности,

$$\|x(\cdot)\|_{AC} = \|x(\cdot)\|_{C^0} + \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_1}$$

Знак co соответствует выпуклой оболочке, cl co – выпуклой замкнутой оболочке.

2. Системы с непрерывной обратной связью. Зафиксируем некоторые вещественные числа $t_0 < \vartheta$ и целые числа $n, p, q \ge 1$. Если из контекста не вытекает другое, используемые функциональные пространства состоят из функций, определенных на отрезке $[t_0, \vartheta]$ и принимающих значения в $\mathbf{R}^n$. Например, C^0 обозначает $C^0([t_0, \vartheta], \mathbf{R}^n)$, если не оговорено иное. Предполагаем, что множества $P \subset \mathbf{R}^p$, $Q \subset \mathbf{R}^q$ непусты и замкнуты. Кроме того, множество P ограничено. Функция $g : [t_0, \vartheta] \times P \times Q \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Это означает, что функция $g(t, u, \upsilon)$ при почти всяком фиксированном t непрерывна по u, υ, а при любых фиксированных u, υ измерима по t. Кроме того, пусть найдется функция ξ: $[t_0, \vartheta] \to [0, \infty)$, $\xi(\cdot) \in L_1$, такая, что для почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ и всех $u \in P$, $\upsilon \in Q$ верно неравенство

$$|g(t, u, \upsilon)|_n \le \xi(t) \tag{2.1}$$

Матричная функция $A : [t_0, \vartheta] \times Q \to \mathbf{R}^{n \times n}$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Для некоторой $\eta : [t_0, \vartheta] \to [0, \infty)$, $\eta(\cdot) \in L_1$, почти всякого $t \in [t_0, \vartheta]$ и любого $\upsilon \in Q$ выполняется оценка

$$|A(t, \upsilon)|_{n \times n} \le \eta(t) \tag{2.2}$$

Множество $M \subset C^0$ выпукло и замкнуто. Пусть $\upsilon : [t_0, \vartheta] \times C^0 \to Q$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Таким образом, $\upsilon(t, z(\cdot))$ при почти всяком фиксированном числе $t \in [t_0, \vartheta]$ непрерывно зависит от функции $z(\cdot) \in C^0$, а при всякой фиксированной функции $z(\cdot)$ выражение $\upsilon(t, z(\cdot))$ измеримо по переменной t. Отображения $\sigma : C^0 \to [t_0, \vartheta]$, $h : C^0 \to \mathbf{R}^n$ непрерывны. Найдется число $K \ge 0$, такое, что для всякой функции $z(\cdot) \in C^0$ верно неравенство

$$|h(z(\cdot))|_n \le K \tag{2.3}$$

Замечание 1. Фактически достаточно ограниченности h лишь на множестве M. Однако предположение об ограниченности h на всем пространстве C^0 позволяет несколько упростить приводимое ниже доказательство теоремы.

Договоримся, что $g(t, P, r)$ – совокупность всех векторов вида $g(t, \alpha, r)$, где число t и вектор r фиксированы, α пробегает множество P.

Теорема. Пусть краевая задача

$$\dot{x}(t) \in A(t, \upsilon(t, x(\cdot)))x(t) + \operatorname{co} g(t, P, \upsilon(t, x(\cdot))) \tag{2.4}$$

$$x(\sigma(x(\cdot))) = h(x(\cdot)) \tag{2.5}$$

не имеет решений $x(\cdot) \in M \cap AC$. Тогда найдется функция $y(\cdot) \in C^0$ такая, что начальная задача

$$\dot{x}(t) \in A(t, \upsilon(t, y(\cdot)))x(t) + \operatorname{co} g(t, P, \upsilon(t, y(\cdot))) \tag{2.6}$$

$$x(\sigma(y(\cdot))) = h(y(\cdot)) \tag{2.7}$$

также не имеет решений $x(\cdot) \in M \cap AC$.

