УДК 62-50

© 2004 г. Н. Ю. Лукоянов

СТРАТЕГИИ ПРИЦЕЛИВАНИЯ В НАПРАВЛЕНИИ ИНВАРИАНТНЫХ ГРАДИЕНТОВ

Для задач управления наследственными динамическими системами в условиях помех приведена конструкция построения стратегий управления при помощи экстремального прицеливания в направлении коинвариантных градиентов вспомогательных функционалов типа Ляпунова–Красовского. При достаточно общих предположениях доказано, что такие стратегии доставляют оптимальный гарантированный результат.

Метод экстремального прицеливания (ЭП) или сдвига в задачах позиционного управления, восходящий к работам Н.Н. Красовского (см., например, [1–5]), получил широкое развитие в современной теории управляемых процессов и теории дифференциальных игр. Подходящие конструкции ЭП используются в разных задачах для доказательства существования оптимальных решений и эффективного построения разрешающих законов управления по принципу обратной связи [4–7]. ЭП применяется в процедурах управления с поводырем [3, 4], стабилизирующих оптимальное движение, в динамических методах решения обратных задач динамики [8].

Данная работа продолжает исследования [6, 9–12] задач управления с наследственной информацией, развивая для них конструкцию ЭП в направлении квазиградиентов, которая была предложена ранее [13, 14] для задач управления обыкновенными дифференциальными системами. Формализация задачи выполняется в рамках теоретико-игрового подхода [4, 5] в сочетании с функциональной трактовкой процесса управления, близкой к указанной ранее [9, 15]. Используются элементы инвариантного дифференциального исчисления [16], негладкого анализа [17] и результаты [10, 12, 18] по развитию для наследственных систем теории обобщенных (минимаксных, вязкостных) решений уравнений типа Гамильтона–Якоби [19, 20]. В частных случаях подобная конструкция рассматривалась в работах автора [11, 12]. Ниже дается существенное уточнение и обобщение результатов этих работ.

1. Основные предположения. Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением вида

$$\begin{gathered}\dot{x}[t] = f(t, x[t_*[\cdot]t], u[t], \upsilon[t]), \quad t_* \le t_0 \le t \le T \\ x[t] \in R^n, \quad u[t] \in P \subset R^k, \quad \upsilon[t] \in Q \subset R^m\end{gathered} \tag{1.1}$$

при начальном условии

$$x[t_*[\cdot]t_0] = x_0[t_*[\cdot]t_0] \in C([t_*, t_0], R^n) \tag{1.2}$$

Здесь t – временная переменная, $x[t]$ и $\dot{x}[t] = dx[t]/dt$ – значение фазового вектора и скорость его изменения в текущий момент времени t, $x[t_*[\cdot]t] = \{x[\tau], t_* \le \tau \le t\}$ – история движения, сложившаяся к моменту t, $u[t]$ – текущее воздействие управления, $\upsilon[t]$ – воздействие неконтролируемой помехи, P и Q – известные компакты, t_* и T ($t_* < T$) – известные моменты времени, t_0 – момент начала процесса управления, $x_0[t_*[\cdot]t_0]$ – начальная история. Допустимы измеримые реализации управления и помехи $u[\cdot]$: $[t_0, T) \mapsto P$ и $\upsilon[\cdot]$:$[t_0, T) \mapsto Q$. Движением системы (1.1) при начальном условии (1.2) является функция $x[\cdot] \in C([t_*, T], R^n)$, совпадающая с $x_0[t_*[\cdot]t_0]$ на $[t_*, t_0]$, абсолютно непрерывная на $[t_0, T]$ и при почти всех $t \in [t_0, T]$ удовлетворяющая уравнению (1.1). При этом история движения $x[t_*[\cdot]t]$ – сужение этой функции на $[t_*, t]$. Тройку $\{x[\cdot], u[\cdot], \upsilon[\cdot]\}$ будем называть реализацией рассматриваемого процесса управления.

Пусть качество процесса управления оценивается показателем

$$\gamma = \gamma(\{x[\cdot], u[\cdot], \upsilon[\cdot]\}) = \sigma(x[\cdot]) - \int_{t_0}^{T} h(t, x[t_*[\cdot]t], u[t], \upsilon[t])dt \tag{1.3}$$

Цель управления – доставить этому показателю как можно меньшее значение. При этом следует принять во внимание, что действия помехи непредсказуемы и могут быть самыми неблагоприятными.

В соотношениях (1.1) и (1.2) предполагаем, что функция $f = f(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon) \in R^n$ и функционал $h = h(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon) \in R$ определены при всех $t \in [t_*, T]$, $x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n)$, $u \in P$ и $\upsilon \in Q$, непрерывны по совокупности переменных $x[t_*[\cdot]t]$, u и υ при любом фиксированном значении t и для любой фиксированной функции $x[\cdot] \in C([t_*, T], R^n)$ непрерывны по совокупности переменных t, u и υ, причем для любого компакта $D \subset C([t_*, T], R^n)$ равностепенно относительно $x[\cdot] \in D$. Выполняется оценка

$$\|f(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon)\|^2 + h^2(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon) \le L^2(t, x[t_*[\cdot]t]) \tag{1.4}$$

где

$$L(t, x[t_*[\cdot]t]) = \left(1 + \max_{t_* \le \tau \le t} \|x[\tau]\|\right)c, \quad c = \mathrm{const} > 0$$

и для любого $s \in R^n$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\min_{u \in P}\max_{\upsilon \in Q}[\langle s, f(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon)\rangle - h(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon)] = \\ &= \max_{\upsilon \in Q}\min_{u \in P}[\langle s, f(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon)\rangle - h(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon)] = H(t, x[t_*[\cdot]t], s) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Величину H, определяемую этим равенством, называют гамильтонианом системы (1.1), (1.3). Здесь и ниже символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ – скалярное произведение векторов.

Относительно функционала $\sigma = \sigma(x[\cdot])$ предполагаем, что он определен и непрерывен на $C([t_*, T], R^n)$.

