УДК 62–50

© 2004 г. Д. А. Вагин, Н. Н. Петров

ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ГРУППЫ УБЕГАЮЩИХ В ПРИМЕРЕ ПОНТРЯГИНА

Выводятся достаточные условия поимки по крайней мере одного убегающего для примера Понтрягина [1] со многими участниками и фазовыми ограничениями, налагаемыми на состояния убегающих, при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков и при условии, что все убегающие используют одно и то же управление.

Работа примыкает к исследованиям [2–12].

1. Постановка задачи. В пространстве $R^k (k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = 0$)

$$
\begin{gathered}
x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \ldots + a_l x_i = u_i, \quad \|u_i\| \leq 1 \\
y_j^{(l)} + a_1 y_j^{(l-1)} + \ldots + a_l y_j = \upsilon, \quad \|\upsilon\| \leq 1 \\
x_i, y, u_i, \upsilon \in R^k, \; a_1, \ldots, a_l \in R^1 \\
x_i^{(\alpha)}(0) = x_{i\alpha}^0, \quad y_j^{(\alpha)}(0) = y_{j\alpha}^0, \quad \alpha = 0, \ldots, l-1
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

причем $x_{i0}^0 \neq y_{j0}^0$ для всех i, j. Здесь и всюду далее $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Дополнительно предполагается,что убегающие E_j не покидают пределы выпуклого множества

$$
D = \{y : y \in R^k, (p_s, y) \leq \mu_s, s = 1, \ldots, r\}
$$

где $p_1, \ldots, p_r$ – единичные векторы R^k, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ – вещественные числа, такие, что $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$.

Определение 1. Будем говорить,что в игре Γ происходит поимка, если существуют момент $T > 0$ и измеримые функции

$$
u_i(t) = u_i(t, x_{i\alpha}^0, y_\alpha^0, \upsilon(\cdot)), \quad \|u_i(t)\| \leq 1
$$

такие, что для любой измеримой функции $\upsilon(t)$, $\|\upsilon(t)\| \leq 1$, $y_j(t) \in D$, $t \in [0, T]$ существуют момент времени $\tau \in [0, T]$ и номера i, j, такие, что $x_i(\tau) = y_j(\tau)$.

Считаем, что $n \geq m$.

2. Вспомогательные утверждения. Вместо системы (1.1) рассмотрим систему

$$
\begin{gathered}
z_{ij}^{(l)} + a_1 z_{ij}^{(l-1)} + \ldots + a_l z_{ji} = u_i - \upsilon \\
z_{ij}(0) = z_{ij0}^0 = x_{i0}^0 - y_0^0, \ldots, z_{ij}^{(l-1)}(0) = z_{ijl-1}^0 = x_{il-1}^0 - y_{jl-1}^0
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Обозначим через $\varphi_p(t)$, $p = 0, 1\ldots, l-1$ решения уравнения

$$
w^{(l)} + a_1 w^{(l-1)} + \ldots + a_l w = 0
$$

с начальными условиями

$$w(0) = 0, \ldots, w^{(p-1)}(0) = 0, \quad w^{(p)}(0) = 1, \quad w^{(p+1)}(0) = 0, \ldots, w^{(l-1)}(0) = 0$$

Предположение 1. Все корни характеристического уравнения

$$\lambda^l + a_1\lambda^{l-1} + \ldots + a_l = 0 \tag{2.2}$$

имеют неположительные вещественные части.

Предположение 2. Функция $\varphi_{l-1}(t)$ неотрицательна для всех $t \geq 0$.