Замечание 2. Подчеркнем, что в теореме идет речь об отсутствии решений, принадлежащих множеству $M \cap AC$. При налагаемых на A, υ, g, P, σ, h требованиях рассматриваемые задачи заведомо имеют решения в AC. Проще всего убедиться в этом следующим образом. Зафиксируем некоторый элемент $\beta \in P$ и заметим, что для любой функции $y(\cdot)$ линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t, \upsilon(t, y(\cdot)))x(t) + g(t, \beta, \upsilon(t, y(\cdot)))$$

имеет решение, подчиненное начальному условию (2.7). Это решение удовлетворяет также начальной задаче (2.6), (2.7). Теперь разрешимость краевой задачи (2.4), (2.5) следует из сформулированной выше теоремы, если в качестве M взять все пространство C^0.

Замечание 3. Поскольку в правых частях дифференциальных включений (2.4), (2.6) овыпукляются ограниченные замкнутые множества в конечномерном пространстве, выпуклая оболочка совпадает с выпуклой замкнутой оболочкой. Это следует из теоремы Каратеодори (см., например [10], с. 171, 174).

Замечание 4. Переход к выпуклой оболочке в правых частях включений (2.4), (2.6) становится ненужным, если выполняется следующее требование выпуклости вектограммы: для почти всякого $t \in [t_0, \vartheta]$ и всякого $r \in Q$ множество $g(t, P, r)$ выпукло.

Для доказательства теоремы понадобится следующая

Лемма о замкнутом графике. Пусть дано многозначное отображение

$$[t_0, \vartheta] \times C^0 \times C^0 \ni (t, x(\cdot), z(\cdot)) \mapsto F(t, x(\cdot), z(\cdot)) \subset \mathbf{R}^n$$

причем для любых $x(\cdot)$, $z(\cdot) \in C^0$ и почти всякого $t \in [t_0,\vartheta]$ множество $F(t, x(\cdot), z(\cdot))$ выпукло и замкнуто; для почти всякого фиксированного $t \in [t_0, \vartheta]$ многозначное отображение

$$C^0 \times C^0 \ni (x(\cdot), z(\cdot)) \mapsto F(t, x(\cdot), z(\cdot)) \subset \mathbf{R}^n$$

полунепрерывно сверху; для всякого $N \geq 0$ найдется функция γ_N: $[t_0, \vartheta] \to [0, \infty)$, $\gamma_N(\cdot) \in$ $\in L_1$, такая, что для любых $x(\cdot)$, $z(\cdot)$ из шара $\|x(\cdot)\|_{C^0}$, $\|z(\cdot)\|_{C^0} \leq N$ при почти всяком t и всяком $y \in F(t, x(\cdot), z(\cdot))$ верно неравенство $|y|_n \leq \gamma_N(t)$. Для $z(\cdot) \in C^0$ через $\Omega(z(\cdot))$ обозначим множество всех $x(\cdot) \in AC$, удовлетворяющих почти всюду дифференциальному включению $\dot{x}(t) \in F(t, x(\cdot), z(\cdot))$. Тогда

$$C^0 \ni z(\cdot) \mapsto \Omega(z(\cdot)) \subset C^0 \tag{2.8}$$

имеет замкнутый график.

Замечание 5. Условия леммы о замкнутом графике не исключают вырожденного случая. При использовании этой леммы нужны дополнительные требования, обеспечивающие наличие функций $z(\cdot)$, для которых множества $\Omega(z(\cdot))$ непусты.

Замечание 6. Как хорошо известно, для многозначного отображения с непустыми замкнутыми образами, действующего из метрического пространства в компактное метрическое пространство, замкнутость графика эквивалентна полунепрерывности сверху (см., например [11], с. 133). Это позволяет во многих случаях переформулировать соответствующее требование на F в условии леммы.