Символом $\mathrm{Lip}(t, x[t_*[\cdot]t])$ будем обозначать множество функций $y[\cdot] \in C([t_*, T], R^n)$, каждая из которых совпадает с $x[t_*[\cdot]t]$ на $[t_*, t]$ и является липшицевой на $[t, T]$. Символом $X^M(t, x[t_*[\cdot]t])$ обозначим множество функций $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}(t, x[t_*[\cdot]t])$, которые при почти всех $\tau \in [t, T]$ удовлетворяют дифференциальному неравенству

$$\|\dot{y}[\tau]\| \le L(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) + cM$$

В силу оценки (1.4) для любой возможной реализации $\{x[\cdot], u[\cdot], \upsilon[\cdot]\}$ процесса управления (1.1)–(1.3) будет справедливо включение

$$x[\cdot] \in X^M(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]), \quad M \ge 0 \tag{1.6}$$

2. Стратегии управления и функционал оптимального гарантированного результата. Стратегию управления отождествим с произвольной функцией

$$U = U(t, x[t_*[\cdot]t]) \in P$$

Процесс управления на базе стратегии U осуществляется в дискретной по времени схеме. Выбирается разбиение отрезка времени $[t_0, T]$

$$\Delta = \{t_i : t_1 = t_0, t_{i+1} > t_i, i = 1, \ldots, N, t_{N+1} = T\}$$

и последовательно по шагам этого разбиения в цепи обратной связи формируется реализация управления

$$u[t] = U(t_i, x[t_*[\cdot]t_i]), \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.1}$$

Символом $S(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0], U, \Delta)$ обозначим множество всех возможных реализаций рассматриваемого процесса управления, отвечающих выбранным стратегии U и разбиению Δ. Именно это множество состоит из троек $\{x[\cdot], u[\cdot], \upsilon[\cdot]\}$ таких, что $\upsilon[\cdot]:[t_0, T) \mapsto Q$ – измеримая функция, $u[\cdot]$ – кусочно постоянная функция вида (2.1), $x[\cdot]:[t_*, T] \mapsto R^n$ – удовлетворяющая условию (1.2) непрерывная функция, которая на $[t_0, T]$ абсолютно непрерывна и почти всюду вместе с $u[\cdot]$, $\upsilon[\cdot]$ удовлетворяет уравнению (1.1). При сделанных предположениях множество $S(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0], U, \Delta)$ непусто.

Следуя принципу гарантированного результата, определим величину

$$\Gamma(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0], U, \Delta) = \sup\gamma(S(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0], U, \Delta)) \tag{2.2}$$

Здесь и далее используем обозначение $\sup\rho(A) = \sup\rho(a)$ при $a \in A$.

Оптимальным гарантированным результатом (ОГР) управления будет

$$\varphi(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]) = \inf_{U, \Delta}\Gamma(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0], U, \Delta) \tag{2.3}$$

В согласии с равенством (2.3) стратегия U° оптимальна, если для любого числа $\zeta > 0$ найдется разбиение Δ такое, что

$$\Gamma(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0], U^\circ, \Delta) \le \varphi(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]) + \zeta \tag{2.4}$$

Также будем рассматривать так называемые ε-стратегии

$$U_\varepsilon = U_\varepsilon(t, x[t_*[\cdot]t]) \in P$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр точности (см. [5], с. 68), выбираемый до начала процесса управления. Оптимальной будет ε-стратегия U_ε°, при которой для любого $\zeta > 0$ найдутся $\varepsilon > 0$ и Δ такие, что будет выполняться неравенство (2.4) (где вместо U° записываем U_ε°).

Величина ОГР зависит от начальной позиции $\{t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]\}$. Следовательно, можно определить следующий функционал ОГР:

$$\{t \in [t_*, T], x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n)\} \mapsto \varphi = \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) \in R \tag{2.5}$$

При $t = T$ этот функционал удовлетворяет условию

$$\varphi(T, x[t_*[\cdot]T]) = \sigma(x[\cdot]), \quad x[t_*[\cdot]T] = x[\cdot] \in C([t_*, T], R^n) \tag{2.6}$$

Его нижнее замыкание

$$\bar{\varphi}(t, x[t_*[\cdot]t]) = \liminf_{\delta \downarrow 0}\left\{\varphi(t, y[t_*[\cdot]t]) \,\Big|\, \max_{t_* \le \tau \le t}\|x[\tau] - y[\tau]\| \le \delta\right\} \tag{2.7}$$

обладает свойством, именуемым в теории дифференциальных игр u-стабильностью [4–6]. В рассматриваемом случае это свойство можно выразить следующим образом [12, 18].

Свойство A. Для любых $\tau_* \in [t_*, T)$, $y_*[t_*[\cdot]\tau_*] \in C([t_*, \tau_*], R^n)$ и $M \geq 0$, $s \in R^n$ существует функция $(y[\cdot], z[\cdot]) \in C([t_*, T], R^n \times R)$, абсолютно непрерывная на $[\tau_*, T]$ и такая, что

$$y[\cdot] \in X^M(\tau_*, y_*[t_*[\cdot]\tau_*]), \quad z[\tau_*] = \bar{\varphi}(\tau_*, y_*[t_*[\cdot]\tau_*]) \tag{2.8}$$

$$\dot{z}[t] = \langle \dot{y}[t], s\rangle - H(t, y[t_*[\cdot]t], s) \text{ п.в. } t \in [\tau_*, T] \tag{2.9}$$

$$z[t] = \bar{\varphi}(t, y[t_*[\cdot]t]), \quad t \in [\tau_*, T] \tag{2.10}$$

3. Вспомогательные определения. Для функционалов вида

$$\{t \in [t_*, T], w[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n)\} \mapsto \rho = \rho(t, w[t_*[\cdot]t]) \in R \tag{3.1}$$

введем следующие определения.

Определение 1. Функционал (3.1) назовем $[t', t'')$-непрерывным (соответственно $[t', t'']$-непрерывным), где $[t', t''] \subseteq [t_*, T]$, если, во-первых, он непрерывен по $w[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n)$ для любого фиксированного $t \in [t', t'')$ ($t \in [t', t'']$) и, во-вторых, он непрерывен по t на $[t', t'')$ (соответственно на $[t', t'']$) вдоль любой фиксированной функции $w[\cdot] \in C([t_*, T], R^n)$, причем для любого компакта $D \subset C([t_*, T], R^n)$ равностепенно относительно $w[\cdot] \in D$. Функционал ρ является непрерывным, если он $[t_*, T]$-непрерывен.

Определение 2. Функционал (3.1) назовем кусочно-непрерывным, если существует конечное число q точек разрыва $t_j \in [t_*, T]$ ($t_1 = t_*$, $t_q = T$), таких, что он $[t_j, t_{j+1})$-непрерывен для любого $j = 1, \ldots, q-1$.

Определение 3. Функционал (3.1) является коинвариантно (*ci*-) дифференцируемым, если для любых $t \in [t_*, T)$ и $w[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n)$ существуют $\partial_t\rho = \partial_t\rho(t, w[t_*[\cdot]t]) \in R$ и $\nabla\rho = \nabla\rho(t, w[t_*[\cdot]t]) \in R^n$, такие, что при всех $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}(t, w[t_*[\cdot]t])$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\rho(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]) - \rho(t, w[t_*[\cdot]t]) = \\ &= \partial_t\rho\delta + \langle \nabla\rho, y[t+\delta] - w[t]\rangle + o_{y[\cdot]}(\delta), \quad 0 < \delta \leq T - t \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $o_{y[\cdot]}(\delta)$ зависит от выбора $y[\cdot]$, $o_{y[\cdot]}(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to 0+$.