Отметим, что предположение 2 выполнено, если уравнение (2.2) имеет только вещественные корни. Из предположения 2 и известного результата [10] следует,что уравнение (2.2) имеет хотя бы один вещественный корень. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ($\lambda_1 <, \ldots, < \lambda_s$) вещественные корни, $\mu_1 \pm i\nu_1, \ldots, \mu_q \pm i\nu_q$ ($\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_q$) – комплексные корни уравнения (2.2), k_s – кратность корня λ_s, m_α – кратность корня $\mu_\alpha \pm i\nu_\alpha$. В силу предположения 2 $\mu_q \leq \lambda_s$. Пусть далее

$$\begin{aligned}(\eta_j(T,t), \zeta_i(T,t), \xi_{ij}(T,t)) &= \varphi_0(T)(y_j(t), x_i(t), z_{ij}(t)) + \varphi_1(T)(\dot y_j(t), \dot x_i(t), \dot z_{ij}(t)) + \\ &+ \ldots + \varphi_{l-1}(T)(y_j^{(l-1)}(t), x_i^{(l-1)}(t), z_{ij}^{(l-1)}(t))\end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда функции (2.3) при $t = 0$ и функция $\varphi_{l-1}(t)$ представимы в виде

$$\eta_j(T,0) = \Sigma_j^1(T), \quad \zeta_i(T,0) = \Sigma_i^2(T), \quad \xi_{ij}(T,0) = \Sigma_{ij}(T), \quad \varphi_{l-1}(t) = \Sigma^0(t)$$

Здесь

$$\Sigma_m^n = \sum_{\beta=1}^{s} \exp(\lambda_\beta T)P_{m\beta}^n(T) + \sum_{\alpha=1}^{q} \exp(\mu_\alpha T)(Q_{m\alpha}^n(T)\cos\nu_\alpha T + R_{m\alpha}^n(T)\sin\nu_\alpha T) \tag{2.4}$$

$$m = i, j; \quad n = 1, 2$$

Выражение для $\Sigma_{ij}(T)$ отличается от (2.4) отсутствием индекса n и заменой m на ij, а выражение для $\Sigma^0(t)$ – отсутствием индекса m и заменой T на t, причем $n = 0$.

Считаем, что $\xi_{ij}(T, 0) \neq 0$ для всех i, j и $t > 0$, ибо если $\xi_{pq}(T, 0) = 0$ при некоторых p, q, T то преследователь P_p ловит убегающего E_q, полагая $u_p(t) = \upsilon(t)$. Считаем также, что $P_{ijs}(t) \neq 0$ для всех i, j, ибо в противном случае, преследователи первоначально добиваются выполнения указанного условия.

Обозначим через γ_{ij} – степень многочлена P_{ijs}, γ – степень многочлена P_s^0. Можно считать, что $\gamma_{ij} = \gamma$ для всех i, j, ибо в противном случае преследователи P_i первоначально добиваются выполнения данного условия, выбирая свои управления $u_i(t)$ на достаточно малом отрезке времени так, чтобы коэффициенты при t^γ многочленов P_{ijs} были отличны от нуля.

Предположение 3. Справедливо неравенство $m_\alpha < k_s$ для всех $\alpha \in I = \{\alpha | \mu_\alpha = \lambda_s\}$.

Обозначим

$$X_i^0 = \lim \frac{P_{is}^2(t)}{t^\gamma}, \quad Y_j^0 = \lim \frac{P_{js}^1(t)}{t^\gamma}, \quad Z_{ij}^0 = \lim \frac{P_{ijs}(t)}{t^\gamma} \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

$$C_{\alpha\beta}(T,t) = \eta_\alpha(T,t) - \eta_\beta(T,t) = C_{\alpha\beta}(T+t, 0)$$

$$M_q(T, t, B_q(T+T^0)) =$$

$$= \exp(-\lambda_s(T^0+T))\int_0^t \varphi_{l-1}(T^0+t-\tau)\lambda(B_q(T^0+T), \upsilon(\tau))d\tau$$

Определим функцию λ: $\mathrm{comp}(R^k) \times V \to R$

$$\lambda(A, \upsilon) = \sup\{\lambda | \lambda > 0, -\lambda A \cap (V - \upsilon) \neq \varnothing\}$$

Здесь $\mathrm{comp}(R^k)$ – пространство выпуклых компактных подмножеств R^k с метрикой Хаусдорфа, V – шар единичного радиуса.