Доказательство леммы. Пусть $x_i(\cdot) \to x_\infty(\cdot)$, $z_i(\cdot) \to z_\infty(\cdot)$ в пространстве C^0 при $i \to \infty$, причем $x_i(\cdot) \in \Omega(z_i(\cdot))$ для всех натуральных i. Нужно показать, что

$$x_\infty(\cdot) \in \Omega(z_\infty(\cdot)) \tag{2.9}$$

Сходящиеся последовательности $x_i(\cdot)$, $z_i(\cdot)$ ограничены некоторой величиной: $\|x_i(\cdot)\|_{C^0}$, $\|z_i(\cdot)\|_{C^0} \leq N$. Из наложенных требований вытекает, что $|\dot{x}_i(t)|_n \leq \gamma_N(t)$ для всякого натурального i и почти всякого t. Поэтому

$$|x_i(t_2) - x_i(t_1)|_n \leq \left|\int_{t_1}^{t_2} \gamma_N(\tau) d\tau\right|$$

для всех t_1, $t_2 \in [t_0, \vartheta]$ и натуральных i. Из последнего неравенства видно, что оно выполняется и для предельной функции $x_\infty(\cdot)$. Итак, функция $x_\infty(\cdot)$ абсолютно непрерывна ([12], с. 141, 226) и, следовательно, имеет производную из L_1.

Известно ([13], с. 295, 296), что из поточечной сходимости

$$\int_{t_0}^{(\cdot)} \dot{x}_i(\tau) d\tau \to \int_{t_0}^{(\cdot)} \dot{x}_\infty(\tau) d\tau$$

и ограниченности норм $\|\dot{x}_i(\cdot)\|_{L_1} \leq \|\gamma_N(\cdot)\|_{L_1}$ следует слабая L_1 сходимость $\dot{x}_i(\cdot) \rightharpoonup \dot{x}_\infty(\cdot)$. Согласно теореме Мазура ([14], с. 173) слабый предел последовательности можно аппроксимировать с любой точностью некоторой выпуклой комбинацией подобранного по требуемой точности конечного набора членов последовательности. Очевидно, отбрасывая в слабо сходящейся последовательности конечное число первых членов, снова получим слабо сходящуюся последовательность. Таким образом, по $\dot{x}_i(\cdot)$ можно построить последовательность $y_i(\cdot)$, такую, что $y_i(\cdot) \to \dot{x}_\infty(\cdot)$ в пространстве L_1, причем

$$y_i(t) = \sum_{k=i}^{n_i} p_{ki}\dot{x}_k(t) \tag{2.10}$$

являются выпуклыми комбинациями, т.е.

$$p_{ki} \geq 0, \quad \sum_{k=i}^{n_i} p_{ki} = 1$$

Из сходимости последовательности $y_i(\cdot)$ в пространстве L_1 следует сходимость по мере. Значит, некоторая подпоследовательность сходится почти всюду ([12], с. 96). Для упрощения обозначений договоримся считать, что сама последовательность $y_i(\cdot)$ сходится почти всюду.

Итак, выбрасывая из отрезка счетное семейство множеств меры нуль, получаем следующее. При почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ выполняется равенство (2.10) для всякого натурального i, последовательность $y_i(t)$ сходится к $\dot{x}_\infty(t)$, множество $F(t, x_\infty(\cdot), z_\infty(\cdot))$ выпукло и замкнуто, многозначное отображение

$$C^0 \times C^0 \ni (x(\cdot), z(\cdot)) \mapsto F(t, x(\cdot), z(\cdot)) \subset \mathbf{R}^n$$

полунепрерывно сверху, $\dot{x}_i(t) \in F(t, x_i(\cdot), z_i(\cdot))$ для всех натуральных i.

Фиксируем любое из этих t и некоторое $\varepsilon > 0$. Пусть B_ε – замкнутый шар в $\mathbf{R}^n$ радиуса ε с центром в нуле. В силу полунепрерывности сверху найдется такое $\delta > 0$, что при всех $x(\cdot)$, $z(\cdot)$, для которых $\|x(\cdot) - x_\infty(\cdot)\|_{C^0} < \delta$, $\|z(\cdot) - z_\infty(\cdot)\|_{C^0} < \delta$, имеем

$$F(t, x(\cdot), z(\cdot)) \subset F(t, x_\infty(\cdot), z_\infty(\cdot)) + B_\varepsilon$$

(Отметим, что для некоторых из этих $x(\cdot)$, $z(\cdot)$ множество $F(t, x(\cdot), z(\cdot))$ может оказаться пустым.) Таким образом, для некоторого i_0, если $i \geq i_0$, то имеем

$$\dot{x}_i(t) \in F(t, x_i(\cdot), z_i(\cdot)) \subset F(t, x_\infty(\cdot), z_\infty(\cdot)) + B_\varepsilon$$