Величины $\partial_t\rho$ и $\nabla\rho = \{\nabla_1\rho, \ldots, \nabla_n\rho\}$ называют соответственно ci-производной по t и ci-градиентом функционала ρ. Будем говорить, что функционал ρ является $[t', t'']$-ci-гладким ($[t', t''] \subseteq [t_*, T]$), если он $[t', t'']$-непрерывен, ci-дифференцируем и его ci-производная $\partial_t\rho$ и компоненты $\nabla_k\rho$, $k = 1, \ldots, n$ его ci-градиента $\nabla\rho$ представляют собою $[t', t'')$-непрерывные функционалы. Функционал ρ называем ci-гладким, если он $[t_*, T]$-ci-гладкий. Подробности техники инвариантного дифференциального исчисления функционалов изложены, например, в [16].

4. Случай ci-гладкого функционала ОГР. Если функционал φ ОГР является ci-гладким, то для его полной производной в силу системы (1.1) (вдоль движений этой системы) имеет место формула

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) = \partial_t\varphi + \langle \nabla\varphi, f(t, x[t_*[\cdot]t], u[t], \upsilon[t])\rangle \text{ п.в. } t \in [t_0, T] \tag{4.1}$$

Согласно изложенному ранее [18], для ci-гладкого функционала φ условие u-стабильности (свойство A) обращается в дифференциальное неравенство

$$\partial_t\varphi + H(t, x[t_*[\cdot]t], \nabla\varphi) \leq 0, \quad t \in [t_*, T), \quad x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n) \tag{4.2}$$

Здесь $\partial_t\varphi = \partial_t\varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$ и $\nabla\varphi = \nabla\varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$ – ci-производная по t и ci-градиент функционала φ.

Таким образом, повторяя с учетом соотношений (4.1), (4.2) для рассматриваемой задачи рассуждения (см., например, [5], с. 132), используемые при проведении гладких оценок гарантированного результата, получаем [12], что в случаях, когда функционал φ ОГР оказывается ci-гладким, оптимальную стратегию U° можно построить прицеливанием в направление его ci-градиента $\nabla\varphi$:

$$U^\circ(t, x[t_*[\cdot]t]) = p(t, x[t_*[\cdot]t], s^\circ), \quad s^\circ = \nabla\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) \tag{4.3}$$

где

$$p(t, x[t_*[\cdot]t], s) \in \arg\min_{u\in P}\{\max_{\upsilon\in Q}[\langle s, f(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon)\rangle - h(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon)]\} \tag{4.4}$$

Пример 1. Пусть динамика системы описывается уравнением

$$\begin{gathered}\dot{x}[t] = A(t)x[t] + \int_0^t K(t, \xi)x[\xi]d\xi + u[t] - \upsilon[t], \quad t_* = 0 \le t_0 \le t \le T \\ x[t] \in R^n, \quad u[t], \upsilon[t] \in R^n : \|u[t]\| \le 1, \quad \|\upsilon[t]\| \le 1\end{gathered} \tag{4.5}$$

а показатель качества процесса управления имеет вид

$$\gamma = \|x[T]\|^2 - \int_{t_0}^T (\|\upsilon[t]\|^2 - \|u(t)\|^2)dt \tag{4.6}$$

Здесь $A(t)$ и $K(t, \xi)$ – непрерывные $(n \times n)$-матрицы-функции. Согласно равенству (1.5) гамильтониан системы (4.5), (4.6) определяется равенством

$$H(t, x[0[\cdot]t], s) = \left\langle A(t)x[t] + \int_0^t K(t, \xi)x[\xi]d\xi, s\right\rangle \tag{4.7}$$

Через $\Psi(\tau, t)$ обозначим $(n \times n)$-матрицу-функцию, такую, что $\Psi(\tau, t) = 0$ при $\tau < t$, $\Psi(t, t)$ – единичная матрица тождественного преобразования,

$$d\Psi(\tau, t)/dt = -\Psi(\tau, t)A(t) - \int_t^\tau \Psi(\tau, \xi)K(\xi, t)d\xi \quad \text{при} \quad \tau > t \tag{4.8}$$

Положим

$$\omega(t, x[0[\cdot]t]) = \Psi(T, t)x[t] + \int_0^t\int_t^T \Psi(T, \xi)K(\xi, \eta)x[\eta]d\xi d\eta \tag{4.9}$$

Тогда для любой возможной реализации $\{x[\cdot], u[\cdot], \upsilon[\cdot]\}$ процесса управления системой (4.5) будет справедливо равенство

$$x[T] = \omega(t, x[0[\cdot]t]) + \int_t^T \Psi(T, \eta)(u[\eta] - \upsilon[\eta])d\eta \tag{4.10}$$

Поскольку всегда можно столкнуться с ситуацией $\upsilon[\cdot] = u[\cdot]$, из соотношений (4.6), (4.10) выводим, что здесь нельзя гарантировать ничего лучшего, чем

$$\varphi(t, x[0[\cdot]t]) = \|\omega(t, x[0[\cdot]t])\|^2 \tag{4.11}$$

В силу соотношений (4.8), (4.9) функционал (4.11) является ci-гладким, при этом

$$\partial_t\varphi = -\left\langle A(t)x[t] + \int_0^t K(t, \xi)x[\xi]d\xi, \nabla\varphi\right\rangle, \quad \nabla\varphi = 2\Psi^{\mathsf{T}}(T, t)\omega(t, x[0[\cdot]t]) \tag{4.12}$$

(верхний индекс $\top$ означает транспонирование). Из соотношений (4.7), (4.12) видно, что функционал (4.11) удовлетворяет неравенству (4.2). Таким образом, в рассматриваемом случае можно построить стратегию (4.3):

$$U^\circ(t, x[0[\cdot]t]) = \begin{cases} -\nabla\varphi/2, & \text{если} \quad \|\nabla\varphi\| \le 2 \\ -\nabla\varphi/\|\nabla\varphi\| & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Для любой начальной позиции $\{t_0 \in [0, T), x_0[0[\cdot]t_0] \in C([0, t_0], R^n)\}$ и любого числа $\zeta > 0$ управление системой (4.5) на базе указанной стратегии U° позволяет обеспечить показателю (4.6) значение

$$\gamma \le \|\omega(t_0, x_0[0[\cdot]t_0])\|^2 + \zeta$$

какова бы ни была допустимая реализация помехи $\upsilon[\cdot]$. С другой стороны, не существует стратегии U, которая позволяла бы гарантировать в этой задаче лучший результат.

5. Общий случай. В общем случае функционал φ ОГР не обладает подходящими свойствами гладкости. Его ci-производные существуют не во всех точках $\{t, x[t_*[\cdot]t]\}$, и воспользоваться формулой (4.3) для построения оптимальной стратегии управления не представляется возможным. Однако, следуя методу, предложенному [13, 14] для задач управления обыкновенными дифференциальными системами, в достаточно общем случае можно построить оптимальную ε-стратегию, заменив в (4.3) ci-градиент $\nabla\varphi$ (который может не существовать) на подходящий градиент заведомо ci-гладкого вспомогательного функционала типа Ляпунова–Красовского.

