

УДК 62–50

© 2004 г. А. А. Меликян

ПЕРВИЧНЫЕ СТРАТЕГИИ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НА ДВУСТОРОННИХ ПЛОСКИХ ФИГУРАХ

Рассматриваются дифференциальные игры простого преследования, в которых пространство игры – плоская двусторонняя фигура. Игроки могут переходить с одной стороны на другую через край этой фигуры или вырезы в ней. Примеры таких пространств – круговой диск, прямоугольник, двусторонняя плоскость с круговым вырезом. Исследованы условия существования сингулярных траекторий преследования. Найдено достаточное условие (в терминах геометрических параметров фигуры и отношения скоростей игроков) существования простой стратегии преследования.

В теории дифференциальных игр так называемое простое движение нередко используется для моделирования движения маневрирующих объектов. Простым, согласно принятой терминологии [1], называется движение безынерционной точки, управляемой по скорости, на которую обычно накладываются симметричные (сферические) ограничения. Решение ряда игровых задач с простыми движениями оказывается технически менее сложным, чем в задачах с более сложной динамикой. Сравнительно элементарным, например, является решение задач сближения и преследования с простым движением в евклидовом пространстве. Можно отметить следующие два отличия более сложных дифференциально-игровых моделей от простых игр в евклидовом пространстве. Эти модели описываются более сложными, нелинейными уравнениями движения, либо, при сохранении простых движений, в них пространство игры обладает более сложной геометрией и является (римановым) многообразием, возможно имеющим край или сингулярные точки, где теряется гладкость многообразия. Свойства нелинейности в некоторой степени вбирает в себя метрический тензор многообразия, однако характер динамических уравнений позволяет эффективно использовать геометрические методы.

Решение игровых задач со сложной нелинейной динамикой – достаточно трудная математическая задача. Строгая формализация эффективных задач теории дифференциальных игр, разработка эффективных методов их решения связана в отечественной науке с именем Н.Н. Красовского [2–4], представителей созданной им школы по теории управления [5, 6] и других отечественных специалистов [7, 8].

В данной работе рассматриваются дифференциальные игры преследования с простым движением на двумерных многообразиях. Платой в игре является время преследования, радиус поимки полагается равным нулю.

Оптимальное время преследования при простом движении игроков в евклидовой плоскости (пространстве) вычисляется по известной простой формуле как отношение начального расстояния между игроками к разности скоростей [1]. Эта формула верна также для игры на гладких двумерных поверхностях (многообразиях) при достаточно малых значениях начального расстояния. Оптимальные траектории игроков определяются кратчайшей линией (геодезической), соединяющей игроков. При этом оба игрока, и преследующий и убегающий, движутся вдоль этой общей геодезической линии. Подобную стратегию преследующего (убегающего) игрока будем называть первичной стратегией преследования (убегания).

Однако наличие позиций (положений двух точек-игроков), для которых существуют две геодезические линии с равными длинами, может породить особые (сингулярные) траектории преследования, являющиеся огибающими семейства геодезических, а также траектории других типов. Как следует из полученных ранее результатов [9], в игре преследования на конусе

обязательно возникают сингулярные траектории [10, 11]. Если, например, пространство игры – прямой круговой цилиндр, то наличие двух геодезических линий не изменяет оптимальности первичной стратегии, и в этой игре нет сингулярных траекторий.

Цель данной работы – исследование условий возникновения сингулярных траекторий преследования, формулировка достаточных условий, при которых в данном пространстве игры и при данном отношении скоростей игроков оптимальными являются первичные стратегии, обзор и анализ решения ряда игровых задач в разных игровых пространствах-многообразиях. Основной элемент геометрического анализа – построение трехмерного многообразия позиций игроков с двумя равными геодезическими линиями. Другие геометрические методы решения игровых задач эффективно использовались ранее [12, 13].

Достаточное условие глобальности первичной стратегии записывается в виде неравенства в терминах единичных касательных векторов в концах геодезических линий [11]. Построена зависимость отношения скоростей игроков от эксцентриситета эллипса, выделяющая множество эллипсов с оптимальным преследованием по первичным геодезическим.

1. Пространство и динамика игры. Рассматривается дифференциальная игра с участием двух управляемых точек-игроков – преследователя P и убегающего игрока E . Точки совершают простое движение, т.е. могут мгновенно менять направление скоростей, ограниченных по величине, соответственно, положительными постоянными 1 и v , $0 < v < 1$.