Лемма 1. Пусть выполнены предположения 1–3, $D = R^k$, $B_i : [0, \infty) \to R^k$, $\inf\limits_{\upsilon}\max\limits_{i}\lambda(B_i(T^0 + t), \upsilon) \geq \delta > 0$ для всех $t > 0$. Тогда существует момент $T > 0$ такой, что для любой допустимой функции υ найдется номер q, такой, что

$$1 - M_q(T, T, B_q(T + T^0)) \leq 0$$

3. Достаточные условия поимки. Будем полагать, что начальные условия таковы, что

а) если $n > k$, то для любого набора индексов $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $|I| \geq k + 1$ справедливо условие $\mathrm{Int\,co}\{X_i^0, i \in I\} \neq \varnothing$;

б) любые k векторов из совокупности $\{X_i^0 - Y_j^0, Y_l^0 - Y_r^0, l \neq r\}$ линейно независимы.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1–3, $D = R^k$, $n \geq k + 1$ и

$$0 \in \mathrm{Int\,co}\{Z_{ij}^0\} \tag{3.1}$$

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $n + m \geq k + 2$. В силу известного результата ([11], лемма 3) существуют $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $J \subset \{1, \ldots, m\}$, такие, что $\{Z_{ij}^0$, $i \in I, j \in J\}$ образуют положительный базис и $|I| + |J| = k + 2$. Будем считать, что

$$I = \{1, \ldots, q\}, \quad J = \{1, \ldots, l\}$$

Если $|J| = 1$, то поимка следует из известного результата [10]. Считаем, что $|J| \geq 2$. Из известного результата ([10], лемма 2.4, с. 155) следует, что существует момент $\hat{T}$, такой, что

$$\{\xi_{ij}(T^0 + t, 0), i \in I, j \in J\} \tag{3.2}$$

образуют положительный базис для любых $T^0 \geq \hat{T}$, $t \geq 0$. Зафиксируем один из указанных моментов T^0. Так как $\xi_{i\alpha}(T^0, t) = \xi_{i\alpha_0}(T^0, t) + C_{\alpha_0, \alpha}(T^0, t)$ для всех $i \in I, \alpha \neq \alpha_0, \alpha \in J$ то

$$\{\xi_{i\alpha_0}(T^0 + t, 0), i \in I, C_{\alpha_0\alpha}(T^0 + t, 0)\ \alpha \neq \alpha_0, \alpha \in J\}$$

образуют положительный базис. Пусть $\alpha_0 = 1$. Тогда

$$\{\xi_{i1}(T^0 + t, 0), i \in I, C_{1\alpha}(T^0 + t, 0), \alpha \neq 1, \alpha \in J\}$$

образуют положительный базис, причем количество векторов данной совокупности равно $k + 1$.

Так как $n \geq k + 1$, то существуют индексы $q + \alpha - 1 \in \{q + 1, \ldots, n\}$ при $\alpha \in J, \alpha \neq 1$. Из известного результата [10] следует, что существует $\mu > 0$, такое, что векторы

$$\{\xi_{i1}(T^0 + t, 0), i \in I, \xi_{q+\alpha-11}(T^0 + t) + \mu C_{1\alpha}(T^0 + t, 0), \alpha \in J, \alpha \neq 1\}$$

образуют положительный базис. Пусть

$$\Omega(t) = \{ \upsilon_t(\cdot);\ \|\upsilon(\tau)\| \le 1,\ \tau \in [0, t] \}$$

$$T(z_0) = \min\{ t : t \ge 0, \inf_{\upsilon_t(\cdot) \in \Omega(t)} \max_{i,\alpha}(1 - h_i(t), 1 - h_{q+\alpha-1}(t)) \ge 1 \}$$