Итак, пусть D_0 – компакт из $C([t_*, t_0], R^n)$, такой, что

$$x_0[t_*[\cdot]t_0] \in D_0 \tag{5.1}$$

Зафиксировав $M \ge 0$, обозначим

$$X_0 = \{y[\cdot] \in X^M(t_0, x[t_*[\cdot]t_0]) | x[t_*[\cdot]t_0] \in D_0\} \tag{5.2}$$

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$\{t \in [t_*, T], w[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n)\} \mapsto \nu_\varepsilon = \nu_\varepsilon(t, w[t_*[\cdot]t]) \in R, \quad \varepsilon > 0$$

Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

а) функционал ν_ε является неотрицательным, непрерывным и ci-дифференцируемым, ci-производная $\partial_t\nu_\varepsilon$ и компоненты ci-градиента $\nabla\nu_\varepsilon$ этого функционала кусочно-непрерывны (см. определения 1–3);

б) имеет место оценка $\nu_\varepsilon(t, w[t_*[\cdot]t] \equiv 0) \le \varepsilon$;

в) для любых чисел $L > 0$ и $\mu > 0$ существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любых $x[\cdot], y[\cdot] \in X_0$ неравенство $\nu_\varepsilon(T, w[t_*[\cdot]T]) < L$, где $w[\cdot] = x[\cdot] - y[\cdot]$, влечет неравенство $|\sigma(x[\cdot]) - \sigma(y[\cdot])| < \mu$;

г) для любых $t \in [t_*, T]$ и $x[\cdot], y[\cdot] \in X_0$ справедливо неравенство

$$\partial_t\nu_\varepsilon + H(t, x[t_*[\cdot]t], \nabla\nu_\varepsilon) - H(t, y[t_*[\cdot]t], \nabla\nu_\varepsilon) \le 0 \tag{5.3}$$

где

$$\partial_t\nu_\varepsilon = \partial_t\nu_\varepsilon(t, w[t_*[\cdot]t]), \quad \nabla\nu_\varepsilon = \nabla\nu_\varepsilon(t, w[t_*[\cdot]t]), \quad w[\cdot] = x[\cdot] - y[\cdot]$$

Требование существования функционала ν_ε со свойствами *а*–*г* накладывает дополнительное ограничение на рассматриваемую динамическую систему. Тем не менее класс систем, удовлетворяющих этому требованию, достаточно широк.

Например [11, 12], пусть определенный равенством (1.5) гамильтониан системы (1.1), (1.3) удовлетворяет следующему условию Липшица: существует $\lambda > 1$ такое, что для любых $t \in [t_*, T]$, $s \in R^n$ и $x[\cdot], y[\cdot] \in X_0$ справедливо неравенство

$$|H(t, x[t_*[\cdot]t], s) - H(t, y[t_*[\cdot]t], s)| \le \lambda(1 + \|s\|)\left(\int_{t_*}^{t} \|w[\tau]\|^2 d\tau + \|w[t]\|^2\right)^{1/2} \tag{5.4}$$

где по-прежнему $w[\cdot] = x[\cdot] - y[\cdot]$. Тогда всегда можно взять

$$\nu_\varepsilon = \alpha_\varepsilon(t)\beta_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \exp\{-2\lambda(T - t_*)\} \tag{5.5}$$

где

$$\alpha_\varepsilon(t) = (\exp\{-2\lambda(t - t_*)\} - \varepsilon)/\varepsilon, \quad \beta_\varepsilon = \left(\varepsilon^4 + 2\lambda \int_{t_*}^{t} \|w[\tau]\|^2 d\tau + \|w[t]\|^2\right)^{1/2}$$

Данный функционал ν_ε является ci-гладким, так что он удовлетворяет условию *а*. Его ci-производные определяются равенствами

$$\partial_t \nu_\varepsilon = -2\lambda \exp\{-2\lambda(t - t_*)\}\beta_\varepsilon/\varepsilon + \lambda\alpha_\varepsilon(t)\|w[t]\|^2/\beta_\varepsilon, \quad \nabla\nu_\varepsilon = \alpha_\varepsilon(t) w[t]/\beta_\varepsilon \tag{5.6}$$

Из соотношений (5.4), (5.6) вытекает, что функционал (5.5) удовлетворяет условию *г*. Можно непосредственно проверить, что он также удовлетворяет условиям *б* и *в*.

В качестве другого примера выбора вспомогательного функционала ν_ε рассмотрим случай, когда $t_* = -\vartheta$, $\vartheta = \text{const} > 0$, $t_0 \geq 0$ и

$$f(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon) = A(t)x[t] + A_\vartheta(t)x[t - \vartheta] + f(t, u, \upsilon), \quad h(t, x[t_*[\cdot]t], u, \upsilon) = h(t, u, \upsilon)$$

В данном случае можно взять

$$\nu_\varepsilon = (2\varepsilon)^{-1}\left(\int_{t_*}^{t} \|w[\tau]\|^2 d\tau + \int_{t}^{T} \|\omega(\tau|t, w[t_*[\cdot]t])\|^2 d\tau\right) \tag{5.7}$$

где

$$\omega(\tau|t, w[t_*[\cdot]t]) = \Phi(\tau, t)w[t] + \int_{t}^{t+\vartheta} \Phi(\tau, \xi)A_\vartheta(\xi)w[\xi - \vartheta]d\xi$$

Здесь $\Phi(\tau, t)$ – $(n \times n)$-матрица-функция такая, что $\Phi(\tau, t) = 0$ при $\tau < t$, $\Phi(t, t)$ – единичная матрица и

$$d\Phi(\tau, t)/dt = -\Phi(\tau, t)A(t) - \Phi(\tau, t + \vartheta)A_\vartheta(t + \vartheta) \quad \text{при} \quad \tau > t$$

Функционал (5.7) является ci-гладким, при этом

$$\partial_t \nu_\varepsilon = -\langle A(t)w[t] + A_\vartheta(t)w[t - \vartheta], \nabla\nu_\varepsilon\rangle$$

$$\nabla\nu_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\int_{t}^{T} \Phi^{\mathrm{T}}(\tau, t)\omega(\tau|t, w[t_*[\cdot]t])d\tau$$

Отсюда, учитывая, что в рассматриваемом случае гамильтониан H имеет вид

$$H(t, x[t_*[\cdot]t], s) = \langle A(t)x[t] + A_\vartheta(t)x[t - \vartheta], s\rangle + \min_{u \in P}\max_{\upsilon \in Q}[\langle s, f(t, u, \upsilon)\rangle - h(t, u, \upsilon)]$$

получаем, что для такого функционала будут выполняться условия *а* и *г*. Так как, согласно выражению (5.7),

$$\nu_\varepsilon(t, w[t_*[\cdot]t] \equiv 0) = 0, \quad \nu_\varepsilon(T, w[t_*[\cdot]T]) = (2\varepsilon)^{-1}\int_{t_*}^{T} \|w[\tau]\|^2 d\tau$$

то также будут выполняться условия *б* и *в*.