Пространством игры, в котором движутся точки, является двусторонняя плоская фигура M , возможно неограниченная, имеющая выпуклую границу. Точки могут переходить с одной стороны многообразия M на другую в точках границы. Подобное пространство игры – многообразие без края, однако негладкое из-за наличия ребра – границы фигуры. В работе будут рассмотрены также и примеры, в которых многообразии M является гладким, или имеет край. Во всех случаях многообразии M – двумерная поверхность или фигура, рассматриваемая в трехмерном евклидовом пространстве, и длина кривой на M понимается как евклидова длина в объемлющем трехмерном пространстве.

Отметим, что негладкость многообразия не порождает существенных трудностей при анализе задачи. Множество M можно приблизить гладким многообразием: например, эллипс можно рассмотреть как вырожденный эллипсоид с исчезающе малой осью. Специфика задачи заключается в наличии двух и более кратчайших геодезических, соединяющих игроков в некотором подмножестве позиций.

Уравнения движения игроков задаются соотношениями и ограничениями:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad x, y, u, v \in R^2 \quad (1.1)$$

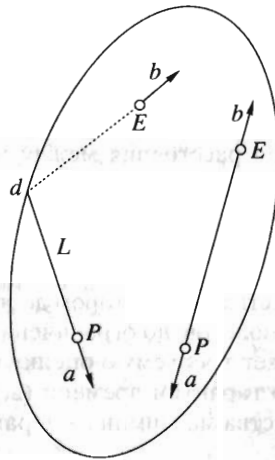
$$u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad v_1^2 + v_2^2 \leq v^2 \quad (1.2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ – евклидовы (локальные) координаты игроков P и E в плоскости, совпадающей с плоскостью фигуры и снабженной прямоугольной декартовой системой координат. В дополнение к соотношениям (1.1) следует указывать на какой стороне фигуры (условно, верхней или нижней) находится точка P или E . Кроме того, в точках границы ограничения (1.2) должны быть дополнены условиями, запрещающими выход игроков за пределы фигуры M .

2. Первичное решение. Первичным называется решение, совпадающее по структуре с решением игры на евклидовой плоскости. Время преследования (с нулевым радиусом поимки) при этом равно отношению начального расстояния между игроками к разности их скоростей

$$V(x, y) = L(x, y)/(1 - v) \quad (2.1)$$

Начальное расстояние для случаев, когда игроки находятся на одной и той же стороне (геодезическая линия – отрезок) или на разных сторонах (геодезическая линия



Фиг. 1

представляет собой ломаную линию из двух отрезков) фигуры M, соответственно, задается формулами

$$L(x, y) = |x - y|, \quad L(x, y) = |x - d| + |y - d| \tag{2.2}$$

где $d = (d_1, d_2)$ – точка излома геодезической, т.е. точка перехода с одной стороны фигуры M на другую.

Оптимальное поведение игроков в первичной области состоит в их движении вдоль соединяющей их кратчайшей геодезической. Соответствующие первичные стратегии задаются формулами

$$u(x, y) = -a(x, y)(a(x, y) = \partial L / \partial x), \quad v(x, y) = vb(x, y)(b(x, y) = \partial L / \partial y) \tag{2.3}$$

где a и b – единичные внешние касательные к геодезической линии векторы в точках P и E (направленные вдоль соответствующего отрезка), фиг. 1. Непосредственной проверкой можно убедиться, что модуль градиента функции $L(x, y)$ по каждой из переменных x и y равен единице. Иными словами, эта функция удовлетворяет двум уравнениям эйконала. Отметим, что при дифференцировании $L(x, y)$ производные от вектора $d = d(x, y)$ исчезают, благодаря условиям Вейерштрасса – Эрдмана [14] в угловой точке экстремали (закону "угол падения равен углу отражения" для экстремали). В общем виде выражения для единичных касательных векторов выводятся из формулы первой вариации геодезического функционала [9, 11, 14].