Последнее множество выпукло как поточечная сумма двух выпуклых множеств. Вспоминая, что $y_i(t)$ – выпуклая комбинация векторов $\dot{x}_i(t), \ldots, \dot{x}_{n_i}(t)$, получаем следующее: если $i \geq i_0$, то выполняется включение

$$y_i(t) \in F(t, x_\infty(\cdot), z_\infty(\cdot)) + B_\varepsilon$$

Правая часть этого соотношения замкнута как поточечная сумма замкнутого и компактного множеств. И поскольку $y_i(t) \to \dot{x}_\infty(t)$, получаем

$$\dot{x}_\infty(t) \in F(t, x_\infty(\cdot), z_\infty(\cdot)) + B_\varepsilon$$

Здесь первое слагаемое замкнуто, а второе – шар произвольно малого радиуса. Поэтому

$$\dot{x}_\infty(t) \in F(t, x_\infty(\cdot), z_\infty(\cdot))$$

Поскольку t здесь почти любое из $[t_0, \vartheta]$, получаем включение (2.9).

Доказательство теоремы проведем от противного. Пусть заключение теоремы неверно. Тогда для любой функции $y(\cdot) \in C^0$ начальная задача (2.6), (2.7) имеет хотя бы одно решение $x(\cdot) \in M \cap AC$. Через $\Psi(y(\cdot))$ обозначим множество всех абсолютно непрерывных решений начальной задачи (2.6), (2.7), соответствующих данной непрерывной функции $y(\cdot)$. Таким образом, множество $\Psi(y(\cdot)) \cap M$ непусто для всякой функции $y(\cdot) \in C^0$. Кроме того, это множество выпукло в силу линейности системы по фазовому вектору и выпуклости множества M.

Воспользуемся леммой о замкнутом графике, полагая

$$F(t, x(\cdot), z(\cdot)) = A(t, \upsilon(t, z(\cdot)))x(t) + \mathrm{co}\, g(t, P, \upsilon(t, z(\cdot)))$$

Требование о выпуклости и замкнутости множества $F(t, x(\cdot), z(\cdot))$ выполняется. Из условий Каратеодори следует, что при почти всяком фиксированном $t \in [t_0, \vartheta]$ отображения $A(t, \upsilon)$, $g(t, u, \upsilon)$, $\upsilon(t, z(\cdot))$ непрерывны по остальным аргументам. Пользуясь известными свойствами многозначных отображений (см., например [11], с. 137, 138), заключаем, что для этих значений t многозначное отображение $(x(\cdot), z(\cdot)) \mapsto F(t, x(\cdot), z(\cdot))$ полунепрерывно сверху. В силу неравенств (2.1), (2.2) при почти всех t и всех $x(\cdot)$, $z(\cdot)$ векторы из множества $F(t, x(\cdot), z(\cdot)) \subset \mathbf{R}^n$ по норме не превосходят $\eta(t)\, \|x(\cdot)\|_{C^0} + \xi(t)$, и можно положить $\gamma_N(t) = \eta(t)N + \xi(t)$.

Таким образом, все условия леммы выполняются, и поэтому (2.8) имеет замкнутый график, где $\Omega(y(\cdot))$ – множество всех абсолютно непрерывных решений дифференциального включения (2.6). Учитывая непрерывность отображений σ, h в начальных условиях (2.7), видим, что

$$C^0 \ni z(\cdot) \mapsto \Psi(z(\cdot)) \subset C^0$$

тоже имеет замкнутый график. Наконец, пользуясь замкнутостью множества $M \subset C^0$, приходим к выводу о замкнутости графика многозначного отображения

$$C^0 \ni z(\cdot) \mapsto \Psi(z(\cdot)) \cap M \subset C^0$$

Покажем теперь, что множество $\cup_{z(\cdot)}\Psi(z(\cdot))$, где объединение берется по всем функциям $z(\cdot) \in C^0$, имеет компактное замыкание в пространстве C^0.