Отметим, что в конкретных задачах подходящий выбор вспомогательного функционала ν_ε позволяет существенно упростить построение рассматриваемой ниже экстремальной ε-стратегии.

Опираясь на вспомогательный функционал ν_ε, рассмотрим следующее преобразование нижнего замыкания (2.7) функционала (2.5) ОГР :

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(t, x[t_*[\cdot]t]) = \min_{y[\cdot] \in X_0} [\bar{\varphi}(t, y[t_*[\cdot]t]) + \nu_\varepsilon(t, w[t_*[\cdot]t])] \tag{5.8}$$

где

$$w[t_*[\cdot]t] = \{w[\tau] = x[\tau] - y[\tau],\ t_* \le \tau \le t\}$$

Множество X_0 компактно в $C([t_*, T], R^n)$, функционал $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t, y[t_*[\cdot]t])$ полунепрерывен снизу по $y[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n)$ для любого фиксированного $t \in [t_*, T]$, так что минимум в (5.8) действительно достигается. Пусть $y^e[\cdot] \in X_0$ – минимизирующая в (5.8) функция. Она зависит от позиции $\{t, x[t_*[\cdot]t]\}$ и параметра $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$w^e[t_*[\cdot]t] = \{w^e[\tau] = x[\tau] - y^e[\tau], t_* \le \tau \le t\}$$

Экстремальную ε-стратегию U_ε^e определим прицеливанием в направлении ci-градиента $\nabla\nu_\varepsilon(t, w^e[t_*[\cdot]t])$:

$$U_\varepsilon^e(t, x[t_*[\cdot]t]) = p(t, x[t_*[\cdot]t], s^e), \quad s^e = \nabla\nu_\varepsilon(t, w^e[t_*[\cdot]t]) \tag{5.9}$$

Здесь функция $p(t, x[t_*[\cdot]t], s)$ удовлетворяет включению (4.4).

Теорема 1. Для любого числа $\zeta > 0$ существуют число $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ отрезка времени $[t_0, T]$ такие, что для всякой начальной позиции $\{t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]\}$, удовлетворяющей условию (5.1), будет выполняться неравенство

$$\Gamma(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0], U_\varepsilon^e, \Delta) \le \bar{\varphi}(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]) + \zeta \tag{5.10}$$

Доказательство. В силу условия *б* для всех $t \in [t_*, T]$ и $x[\cdot] \in X_0$, согласно равенствам (5.8), имеем

$$\varphi_\varepsilon(t, x[t_*[\cdot]t]) \le \bar{\varphi}(t, x[t_*[\cdot]t]) + \varepsilon \tag{5.11}$$

Обозначим

$$K = \max|\sigma(X_0)| < \infty$$

Тогда, если учесть соотношения (2.6), (2.7), при $t = T$ из неравенства (5.11) следует, что

$$\varphi_\varepsilon(T, x[t_*[\cdot]T]) \le K + \varepsilon$$

С другой стороны,

$$\varphi_\varepsilon(T, x[t_*[\cdot]T]) = \sigma(y^e[\cdot]) + \nu_\varepsilon(T, w^e[t_*[\cdot]T]) \ge -K + \nu_\varepsilon(T, w^e[t_*[\cdot]T])$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\nu_\varepsilon(T, w^e[t_*[\cdot]T]) \le 2K + \varepsilon$$

в силу которого, учитывая неотрицательность функционала ν_ε и условие *в*, выводим оценку

$$\varphi_\varepsilon(T, x[t_*[\cdot]T]) \ge \sigma(y^e[\cdot]) \ge \sigma(x[\cdot]) - \mu(\varepsilon), \quad x[\cdot] \in X_0 \tag{5.12}$$

где $\mu(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Теперь достаточно показать, что для любой из возможных реализаций

$$\{x[\cdot], u[\cdot], \upsilon[\cdot]\} \in S(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0], U^{\mathrm{e}}_{\varepsilon}, \Delta) \tag{5.13}$$

будут выполняться неравенства

$$\begin{gathered}\varphi_{\varepsilon}(t_{i+1}, x[t_*[\cdot]t_{i+1}]) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(t, x[t_*[\cdot]t], u[t], \upsilon[t])dt \le \\ \le \varphi_{\varepsilon}(t_i, x[t_*[\cdot]t_i]) + \eta(\delta)(t_{i+1} - t_i), \quad i = 1, \ldots, N; \quad \delta = \max_{i = 1, \ldots, N}(t_{i+1} - t_i)\end{gathered} \tag{5.14}$$

Здесь Δ – разбиение отрезка времени $[t_0, T]$, в которое включены все точки t_j возможных разрывов ci-производной $\partial_t \nu_{\varepsilon}$ и компонент ci-градиента $\nabla \nu_{\varepsilon}$ вспомогательного функционала ν_{ε}, t_i – точки этого разбиения, δ – его диаметр, $\eta(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

В самом деле, в силу неравенств (5.14) имеем

$$\varphi_{\varepsilon}(T, x[t_*[\cdot]T]) - \int_{t_0}^{T} h(t, x[t_*[\cdot]t], u[t], \upsilon[t])dt \le \varphi_{\varepsilon}(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]) + \eta(\delta)(T - t_0)$$

откуда, учитывая равенство (1.3), включение (1.6) вместе с обозначением (5.2), неравенство (5.11) и оценку (5.12), выводим неравенство

$$\bar{\varphi}(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]) + \varepsilon + \mu(\varepsilon) + \eta(\delta)(T - t_0) \ge \gamma(\{x[\cdot], u[\cdot], \upsilon[\cdot]\})$$

Оно будет выполняться для всех реализаций (5.13). Поэтому, выбирая $\varepsilon > 0$ и Δ из условия

$$\varepsilon + \mu(\varepsilon) + \eta(\delta)(T - t_0) \le \zeta$$

в согласии с определением (2.2) отсюда получаем требуемое неравенство (5.10).

Докажем неравенства (5.14). Зафиксировав реализацию (5.13) и $i = 1, \ldots, N$, обозначим

$$g^x[t] = \{t, x[t_*[\cdot]t]\}, \quad \tau_* = t_i, \quad \tau^* = t_{i+1}$$

Требуется показать, что

$$\varphi_{\varepsilon}(g^x[\tau^*]) = \int_{\tau_*}^{\tau^*} h(g^x[t], u[t], \upsilon[t])dt \le \varphi_{\varepsilon}(g^x[\tau_*]) + \eta(\delta)(\tau^* - \tau_*)$$

где $\eta(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ и $\eta(\delta)$ не зависит от выбранной реализации (5.13). В согласии с конструкцией (5.8), (5.9) для $t = \tau_*$ положим

$$y_*[\cdot] = y^{\mathrm{e}}[\cdot], \quad g^y_* = \{\tau_*, y_*[t_*[\cdot]\tau_*]\}, \quad g^w_* = \{\tau_*, w^{\mathrm{e}}[t_*[\cdot]\tau_*]\}$$

$$s = s^{\mathrm{e}} = \nabla \nu_{\varepsilon}(g^w_*), \quad u^{\mathrm{e}}_* = U^{\mathrm{e}}_{\varepsilon}(g^x[\tau_*]) = p(g^x[\tau_*], s)$$