Область $D_1 \subset M \times M$ фазового пространства $M \times M$, в которой первичное время преследования (2.1) оптимально, по определению называется первичной. Отметим, что в формуле (2.1) имеется в виду кратчайшая геодезическая, определяемая соотношением

$$L(x, y) = \min_{\alpha \in A} S(x, y, \alpha) \tag{2.4}$$

где $S(x, y, \alpha)$ – семейство возможных локальных минимумов вариационной задачи о геодезической длине, α – параметр семейства, пробегающий некоторое множество A. В рассматриваемых задачах множество A обычно состоит из двух элементов.

Покажем, что время (2.1) является гарантированным для игрока P во всем фазовом пространстве $M \times M$, т.е. оптимальная поимка происходит либо за время (2.1),

либо быстрее. При фиксированном α полная производная по времени функции $S(x, y, \alpha)$ в силу системы (1.1) имеет вид

$$\dot{S} = \langle a, u \rangle + \langle b, v \rangle (a = S_x, b = S_y)$$

Наибольшая скорость убывания расстояния между игроками, которую может достичь игрок P , равна

$$\min_u \dot{L} = \min_u \min_{\alpha \in A} \dot{S} = -1 + \min_{\alpha \in A^*} \langle b, v \rangle \leq -1 + v \quad (2.5)$$

Здесь A^* – подмножество множества A , на котором достигается минимум (2.4), см. [15], а при получении неравенства использовано ограничение (1.2), налагаемое на вектор u .

Неравенство (2.5) и доказывает требуемую оценку времени.

Аналогичное утверждение о гарантии времени (2.1) для убегающего не удается получить из-за известного свойства максимина – неравенства

$$\max_v \dot{L} = \max_v \min_{\alpha \in A^*} \dot{S} \leq \min_{\alpha \in A^*} \max_v \dot{S}$$

3. Другие типы оптимальных траекторий. Представим фазовое пространство $M \times M$ в виде суммы

$$M \times M = D_1 + D_2$$

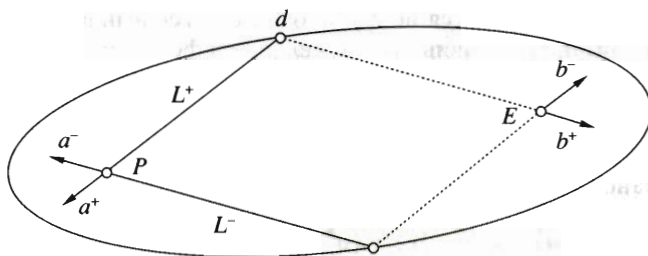
причем по определению оптимальное время преследования в D_1 равно величине (2.1), а во вторичной области D_2 строго меньше этой величины. В известных примерах задач простого преследования встречаются следующие типы оптимальных траекторий [9, 11, 16–21]. Граница Γ_{12} между областями D_1 и D_2 состоит из особых траекторий, причем каждый из игроков движется вдоль огибающей семейства геодезических линий. Область D_2 может состоять из двух частей: $D_2 = D_2^0 + D_3$, таких, что в области D_2^0 каждый из двух игроков движется вдоль своей геодезической линии, не совпадающей с линией, их соединяющей. В области D_3 только преследующий игрок движется вдоль геодезической линии, при том что убегающий может двигаться неоднозначным образом вдоль произвольной траектории. Цена игры в D_3 – решение некоторой задачи оптимального управления только игроком P .

В задачах преследования на плоскости с препятствием или вырезом существуют еще фрагменты траекторий, лежащих на границе препятствия или на линии выреза [16, 17, 19].

В зависимости от геометрических свойств пространства игры могут оказаться пустыми множества D_3 или D_2 . В последнем случае все пространство игры совпадает с областью D_1 и первичная стратегия преследования оптимальна.

4. Многообразие позиций с неединственной геодезической. Если оба игрока находятся на одной стороне фигуры M (пространства игры), то существует единственная геодезическая минимальной длины, их соединяющая – отрезок PE . Если игроки находятся по разные стороны фигуры M , то для некоторого множества позиций существуют две или более кратчайших геодезических линий равной длины. К этому случаю следует отнести позиции, для которых оба игрока находятся на границе фигуры M . При этом существуют две геодезические линии – отрезки PE , проходящие по разным сторонам фигуры M .