Действительно, если $x(\cdot) \in \Psi(y(\cdot))$ для некоторой функции $y(\cdot)$, то в силу соотношений (2.6), (2.1), (2.2) при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ имеем

$$|\dot{x}(t)|_n \le \eta(t)|x(t)|_n + \xi(t) \le \chi(t)(1 + |x(t)|_n); \quad \chi(t) = \eta(t) + \xi(t), \quad \chi(\cdot) \in L_1$$

Учитывая соотношения (2.7), (2.3), получаем

$$|x(t)|_n \le K + \left| \int_{\sigma(y(\cdot))}^{t} \chi(\tau)(1 + |x(\tau)|_n)d\tau \right|$$

при всех $t \in [t_0, \vartheta]$. Отсюда следует (см., например [15], с. 219) существование числа $H \ge 0$, такого, что для любых $y(\cdot) \in C^0$, $x(\cdot) \in \Psi(y(\cdot))$, $t \in [t_0, \vartheta]$ выполняется неравенство $|x(t)|_n \le H$. Тогда $|\dot{x}(t)|_n \le \chi(t)(1 + H)$ почти всюду, и для любых t_1, t_2 получаем

$$|x(t_2) - x(t_1)|_n \le (1 + H)\left|\int_{t_1}^{t_2} \chi(\tau)d\tau\right|$$

Из теоремы Арцела – Асколи ([13], с. 48) и свойств интеграла Лебега ([12], с. 141) следует компактность замыкания множества $\cup_{z(\cdot)}\Psi(z(\cdot)) \subset C^0$.

Замкнутая выпуклая оболочка $S = \mathrm{cl}\ \mathrm{co}(M \cap \cup_{z(\cdot)}\Psi(z(\cdot)))$, где $z(\cdot)$ пробегает все пространство C^0, есть непустой выпуклый компакт (см. [13], с. 105, [15], с. 192). Многозначное отображение $z(\cdot) \mapsto \Psi(z(\cdot)) \cap M$ переводит S в себя и имеет непустые выпуклые значения, причем график этого отображения замкнут в смысле нормы банахова пространства C^0. Согласно теореме Какутани ([13], с. 630) существует хотя бы одна неподвижная точка $x(\cdot) \in \Psi(x(\cdot)) \cap M$. Эта функция $x(\cdot)$ является лежащим в множестве M абсолютно непрерывным решением краевой задачи (2.4), (2.5), что невозможно по условию теоремы. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы от противного.

Замечание 7. Если матрица $A(t, \upsilon) = A(t)$, $A(\cdot) \in L_1$ не зависит от υ, то полученную теорему можно распространить на случай многозначных стратегий. Для начальных условий вида $x(t_0) = x_0$ это было сделано ранее ([8], следствие 2).

Замечание 8. В сформулированной выше теореме используются классические движения, т.е. абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие рассматриваемому дифференциальному включению почти всюду. Для случая начальных условий $x(t_0) = x_0$ и позиционных стратегий $\upsilon = \upsilon(t, x(t))$ можно также применить эту теорему к конструктивным движениям ([3], с. 11–19), которые являются равномерными пределами пошаговых движений на измельчающихся сетках. Построения здесь будут аналогичны соответствующим построениям ([8], разд. 2), где матрица $A(t, \upsilon) = A(t)$ не зависела от υ (см. [8], следствие 4).

Замечание 9. В предположении, что соотношения (2.5), (2.7) принимают вид начальных условий $x(t_0) = x_0$, приведенную выше теорему можно получить с помощью предыдущих результатов автора [8]. Этот способ доказательства частного случая теоремы требует использования некоторых понятий алгебраической топологии и опирается в конечном счете на связанную с группами гомологий теорему Эйленберга – Монтгомери о неподвижной точке. Подробное обсуждение соответствующих свойств функционально-дифференциальных включений содержится в [7].

3. Пример конфликтно управляемой системы. Проиллюстрируем доказанную теорему с помощью простой дифференциальной игры.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = a(t)u + (1 - a(t))\upsilon, \quad 0 \le t \le 2; \quad a(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t \le 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

где векторы x, u, υ имеют размерность $n \ge 1$.