Имеем

$$\varphi_{\varepsilon}(g^x[\tau_*]) = \bar{\varphi}(g^y_*) + \nu_{\varepsilon}(g^w_*) \tag{5.15}$$

$$u[t] = u^{\mathrm{e}}_*, \quad \dot{x}[t] = f(g^x[t], u[t], \upsilon[t]) \text{ п.в. } t \in [\tau_*, \tau^*) \tag{5.16}$$

При этом, согласно равенству (1.5) и включению (4.4), справедливы соотношения

$$\begin{gathered}H(g^x[\tau_*], s) = \max_{\upsilon \in Q}[\langle s, f(g^x[\tau_*], u^{\mathrm{e}}_*, \upsilon)\rangle - h(g^x[\tau_*], u^{\mathrm{e}}_*, \upsilon)] \ge \\ \ge \langle s, f(g^x[\tau_*], u^{\mathrm{e}}_*, \upsilon[t])\rangle - h(g^x[\tau_*], u^{\mathrm{e}}_*, \upsilon[t])\end{gathered} \tag{5.17}$$

Опираясь на свойство u-стабильности (свойство A), возьмем функцию $(y[\cdot], z[\cdot])$, удовлетворяющую условиям (2.8)–(2.10), и далее обозначим

$$g^y[t] = \{t, y[t_*[\cdot]t]\}, \quad w[\cdot] = x[\cdot] - y[\cdot], \quad g^w[t] = \{t, w[t_*[\cdot]t]\}$$

Отметим, что при этом $g^y[\tau_*] = g^y_*$, $g^w[\tau_*] = g^w_*$. Из соотношений (2.8), (2.10) и (5.15), учитывая принятые обозначения, выводим

$$\varphi_\varepsilon(g^x[\tau_*]) = \bar{\varphi}(g^y[\tau^*]) - \int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} \dot{z}[t]dt + \nu_\varepsilon(g^w_*) \tag{5.18}$$

Так как $y[\cdot] \in X^M$ $(g^y_* = \{\tau_*, y_*[t_*[\cdot]\tau_*]\})$ и $y_*[\cdot] \in X_0$, то $y[\cdot] \in X_0$, поэтому в согласии с равенством (5.8), будет выполняться неравенство

$$\bar{\varphi}(g^y[\tau^*]) + \nu_\varepsilon(g^w[\tau^*]) \geq \varphi_\varepsilon(g^x[\tau^*])$$

Отсюда и из соотношения (5.18) заключаем

$$\varphi_\varepsilon(g^x[\tau^*]) - \int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} h(g^x[t], u[t], \upsilon[t])dt \leq \varphi_\varepsilon(g^x[\tau_*]) + \theta \tag{5.19}$$

где

$$\theta = \nu_\varepsilon(g^w[\tau^*]) - \nu_\varepsilon(g^w_*) + \int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} [\dot{z}[t] - h(g^x[t], u[t], \upsilon[t])]dt \tag{5.20}$$

Оценим величину θ. Рассмотрим функцию

$$\nu[t] = \nu_\varepsilon(g^w[t]) = \nu_\varepsilon(t, w[t_*[\cdot]t]), \quad t \in [\tau_*, \tau^*]$$

В силу условия a функционал ν_ε является $[\tau_*, \tau^*]$-ci-гладким. Так как $x[\cdot], y[\cdot] \in X_0$, то $w[\cdot] \in \mathrm{Lip}(g^w[t_0])$. Таким образом, функция $\nu[t]$ абсолютно непрерывна и, принимая во внимание соотношение (3.2) (при $\rho = \nu_\varepsilon$), справедливы равенства

$$\nu_\varepsilon(g^w[\tau^*]) - \nu_\varepsilon(g^w_*) = \int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} \dot{\nu}[t]dt = \int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} [\partial_t\nu_\varepsilon(g^w[t]) + \langle \nabla\nu_\varepsilon(g^w[t]), \dot{x}[t] - \dot{y}[t]\rangle]dt$$

Учитывая это и соотношения (2.9), (5.16), величину (5.20) можно представить в следующем виде:

$$\theta = \int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} [\partial_t\nu_\varepsilon(g^w[t]) + \langle \nabla\nu_\varepsilon(g^w[t]), f(g^x[t], u^{\mathrm{e}}_*, \upsilon[t])\rangle - h(g^x[t], u^{\mathrm{e}}_*, \upsilon[t]) -$$

$$- H(g^y[t], s) - \langle \dot{y}[t], \nabla\nu_\varepsilon(g^w[t]) - s\rangle]dt$$

Отсюда, если учесть равенства

$$s = \nabla\nu_\varepsilon(g^w_*) = \nabla\nu_\varepsilon(g^w[\tau_*])$$

и свойства непрерывности величин f, h, $\partial_t\nu_\varepsilon$, $\nabla\nu_\varepsilon$ и H, вытекает оценка

$$\theta \leq \int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} [\partial_t\nu_\varepsilon(g^w[\tau_*]) + \langle s, f(g^x[\tau_*], u^{\mathrm{e}}_*, \upsilon[t])\rangle - h(g^x[\tau_*], u^{\mathrm{e}}_*, \upsilon[t]) - H(g^y[\tau_*], s)]dt +$$

$$+ \eta(\delta)(\tau^* - \tau_*), \quad \eta(\delta) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \downarrow 0 \tag{5.21}$$

Поскольку в силу соотношений (1.6), (5.2) рассматриваемые функции $x[\cdot]$ и $y[\cdot]$ всегда содержатся в компакте X_0, бесконечно малую $\eta(\delta)$ можно здесь взять одной и той же для всех возможных реализаций (5.13). Из неравенств (5.17) и (5.21), учитывая, что $s = \nabla\nu_\varepsilon(g^w[\tau_*])$, и используя неравенство (5.3), получаем оценку

$$\theta \le \eta(\delta)(\tau^* - \tau_*)$$

Эта оценка завершает доказательство соотношения (5.14), а вместе с ним и всей теоремы.

Из данной теоремы, согласно определению (2.3) величины ОГР, следует, что

$$\varphi(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]) \le \bar{\varphi}(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0])$$

С другой стороны, так как функционал $\bar{\varphi}$ является нижним замыканием (2.7) функционала φ, имеем

$$\varphi(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]) \ge \bar{\varphi}(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]), \quad t_0 \in [t_*, T], \quad x_0[t_*[\cdot]t_0] \in C([t_*, t_0], R^n)$$

Таким образом, при рассматриваемых предположениях $\varphi = \bar{\varphi}$, и следовательно, экстремальная ε-стратегия U_ε^e является оптимальной.