Для эллипса и прямоугольника, например, нетрудно убедиться, что ситуация такова. Для эллипса неединственность означает наличие ровно двух геодезических; только для четырех позиций, когда игроки находятся в разных фокусах эллипса (в случае



Фиг. 2

круга – в центре) существует бесконечное число равных геодезических. Для прямоугольника есть позиции с двумя, тремя и четырьмя (в случае квадрата) геодезическими.

Обозначим многообразие позиций с неединственной геодезической – подмногообразием фазового пространства $M \times M$ – через Γ , $\Gamma \subset M \times M$. Анализ показывает, что Γ – трехмерное многообразие с краем. Внутренние его точки соответствуют позициям с двумя геодезическими. В окрестности этих точек существуют два локальных минимума длины геодезической линии, которые обозначим через L^+ , L^- , фиг. 2. Для рассматриваемых внутренних точек многообразия Γ выполнено равенство

$$\Gamma: L^+(x, y) = L^-(x, y) \tag{4.1}$$

Граничные точки многообразия Γ могут иметь одну, три или более геодезических.

5. Многообразие В. Часть $\Gamma_1 \subset \Gamma$ многообразия Γ является, в принятой терминологии [1], рассеивающей поверхностью, т.е. из точек Γ_1 исходят две оптимальные траектории первичного преследования с одинаковым временем преследования (2.1). Первичное преследование проводится по любой из двух геодезических, выбор конкретной линии осуществляется игроком P .

В зависимости от геометрических характеристик пространства M множество Γ_1 может совпадать со всем многообразием Γ , и тогда первичное решение является решением игры во всем пространстве. Если подобного совпадения нет, то наличие двух геодезических позволяет игроку P маневрировать так, что в некотором подмножестве $D_2 \subset M \times M$ фазового пространства $M \times M$ оптимальное время преследования строго меньше времени (2.1).

Найдем необходимые условия оптимальности первичного решения во всем пространстве. Эти условия связывают геометрические характеристики фигуры M и параметр v . По определению, множество A в формуле (2.4) в окрестности точек многообразия Γ состоит из двух элементов, $A = \{+, -\}$, а сама формула принимает вид

$$L(x, y) = \min[L^+(x, y), L^-(x, y)] \tag{5.1}$$

Соотношение (4.1) означает, что минимум (5.1) достигается на обоих элементах, т.е. множества A и A^* совпадают. Тогда производная величины (5.1) в силу уравнений (1.1) в точках множества Γ может быть записана в виде

$$\dot{L} = \min[\langle a^+, u \rangle + \langle b^+, v \rangle, \langle a^-, u \rangle + \langle b^-, v \rangle] \tag{5.2}$$

где a^+ и b^+ – единичные внешние нормали к геодезическим линиям L^+ , L^- в точках P и E , фиг. 2, аналогичные введенным в (2.3).

Как следует из вывода формулы (2.5), игрок P может гарантировать себе время (2.1), используя до поимки стратегию $u = -a^+$ или $u = -a^-$. Предпишем теперь игроку P в позиции из множества Γ управление

$$u = -(a^+ + a^-) / |a^+ + a^-| \tag{5.3}$$

что означает, что игрок движется не вдоль одной из геодезических, а выбирает направление между ними. Подставив это управление в формулу (5.2), можно получить оценку

$$\dot{L} \leq -|a^+ + a^-|/2 + v|b^+ + b^-|/2 \quad (5.4)$$

Здесь использовано равенство

$$|\dot{a}^+ + a^-|^2 = \langle a^+ + a^-, a^+ + a^- \rangle = 2(1 + \langle a^+, a^- \rangle)$$

а также тот факт, что максимум

$$\max_v \min[\langle b^+, v \rangle, \langle b^-, v \rangle]$$

достигается на векторе

$$v = v(b^+ + b^-)/|b^+ + b^-|$$

Сравнивая соотношения (2.5) и (5.4), можно заключить, что управление (5.3) предпочтительнее для игрока P , если в некоторой точке многообразия Γ выполнено неравенство

$$|a^+ + a^-| - v|b^+ + b^-| > 2(1 - v) \quad (5.5)$$

Соотношения (5.2)–(5.5) носят "мгновенный" характер, относятся к начальному моменту времени. Однако они обеспечивают существование достаточно малого интервала времени, в течение которого игрок P получает более быстрое, чем (2.5), убывание расстояния между игроками, и тем самым улучшает время (2.1).