Таким образом, уравнение (3.1) при $0 \le t < 1$ имеет вид $\dot{x} = u$, и движение определяется помехой u. При $1 \le t \le 2$ уравнение (3.1) принимает вид $\dot{x} = \upsilon$, и движением управляет уклоняющийся игрок. Должны выполняться геометрические ограничения $|u|_n \le 1$, $|\upsilon|_n \le 1$. Считаем реализации управлений измеримыми функциями аргумента t, а решение – абсолютно непрерывным и удовлетворяющим уравнению (3.1) почти всюду. Задано нулевое начальное условие

$$x(0) = 0 \tag{3.2}$$

В присутствии неизвестной помехи $u = u(t)$ требуется выбором управления υ максимизировать $|x(2)|_n$, где x – решение начальной задачи (3.1), (3.2).

Если функция x – решение задачи (3.1), (3.2), то

$$x(2) = \int_0^1 u\,d\tau + \int_1^2 \upsilon\,d\tau$$

В этой дифференциальной игре невозможно гарантировать уклонение от начала координат с помощью программного управления $\upsilon = \upsilon(t)$, где $\upsilon(\cdot) \in L_1$, и почти всюду $|\upsilon(t)|_n \le 1$. Действительно, достаточно положить

$$u(t) \equiv u = -\int_1^2 \upsilon(\tau)\,d\tau$$

Тогда $|u|_n \le 1$, причем $x(2) = 0$.

С другой стороны, имеется простой способ уклонения, требующий лишь один замер фазового вектора и описываемый разрывным отображением. При $1 \le t \le 2$ положим $\upsilon(t) \equiv |x(1)|_n^{-1} x(1)$, если $x(1) \ne 0$, и возьмем $\upsilon(t) \equiv \upsilon_0$, если $x(1) = 0$. Здесь υ_0 – некоторый фиксированный вектор со свойством $|\upsilon_0|_n = 1$. (Очевидно, при $0 \le t < 1$ выбор $\upsilon(t)$ в единичном шаре $|\upsilon|_n \le 1$ может быть произвольным). Этот метод формирования υ обеспечивает выполнение неравенства $|x(2)|_n \ge 1$. Гарантировать значение $|x(2)|_n$ больше единицы невозможно ни при каком способе управления, поскольку может оказаться, что $x(1) = 0$, а управление υ должно удовлетворять ограничению $|\upsilon|_n \le 1$.

Замечание 10. В соответствии с известными результатами [1, 3] уклонение в рассматриваемой дифференциальной игре может также быть реализовано посредством позиционной стратегии и схем со стремящимся к нулю шагом. Такие построения для другого примера дифференциальной игры подробно изложены ранее ([2], с. 18–21).

Покажем теперь, что в рассматриваемой задаче невозможно обеспечить уклонение от начала координат с помощью непрерывных по фазовому вектору способов управления. Проверим, что можно воспользоваться теоремой из разд. 2. Положим

$$t_0 = 0, \quad \vartheta = 2, \quad p = q = n$$

В качестве $P = Q$ возьмем замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле в пространстве $\mathbf{R}^n$. Пусть

$$g(t, u, \upsilon) = a(t)u + (1 - a(t))\upsilon, \quad \xi \equiv 1, \quad A \equiv 0, \quad \eta \equiv 0, \quad \sigma \equiv 0, \quad h \equiv 0, \quad K = 0$$

Неравенства (2.1)–(2.3) выполняются. Множество всех точек разрыва $g(t, u, \upsilon)$ описывается соотношениями $t = 1$, $u \ne \upsilon$. Функция g удовлетворяет условиям Каратеодори. Полагаем, что множество M состоит из всех непрерывных $z : [0, 2] \to \mathbf{R}^n$ таких, что $z(2) = 0$. Отметим, что M выпукло и замкнуто в пространстве C^0. Будем считать, что отображение $\upsilon(t, z(\cdot))$, где t – число, $z(\cdot)$ – непрерывная функция, удовлетворяет условиям Каратеодори и принимает значения в шаре Q.