Замечание 1. Аналогично можно рассмотреть контрзадачу о поиске стратегии помехи V° (или ε-стратегии V_ε°), гарантирующей показателю (1.3) возможно большее значение.

Пример 2. Пусть динамика управляемой системы, имеющей двумерный фазовый вектор $x = \{x_1, x_2\} \in R^2$, описывается уравнениями

$$\dot{x}_1[t] = \int_0^t \ln(1+t+\tau)x_2[\tau]d\tau + u[t], \quad \dot{x}_2[t] = \upsilon[t]$$
$$0 \le t^0 \le t \le T, \quad \|u[t]\| \le a, \quad \|\upsilon[t]\| \le b \tag{5.22}$$

с начальным условием

$$x[\tau] = \{x_1[\tau], x_2[\tau]\} = \{x_1^0[\tau], x_2^0[\tau]\} = x^0[\tau], \quad 0 \le \tau \le t^0 \tag{5.23}$$

Показатель качества процесса управления задан в виде

$$\gamma = |x_1[T] + x_2[t^*]| - \int_{t^0}^T \sqrt{a^2 - u^2[t]}dt \tag{5.24}$$

Постоянные $a > 0$ и $b > 0$, начальный момент времени $t^0 \in [0, T)$ и начальная история $x^0[0[\cdot]t^0] \in C([0, t^0], R^2)$, промежуточный момент времени $t^* \in [0, T)$ и терминальный момент $T > 0$ предполагаются известными.

Гамильтониан системы (5.22), (5.24) имеет вид

$$H(t, x[0[\cdot]t], s) = s_1\int_0^t \ln(1+t+\tau)x_2[\tau]d\tau - a\sqrt{1+s_1^2} + b|s_2| \tag{5.25}$$

Обозначим

$$\theta(t,\tau) = \int_t^T \ln(1+\tau+\xi)d\xi, \quad \omega_1(t) = \int_t^T\int_t^\xi \ln(1+\xi+\tau)d\tau d\xi$$

$$\omega_2(t) = \begin{cases} \omega_1(t) + 1 & \text{при} \quad t < t^*, \\ \omega_1(t) & \text{при} \quad t \ge t^*, \end{cases} \qquad \omega_3(t) = b\int_t^T \omega_2(\tau)d\tau$$

$$\rho(t, x[0[\cdot]t]) = x_1[t] + \omega_1(t)x_2[t] + \int_0^t \theta(t, \tau)x_2[\tau]d\tau + \begin{cases} x_2[t] & \text{при} \quad t < t^* \\ x_2[t^*] & \text{при} \quad t \geq t^* \end{cases}$$

Заметим, что функционал $\rho = \rho(t, x[0[\cdot]t])$ является непрерывным и ci-дифференцируемым. Вычислим его ci-производные. Имеем

$$\partial_t\rho = -\int_0^t \ln(1 + t + \tau)x_2[\tau]d\tau, \quad \nabla\rho = \{\nabla_1\rho, \nabla_2\rho\} = \{1, \omega_2(t)\} \tag{5.26}$$

Видно, что величины $\partial_t\rho$ и $\nabla_1\rho$ непрерывны, а величина $\nabla_2\rho$ кусочно-непрерывна с точкой разрыва t^*. Отметим также, что

$$\rho(t, x[0[\cdot]t] \equiv 0) = 0, \quad \rho(T, x[0[\cdot]T]) = x_1[T] + x_2[t^*]$$

Каковы бы ни были допустимые реализации $u[\cdot] : [t^0, T) \mapsto [-a, a]$ управления и $\upsilon[\cdot] : [t^0, T) \mapsto$ $\mapsto [-b, b]$ помехи, для соответствующей реализации $x[\cdot] = \{x_1[\cdot], x_2[\cdot]\} : [0, T] \mapsto R^2$ движения системы (5.22) при начальном условии (5.23) имеет место равенство

$$x_1[T] + x_2[t^*] = \rho(t^0, x^0[0[\cdot]t^0]) + \int_{t^0}^T (\omega_2(\tau)\upsilon[\tau] + u[\tau])d\tau$$

Исходя из этого равенства, например, методом из [9] получаем следующее выражение для функционала ОГР задачи управления (5.22), (5.24):

$$\begin{aligned} \varphi(t, x[0[\cdot]t]) &= \max_{|l| \leq 1}[\rho(t, x[0[\cdot]t])l + \omega_3(t)|l| - (T - t)a\sqrt{1 + l^2}] = \\ &= \max_{|l| \leq 1}[\rho(t, x[0[\cdot]t])l + \bar{\psi}(t, l)] \end{aligned} \tag{5.27}$$

Здесь $\bar{\psi}(t, l)$ – выпуклая сверху оболочка функции

$$\psi(t, l) = \omega_3(t)|l| - (T - t)a\sqrt{1 + l^2}$$

на множестве $\{l \in R : |l| \leq 1\}$, т.е.

$$\bar{\psi}(t, l) = \begin{cases} \psi(t, l_*), & \text{если} \quad |l| \leq l_* \\ \psi(t, l), & \text{если} \quad |l| > l_* \end{cases}$$

где

$$l_* = \begin{cases} \omega_3(t)((T - t)^2 a^2 - \omega_3^2(t))^{-1/2}, & \text{если} \quad 2\omega_3^2(t) < (T - t)^2 a^2 \\ 1 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

Чтобы построить соответствующую оптимальную стратегию управления, воспользуемся конструкцией экстремального прицеливания (5.8), (5.9). Положим

$$D_0 = \{x[\tau] = x^0[\tau] + f, 0 \leq \tau \leq t^0 \,|\, \|f\| \leq M_0\}$$

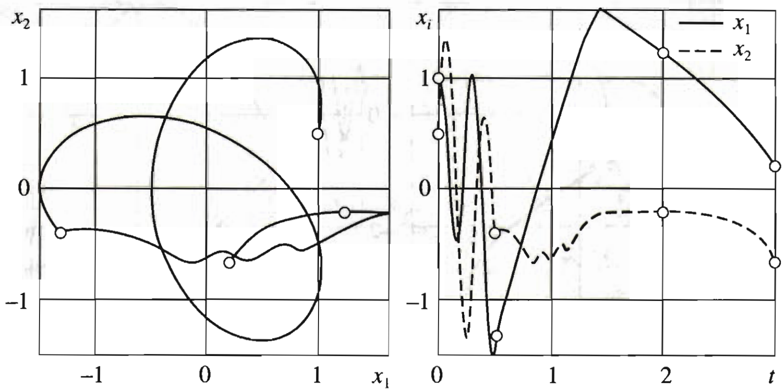
где $M_0 > 0$ – достаточно большое число. При этом в равенстве (5.2) положим $M > M_0$. В качестве вспомогательного функционала возьмем

$$\nu_\varepsilon(t, w[0[\cdot]t]) = (2\varepsilon)^{-1}\rho^2(t, w[0[\cdot]t])$$