Поверхность Γ_1 лежит в области D_1 , где время (2.1) оптимально, поэтому условие (5.5) там не может быть выполнено. Таким образом, в точках поверхности Γ_1 выполнены соотношения

$$\Gamma_1: L^+ = L^-, \quad |a^+ + a^-| - v|b^+ + b^-| \leq 2(1 - v)$$

Для того чтобы первичное решение было глобально оптимальным, необходимо, чтобы множество (5.5) было пустым. Иными словами, край B многообразия Γ_1

$$B: L^+ = L^-, \quad |a^+ + a^-| - v|b^+ + b^-| = 2(1 - v) \quad (5.6)$$

не должен иметь общих точек с внутренностью многообразия Γ .

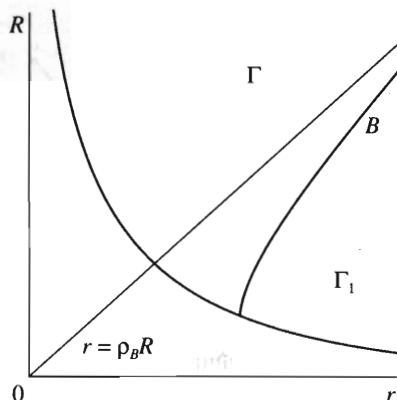
6. Примеры построения многообразий Γ и B . Приведем результаты исследования многообразия Γ и его края $\partial\Gamma$ для некоторых фигур и других игровых пространств.

Конус, поверхности вращения. Пусть пространство игры – поверхность вращения, заданная в трехмерной прямоугольной декартовой системе координат соотношениями

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) : kx_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + m^2, x_3 \geq 0\} \quad (6.1)$$

где k, m – положительные постоянные. При $m = 0$ уравнение (6.1) определяет прямой круговой конус, для остальных значений m – одну из полостей гиперболоида вращения.

Длина кривой на поверхности M определяется как евклидова длина пространства (x_1, x_2, x_3) . Через (x_1, x_2, x_3) будем обозначать положение игрока P , а через (y_1, y_2, y_3) – положение игрока E . В качестве локальных координат игроков будем использовать величины $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ – проекции точек P и E на соответствующую коор-



Фиг. 3

динатную плоскость. Уравнения движения в этих переменных, хотя и будут иметь вид (1), однако ограничения примут более общий вид

$$\sqrt{\langle G(x)u, u \rangle} \leq 1, \quad \sqrt{\langle G(y)v, v \rangle} \leq v$$

где $G(x)$ – возникающий при проектировании метрический тензор.

Из-за круговой симметрии пространства M многообразие Γ также обладает симметрией. Точка многообразия Γ характеризуется тем, что игроки находятся в общей плоскости, проходящей через ось x_3 . В качестве локальных координат на Γ можно принять угол β поворота этой плоскости (например, относительно оси x_1), и расстояния R и r игроков P и E , соответственно, от вершины $(0, 0, m/k)$.

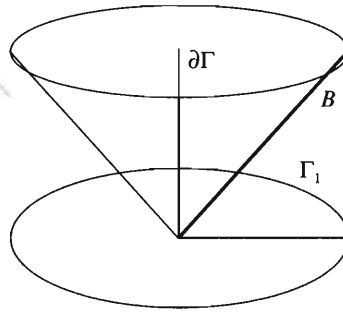
Численное исследование показало [20], что при фиксированном β точки многообразия Γ в плоскости R, r выделяются кривой $\partial\Gamma$, которая асимптотически приближается к координатным осям, фиг. 3. К многообразию Γ относятся точки выше этой кривой, точки ниже кривой соответствуют позиции с одной геодезической линией, соединяющей игроков. При приближении к кривой $\partial\Gamma$ сверху происходит слияние двух геодезических линий, так что на самой кривой существует одна геодезическая.

Слияние двух геодезических в точках кривой $\partial\Gamma$ означает, что для позиций из множества $\partial\Gamma$ точки являются взаимно сопряженными точками в вариационной задаче о геодезической линии на поверхности M [14]

$$L(x, y) = \min_{\xi(\sigma)} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sqrt{\langle G(\xi)\xi, \xi \rangle} d\sigma, \quad \xi(\sigma_0) = y, \quad \xi(\sigma_1) = x \tag{6.2}$$

Это позволяет предложить алгоритм нахождения точек кривой $\partial\Gamma$ [21]. В качестве номинальной следует рассмотреть экстремаль, проходящую через вершину поверхности M . В двумерной плоскости локальных координат это будет прямая, которую можно будет считать одной из координатных осей. На ней фиксируется дискретный набор положений одного игрока и для каждого из них находится сопряженный фокус относительно функционала (6.2).