где

$$h_\kappa(t) = 1 - M_\kappa(T, t, B_\kappa(T + T^0));$$

$$B_\kappa(T + T^0) = \exp(-\lambda_s(T^0 + T))(\xi_{\kappa 1}(T^0 + T, 0) + \mu_0 C_{1\alpha}(T^0 + T, 0));$$

$$\kappa = i \in I; \quad q + \alpha - 1; \quad \alpha \in J, \quad \alpha \ne 1$$

$$\mu_0 = \begin{cases} 0, & \kappa = i \in I \\ \mu, & \kappa = q + \alpha - 1; \quad \alpha \in J, \quad \alpha \ne 1 \end{cases}$$

По лемме 1 $T(z_0) < \infty$.

Задаем управления преследователей P_i, полагая ($T = T(z_0)$, $t \in [0, T]$),

$$u_\kappa(t) = \upsilon(t) - \lambda(B_\kappa(T^0 + T), \upsilon(t))B_\kappa(T^0 + T)$$

Пусть t_1 – наименьший положительный корень функции h вида $h(t) = \min_i h_i(t)$. Считаем, что $u_i(t) = \upsilon(t)$, $t \in [t_1, T]$. Тогда

$$\xi_{\kappa 1}(T^0, t) + \mu_0 C_{1\alpha}(T^0, t) = \xi_{\kappa 1}(T^0 + t, 0) + \mu_0 C_{1\alpha}(T^0 + t, 0) +$$
$$+ (\xi_{\kappa 1}(T^0 + T, 0) + \mu_0 C_{1\alpha}(T^0 + T, 0))(h_\kappa(t) - 1)$$

По лемме 1 для любой функции $\upsilon(\cdot)$, $\upsilon(\cdot) \in \Omega(T)$ существует номер r, такой, что $h_r(T) = 0$.

Если $r \in I$, то $\xi_{r1}(T^0, T) = 0$, и следовательно, в игре Г происходит поимка в момент времени $T^0 + T$, если считать, что $u_r(t) = \upsilon(t)$, $t \in [T, T^0 + T]$.

Если $h_{q+\alpha_0-11}(T) = 0$ при некотором $\alpha_0 \in J$, $\alpha_0 \ne 1$, то

$$\xi_{q+\alpha_0-11}(T^0, T) = -\mu C_{1,\alpha_0}(T^0, T) = -\mu C_{1\alpha_0}(T^0 + T, 0)$$

$$\xi_{i1}(T^0, T) = \xi_{i1}(T^0 + T, 0)h_i(t)$$

для всех $i \in I$, и следовательно,

$$\{\xi_{ij}(T^0, T), i \in I, j \in J\}$$

образуют положительный базис. Значит,

$$\zeta_i(T^0, T) - \eta_{\alpha_0}(T^0, T) + \eta_{\alpha_0}(T^0, T) - \eta_1(T^0, T), \quad \zeta_i(T^0, T) - \eta_j(T^0, T)\}$$

составляют положительный базис. Отсюда вытекает, что

$$\{\xi_{ij}(T^0, T), i \in I, j \in J, j \ne 1, -C_{1\alpha_0}(T^0, T)\}$$

составляют положительный базис. Заменяя $-C_{1\alpha_0}(T^0, T)$ на $\xi_{q+\alpha_0-11}(T^0, T)$, получаем, что при любом $T^0 > \hat{T}$

$$\{\xi_{ij}(T^0, T), i \in I \cup \{q + \alpha_0 - 1\}, j \in J, j \neq 1\}$$

составляют положительный базис. Следовательно, векторы

$$\{\xi_{ij}(T^0 + t, T), i \in I \cup \{q + \alpha_0 - 1\}, j \in J, j \neq 1\} \tag{3.3}$$

образуют положительный базис при любом $t \geq 0$.