В силу отмеченных выше свойств функционала ρ такой функционал ν_ε удовлетворяет требованиям *а*–*в*. При учете равенств (5.26) его ci-производные определяются равенствами

$$\partial_t\nu_\varepsilon = \partial_t\nu_\varepsilon(t, w[0[\cdot]t]) = -\varepsilon^{-1}\rho(t, w[0[\cdot]t])\int_0^t \ln(1 + t + \tau)w_2[\tau]d\tau$$

$$\nabla\nu_\varepsilon = \nabla\nu_\varepsilon(t, w[0[\cdot]t]) = \varepsilon^{-1}\rho(t, w[0[\cdot]t])\{1, \omega_2(t)\}$$



Фиг. 1

Отсюда и из выражения (5.25) видно, что для этого функционала выполняется условие *г*. Проведя вычисления, получаем

$$s^{\mathrm{e}} = \nabla\nu_\varepsilon(t, w^{\mathrm{e}}[0[\cdot]t]) = \{l_u, \omega_2(t)l_u\}$$

$$l_u \in \operatorname*{argmax}_{|l| \le 1}[\rho(t, x[0[\cdot]t])l + \bar{\psi}(t, l) - \varepsilon l^2/2]$$

Следовательно,

$$U_\varepsilon^{\mathrm{e}}(t, x[0[\cdot]t]) = -al_u/\sqrt{1 + l_u^2} \tag{5.28}$$

По теореме 1 для задачи управления (5.22)–(5.24) построенная ε-стратегия $U_\varepsilon^{\mathrm{e}}$ оптимальна.

На фиг. 1 изображен результат моделирования процесса управления системой (5.22) на основе ε-стратегии (5.28) в паре со взятой наугад стратегией $V = b\cos(20tx_1[t]x_2[t])$ помехи при следующих начальных данных:

$$T = 3, \quad t^* = 2, \quad t^0 = 0.5, \quad a = 5, \quad b = 2$$

$$x_1^0[\tau] = \cos 20\tau + 0.5\sin 10\tau, \quad x_2^0[\tau] = \sin 20\tau + 0.5\cos 10\tau \quad \text{при} \quad 0 \le \tau \le 0.5$$

Было выбрано значение параметра точности ε = 0.01. Действие стратегий осуществлялось на базе равномерного разбиения отрезка времени [0.5, 3] с шагом δ = 0.001. Априорно подсчитанная величина ОГР

$$\varphi \approx -2.7843$$

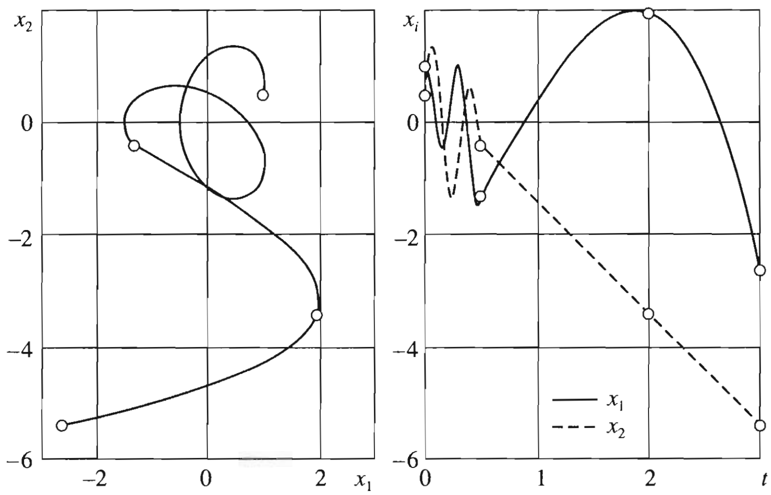
Реализовавшееся значение показателя качества

$$\gamma \approx |0.220 + (-0.220)| - 11.251 = -11.251 < \varphi$$

На фиг. 2 изображен результат моделирования процесса управления на основе той же ε-стратегии $U_\varepsilon^{\mathrm{e}}$ и при тех же условиях, но в паре с контроптимальной ε-стратегией помехи, которую в рассматриваемом случае можно определить следующим образом:

$$V_\varepsilon^{\mathrm{o}}(t, x[0[\cdot]t]) = \operatorname{sign}(\omega_2(t)l_\upsilon)b$$

$$l_\upsilon \in \operatorname*{argmax}_{|l| \le 1}[\rho(t, x[0[\cdot]t])l + \psi(t, l) + \varepsilon l^2/2]$$



Фиг. 2

Реализовавшееся значение показателя качества

$$\gamma \approx |(-2.647) + (-3.402)| - 8.839 = -2.790 \approx \varphi$$

В заключение отметим, что преобразование (5.8) подобно "сглаживающим" преобразованиям, при помощи которых определяются квазиградиенты [13], а также проксимальные градиенты (см., например, [17]) негладких функций. Неравенства вида (5.3) играют важную роль в теории обобщенных решений уравнений типа Гамильтона–Якоби при доказательстве единственности решения (см., например, [18–20]). Функционал ν_ε является в рассматриваемом случае систем с последействием подходящим аналогом вспомогательных функций, используемых в тех конструкциях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00228) и Минпромнауки России (НШ-791.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
2. *Красовский Н.Н.* Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. № 3. С. 520–523.
3. *Красовский Н.Н.* Дифференциальная игра сближения–уклонения. II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
4. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
6. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
7. *Кряжимский А.В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782.
8. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Amsterdam: Gordon and Breach, 1995. 625 p.

9. *Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.* Задача конфликтного управления с наследственной информацией // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 885–900.
10. *Лукоянов Н.Ю.* Об уравнении типа Гамильтона–Якоби в задачах управления с наследственной информацией // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 252–263.
11. *Лукоянов Н.Ю.* Об экстремальном прицеливании в задачах управления системами с последействием // Изв. УрГУ. Математика и Механика. 2003. Т. 26. Вып. 5. С. 115–123.
12. *Lukoyanov N.* Functional Hamilton–Jacobi type equations with ci-derivatives in control problems with hereditary information // Nonlinear Funct. Anal. and Appl. 2003. V. 8. № 4. P. 535–555.
13. *Гарнышева Г.Г., Субботин А.И.* Стратегии минимаксного прицеливания в направлении квазиградиента // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 5–11.
14. *Гарнышева Г.Г., Субботин А.И.* Субоптимальные универсальные стратегии в игровой задаче быстродействия // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 707–713.
15. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
16. *Kim A.V.* Functional Differential Equations. Application of *i*-Smooth Calculus. The Netherlands Dordrecht: Kluwer, 1999. 165 p.
17. *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. N.Y., etc.: Springer, 1998. 278 p.
18. *Lukoyanov N.* Functional Hamilton–Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. and Appl. 2003. V. 8. № 3. P. 365–397.
19. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First–Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston, etc.: Birkhäuser, 1995. 312 p.
20. *Crandall M.G., Ishii H., Lions P.-L.* Uniqueness of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations revisited // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39. № 4. P. 581–596.

Екатеринбург
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
27.I.2004