Другой возможный механизм перехода от двух геодезических к одной – возникновение на $\partial\Gamma$ трех линий равной длины. Такой механизм существует в случае прямоугольника. Он возможен также и для поверхности вращения при подходящей форме образующей кривой. Выявление механизма перехода требует (численного) глобального анализа.



Фиг. 4

Численное же построение многообразия B , определенного формулой (5.6), показало, что у него есть край ∂B , лежащий на кривой $\partial \Gamma$, а сама кривая B имеет некоторую асимптотику

$$r = \rho_B R, \quad \rho_B = \rho_B(v, \alpha)$$

представляющую многообразие B для конуса, фиг. 3. Зависимость коэффициента ρ_B от отношения скоростей v и половины угла плоской развертки конуса α явно вычисляется [9].

Приближение к конусу происходит при $m \rightarrow 0$. Тогда кривая $\partial \Gamma$ стремится к прямому углу, составленному из положительных полуосей, кривая B – к своей асимптоте, а точка ∂B – к началу координат.

Полностью многообразия Γ , $\partial \Gamma$, B , ∂B можно получить (с подходящей третьей координатой), вращая кривые на фиг. 3 вокруг оси абсцисс или ординат. Граница $\partial \Gamma$ для конуса напоминает при этом "кнопку" – плоскость с приставленной к ней полупрямой, фиг. 4. Многообразию B оказывается также конусом, оно диффеоморфно пространству игры M [9].

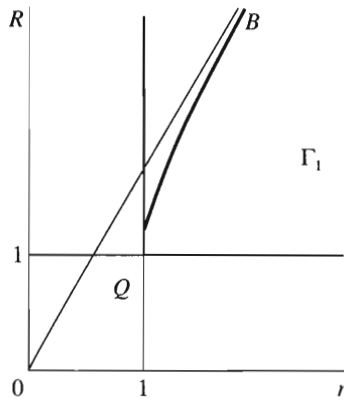
Двусторонний плоский угол. Рассмотрение данного физического пространства игры эквивалентно случаю конуса, который двумя способами можно деформировать в плоскую фигуру, а именно: разрезать вдоль образующей и развернуть на плоскость, или сложить по двум противоположным образующим в плоский двусторонний угол. Величина угла α при этом равна половине угла плоской развертки, причем $0 < \alpha < \pi$. В обоих случаях при деформации сохраняется длина геодезической линии и имеет место взаимно однозначное соответствие оптимальных траекторий.

Удобно различать так называемые острые конусы, параметры (v, α) для которых удовлетворяют условию

$$0 \leq v \leq 1 - \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2 \quad (6.3)$$

и все остальные (тупые) конусы. Для острых конусов множества D_3 , D_2^0 не пусты, и при старте из точек области D_3 поимка убегающего при оптимальном его поведении происходит в вершине конуса. Для тупых конусов множество D_3 пусто, а D_2 не пусто. Многообразия Γ и B имеют структуру, представленную на фиг. 4.

Двусторонняя плоскость с вырезанным кругом. В данной задаче [19] игроки могут двигаться по обеим сторонам плоскости, переходя с одной стороны на другую через край удаленного кругового фрагмента плоскости. Решение этой задачи может быть построено на основе задачи преследования на (односторонней) плоскости с круговым препятствием [16, 17].



Фиг. 5

Обозначим через R и r расстояние игроков P и E , соответственно, от центра круга O , радиус которого примем равным единице, угол между отрезками OP , OE обозначим через φ . Многообразию Γ определяется равенством $\varphi = \pi$, а его подмножество Γ_1 определяется условиями

$$\varphi = \pi, \quad \sqrt{1 - R^{-2}} - v\sqrt{1 - r^{-2}} \leq 1 - v$$

При знаке равенства в правом соотношении получаем описание многообразия B . Кривая B представлена на фиг. 5, ее асимптота – прямая $r = \sqrt{v}R$.