Полученное условие (3.3) аналогично условию (3.2), но при этом количество убегающих в условии (3.3) уменьшилось на единицу. Принимая момент $T + T^0$ за начальный и повторяя рассуждения, до тех пор пока количество убегающих не станет равным единице, получаем, что

$$\xi_{i1}(T^0 + t, T), i \in I$$

образуют положительный базис для любого $t \geq 0$, причем $|I| = k + 1$. Отсюда в силу известного результата [10] в игре Г происходит поимка.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1–3, $n \geq k$ и

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{ij}^0, p_1, \ldots, p_r\}, \quad r \geq 1 \tag{3.4}$$

Тогда в игре Г происходит поимка.

4. Примеры. 1°. Системы (2.1), (2.2) имеют вид

$$z_{ij}^{(4)} + \ddot{z}_{ij} = u_i - \upsilon, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad \|\upsilon\| \leq 1$$

$$z_{ij}(0) = \overset{0}{z}_{ij}, \quad \dot{z}_{ij}(0) = \overset{1}{z}_{ij}, \quad \ddot{z}_{ij}(0) = \overset{2}{z}_{ij}, \quad z_{ij}^{(3)}(0) = \overset{3}{z}_{ij}$$

Тогда

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_1(t) = t, \quad \varphi_2(t) = 1 - \cos t, \quad \varphi_3(t) = t - \sin t$$

Поэтому

$$\xi_{ij}(t, 0) = \varphi_0(t)\overset{0}{z}_{ij} + \varphi_1(t)\overset{1}{z}_{ij} + \varphi_2(t)\overset{2}{z}_{ij} + \varphi_3(t)\overset{3}{z}_{ij} =$$

$$= t(\overset{1}{z}_{ij} + \overset{3}{z}_{ij}) + (\overset{0}{z}_{ij} + \overset{2}{z}_{ij}) - \overset{2}{z}_{ij}\cos t + \overset{2}{z}_{ij}\sin t$$

Полагаем $Z_{ij}^0 = \overset{1}{z}_{ij} + \overset{3}{z}_{ij}$. Считаем, что $Z_{ij}^0 \neq 0$.

Утверждение. Пусть $n \geq k$ и выполнено условие (3.4). Тогда в игре Г присходит поимка.

2°. Системы (2.1), (2.2) имеют вид

$$z_{ij}^{(l)} = u_i - \upsilon, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad \|\upsilon\| \leq 1$$

$$z_{ij}^s(0) = \overset{s}{z}_{ij}, \quad s = 0, \ldots, l - 1$$

Тогда

$$\varphi_s(t) = \frac{t^s}{s!}, \quad s = 0, \ldots, l - 1$$

Поэтому

$$\xi_{ij}(t,0) = \sum_{s=0}^{l-1} \varphi_s(t) z_{ij}^s = \sum_{s=0}^{l-1} z_{ij}^s \frac{t^s}{s!}$$

Полагаем $Z_{ij}^0 = z_{ij}^{l-1}$. Считаем, что $Z_{ij}^0 \neq 0$.

Утверждение. Пусть $n \geq k$ и выполнено условие (3.4). Тогда в игре Г происходит поимка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования России РФ (Е02-1.0-100) и Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00014).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С.* Избр. науч. труды. Т. 2. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 575 с.
2. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
3. *Чикрий А.А.* Конфликтно-управляемые процессы. Киев.: Наук. думка, 1992. 384 с.
4. *Чикрий А.А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Математическая теория управления. Варшава: Центр Банаха, 1983. С. 81–107.
5. *Мезенцев А.В.* О некоторых классах дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1971. № 6. С. 3–7.
6. *Петров Н.Н.* Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
7. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. *Сатимов Н. Б., Маматов М.Ш.* О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // Докл. АН Уз ССР. 1983. № 4. С. 3–6.
9. *Иванов Р.П.* Простое преследование–убегание на компакте //Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1318–1321.
10. *Петров Н.Н.* Теория игр. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1997. 196 с.
11. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
12. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 238–245.

Ижевск
e-mail: npetrov@udmnet.ru

Поступила в редакцию
6.I.2004