Дифференциальное включение (2.6) принимает вид

$$\dot{x}(t) \in a(t)P + (1 - a(t))\upsilon(t, y(\cdot)) \tag{3.3}$$

Выше было проверено, что в рассматриваемой задаче невозможно гарантировать уклонение от нуля с помощью программных управлений. Таким образом, начальная задача (3.3), (3.2) имеет решение $x(\cdot) \in M \cap AC$ при любом допустимом выборе отображения υ и функции $y(\cdot)$. Заключение теоремы из разд. 2 не выполняется. Поэтому не выполняется и условие теоремы, т.е. функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in a(t)P + (1 - a(t))\upsilon(t, x(\cdot))$$

вместе с нулевым начальным условием (3.2) для любой каратеодориевой стратегии υ имеет решение $x(\cdot) \in M \cap AC$.

Итак, установлено, что в рассматриваемой задаче стратегии $\upsilon : [0, 2] \times C^0 \to Q$, удовлетворяющие условиям Каратеодори, не могут гарантировать уклонение от начала координат. Эти стратегии $\upsilon = \upsilon(t, x(\cdot))$ зависят от $x(\cdot)$ как от функции, заданной на всем отрезке [0, 2]. Похожие законы управления встречаются, например, в задачах, связанных с управлением нагреванием стержня по принципу обратной связи [9], где независимая переменная имеет смысл координаты точки на стержне.

Класс каратеодориевых законов управления $\upsilon = \upsilon(t, x(\cdot))$, $\upsilon : [0, 2] \times C^0 \to Q$ содержит, в частности, стратегии с памятью, которые выделяются требованием неупреждаемости (или физической осуществимости). Его нужно налагать, если независимая переменная t – время. Это требование исключает из рассмотрения законы управления, использующие информацию о развитии процесса в будущем.

Сформулируем требование неупреждаемости. Если функции $x(\cdot), z(\cdot) \in C^0$ и число $t \in [t_0, \vartheta]$ таковы, что $x(\tau) = z(\tau)$ для всех $\tau \in [t_0, t]$, то выполняется равенство $\upsilon(\tau, x(\cdot)) = \upsilon(\tau, z(\cdot))$ при почти всех $\tau \in [t_0, t]$.

Следует также отметить, что рассматриваемый класс содержит, в частности, позиционные стратегии $\upsilon = \upsilon(t, x(t))$, где функция $\upsilon : [0, 2] \times \mathbf{R}^n \to Q$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Таким образом, каратеодориевы позиционные стратегии тоже не позволяют гарантировать уклонение в исследуемой задаче.

Замечание 11. Если ограничиться стратегиями без последействия, то можно рассматривать данную игру на меньшем отрезке $1 \le t \le 2$, считая, что действие помехи состоит в выборе начальной позиции $x(1)$, удовлетворяющей условию $|x(1)|_n \le 1$. Интересно сопоставить это с тем обстоятельством, что именно при $t = 1$ осуществляется замер фазового вектора в описанном выше способе уклонения.

Замечание 12. К особенностям разобранного простого примера относится наличие отклонения аргумента в стратегиях и разрывность коэффициентов уравнения (3.1), что затрудняет исследование стандартными методами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00228).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. N. Y.: Springer, 1988. 518p.
4. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. Boston: Birkhäuser, 1995. 322p.
5. *Барабанова Н.Н., Субботин А.И.* О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 796–803.
6. *Красовский Н.Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. 1978. Т. 107. № 4. С. 541–571.
7. *Брыкалов С.А.* Конфликтно управляемые системы и дифференциальные включения // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 3. С. 298–304.
8. *Брыкалов С.А.* Непрерывные стратегии в дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 453–459.
9. *Brykalov S.A.* The existence of temperature distributions close to a prescribed one in some control systems // Probl. Control Inform. Theory. 1990. V. 19. № 4. P. 279–288.
10. *Rockafellar R.T.* Convex Analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970 = *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469с.
11. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Многозначные отображения // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 127–230.
12. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742с.
14. *Yosida K.* Functional Analysis. Berlin: Springer, 1965 = *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624с.
15. *Warga J.* Optimal Control of Differential and Functional Equations. N. Y.: Acad. Press, 1972 = = *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623с.

Екатеринбург
e-mail: brykalov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
15.VII.2003