Прямой угол с вершиной в точке Q вместе с кривой B является той образующей, вращение которой вокруг оси ординат дает многообразия Γ и B .

Как видно из построения, многообразие B непусто для всех рассматриваемых значений скоростей игроков.

Для получения соответствующей образующей в исходной задаче следует взять симметрию образующей на фиг. 5 относительно оси абсцисс и склеить точку Q с ее образом.

Двусторонняя плоскость с двумя выколотыми точками. Пространством игры является двусторонняя плоскость с двумя выколотыми точками (отверстиями нулевого диаметра) в точках $D_1(0, 1)$, $D_2(0, -1)$, в которых игроки могут менять сторону плоскости. Данная задача [19] в существенной мере использует решение игры преследования на плоскости с препятствием в форме отрезка (фрагмент стены) [16]. Длины двух геодезических линий, соединяющих игроков, находящихся на разных сторонах плоскости, и многообразию Γ задаются равенствами

$$L^{\pm}(x, y) = \frac{1}{1-v} (\sqrt{x_1^2 + (x_2 \pm 1)^2} + \sqrt{y_1^2 + (y_2 \pm 1)^2})$$

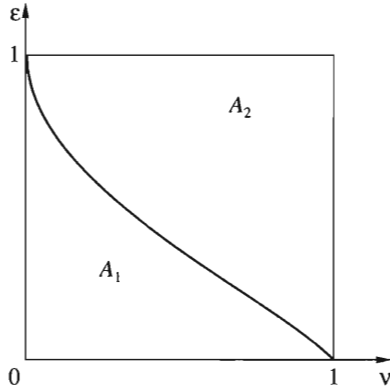
$$L^+(x, y) = L^-(x, y)$$

Многообразие B в пределах множества Γ выделяется дополнительным равенством

$$g(x_1, x_2) - v g(y_1, y_2) = 1 - v$$

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\sqrt{\xi^2 + (\eta + 1)^2} \sqrt{\xi^2 + (\eta - 1)^2}} \right)$$

Многообразие B непусто для всех рассматриваемых значений скоростей игроков.



Фиг. 6

Многоугольник. Можно показать, что в случае, когда пространство игры – выпуклый многоугольник (например, треугольник, прямоугольник и т.д.), множество B непусто, и таким образом, первичная стратегия не может быть глобально оптимальной. Действительно, в достаточно малой окрестности любой из вершин многоугольника M оптимальные траектории будут такими же, что и в задаче на плоском угле (конусе). В последнем случае всегда присутствуют сингулярные траектории. Можно лишь отметить, что если угол при рассматриваемой вершине достаточно узкий (в смысле условия (6.3)), то игрок P может "загнать" игрока E в эту вершину, т.е. навязать ему встречу в этой точке.

Плоская двусторонняя полоса, цилиндр. В данном случае множество B пусто, поскольку в силу симметрии относительно перестановки точек P и E для касательных векторов в соотношениях (5.5), (5.6) выполнены условия

$$|a^+ + a^-| = |b^+ + b^-| < 2$$

при которых равенство (12) невозможно ни при каких v .

Эллипс. В случае эллипса в зависимости от значений параметров v и ϵ множество B может быть либо пустым, либо непустым. Здесь ϵ – эксцентриситет эллипса:

$$\epsilon = c/a, \quad 0 < \epsilon < 1, \quad c^2 = a^2 - b^2$$

где a, b – большая и малая полуоси эллипса.

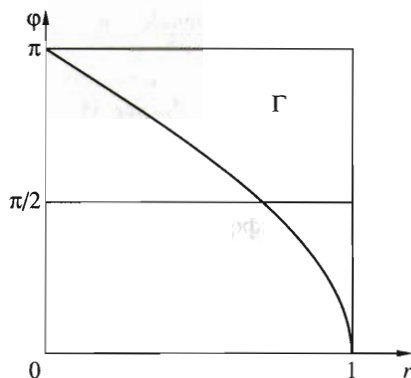
На фиг. 6 показана кривая в плоскости (v, ϵ) , разделяющая области A_1 и A_2 , которым соответствуют "вытянутые" и "округлые" эллипсы. Для эллипсов, задаваемых параметрами из множества A_1 , множество B пусто, и первичная стратегия глобально оптимальна. Это же справедливо и для эллипсов, соответствующих разделяющей кривой, для которых множество B хотя и не пусто, но неравенство (5.5) не имеет места.

Точки (v, ϵ) множества A_1 удовлетворяют условию

$$A_1: \max_{(P, E)} (|a^+ + a^-| - v|b^+ + b^-|) \leq 2(1 - v), \quad (P, E) \in \Gamma$$

Граница множества A_1 , в точках которой в данном соотношении имеет место равенство, находилась численно.

Что касается множества Γ для эллипса, то оно не имеет вращательной симметрии, как в ряде рассмотренных выше примеров. Такая симметрия есть в случае круга. Прежде чем построить множество Γ для круга, дадим его описание для случая сфе-



Фиг. 7

ры. Здесь нетрудно видеть, что для любого положения игрока P на сфере существует лишь одно положение игрока – на противоположном конце диаметра, – при котором теряется единственность геодезической **минимальной длины**, соединяющей игроков. Отсюда следует, что множество Γ диффеоморфно сфере, т.е. в подходящих координатах будет сферой. Множество Γ для двумерных игровых пространств, вообще говоря, трехмерно, так что в случае (двумерной) сферы имеет место определенное вырождение. Однако для круга, который является предельным случаем эллипсоида с одной нулевой полуосью, это вырождение снимается.

Для описания множества Γ отметим, прежде всего, что две геодезические с равными длинами существуют на круге только при условии, что точки P и E находятся на одинаковом расстоянии r от центра, $0 \leq r \leq 1$. Угол между радиусами, на которых лежат точки P и E , обозначим через φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$. В плоскости (r, φ) точки множества Γ находятся в верхней части прямоугольника, представленного на фиг. 7. Нижняя граница области Γ задается кривой $r = \cos(\varphi/2)$. Полное множество Γ получается отражением фигуры на фиг. 7 относительно оси абсцисс и вращением полученной составной фигуры вокруг оси ординат.

7. Заключение. В игровых задачах простого преследования для всех рассмотренных выше пространств игры, за исключением цилиндра и эллипса, множество B всегда непусто и преследователю для оптимальных действий нельзя ограничиваться только первичной стратегией преследования. В случае цилиндра (двусторонней плоской полосы) множество B всегда пусто и игрок P достигает оптимального результата только с помощью первичной стратегии. В случае эллипса могут реализоваться обе ситуации, в зависимости от параметров задачи. Как видно из рассмотрения многоугольника, угловые точки в границе двусторонней плоской фигуры порождают особые траектории преследования. Для достаточности первичной стратегии граница фигуры должна быть достаточно гладкой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00610).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isaacs R.* Differential Games. New York: Wiley, 1965 = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 478 с.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
3. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.

4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 457 с.
5. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 335 с.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
7. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 259 с.
8. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 385 с.
9. Меликян А.А., Овакимян Н.В. Игровая задача простого преследования на двумерном конусе // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 741–751.
10. Меликян А.А. Сингулярные характеристики уравнений в частных производных первого порядка // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 1. С. 24–28.
11. Melikyan A. Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998. 310 p.
12. Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Решетов В.М., Федотов А.А. Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. С. 51–61.
13. Patsko V.S., Tyrova V.L. Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics // Intern. Game Theory Review. 2001. V. 3. № 1. P. 67–112.
14. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
15. Демьянов В.Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
16. Вишневецкий Л.С., Меликян А.А. Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 613–620.
17. Пожарицкий Г.К. Задача Айзекса об огибании острова // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 707–713.
18. Melikyan A.A. Games of simple pursuit and approach on the manifolds // Dynamics and Control. 1994. V. 4. № 4. P. 395–405.
19. Melikyan A.A. Games of pursuit on two-sided plane with a hole // 8-th Intern. Symp. on Dynamic Games and Applications. Maastricht, the Netherlands, 1998. P. 394–396.
20. Novakimyan N., Melikyan A.A. Geometry of Pursuit-Evasion on Second Order Rotation Surfaces // Dynamics and Control. 2000. V. 10. № 3. P. 297–312.
21. Melikyan A.A. Structure of the value function in pursuit-evasion games on the surfaces of revolution // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 3. С. 155–163.

Москва
e-mail: melik@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
22.II.2004