УДК 62–50

© 2004 г. Д. М. Оленчиков

ГЛОБАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ БИЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Для билинейной управляемой импульсной системы запаздывающего типа введено понятие универсального управления, которое не зависит от начального состояния и любое начальное состояние в момент времени t_0 переводит в нуль в конечный момент времени t_1. Получен критерий глобальной управляемости. Рассмотрен пример управления двухзвенной колебательной системой.

Задачи управления динамическими объектами с помощью импульсных управлений имеют многочисленные приложения. Имеется обзор основных работ по импульсным системам [1, 2][1].

1. Определение решения линейной импульсной системы запаздывающего типа. *Определение* 1.1. Назовем линейной импульсной системой запаздывающего типа (импульсной системой) следующее выражение:

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^{k} \delta(t-\tau_i)H_i(t)x(t-0) \tag{1.1}$$

где $x(\cdot) : R \to \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$), $A(t)$ и $H_i(t)$ – квадратные матрицы порядка n с непрерывными комплекснозначными или вещественнозначными элементами, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция, $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_k$ – точки сосредоточения импульсов.

Зададим в точке t_0 начальное условие

$$x(t_0) = x_0, \quad \text{где} \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 \tag{1.2}$$

Через $X(t, s)$ обозначим матрицу Коши системы $\dot{x} = A(t)x$. Матрицей влияния i-го импульса будем называть матрицу $E + H_i(\tau_i)$. Содержательно, если x_0 – значение некоторого решения системы (1.1) "перед" i-м импульсом, то $(E + H_i(\tau_i))x_0$ – значение этого решения "после" i-го импульса. Тогда решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию (1.2), имеет вид

$$x(t) = X(t, \tau_{k(t)})\prod_{i=1}^{k(t)} [(E + H_i(\tau_i))X(\tau_i, \tau_{i-1})]x_0$$

где $k(t)$ – максимальный индекс i, такой, что $\tau_i < t$. Символ произведения здесь и в дальнейшем понимается в смысле умножения на матрицу слева, т.е. $\prod_{i=1}^{k} A_i = A_k A_{k-1} \ldots A_1$. Используя функцию Хевисайда, можно избавиться от функции $k(t)$ и дать следующее эквивалентное определение решения импульсной системы.

[1] См. также: *Сесекин А.Н.* Динамические системы с нелинейной импульсной структурой. Дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1997. 224 с.

Определение 1.2. Решением импульсной задачи Коши (1.1), (1.2) будем называть функцию

$$x(t) = X(t, \tau_k)\prod_{i=1}^{k}[(E + \chi(t - t_i)H_i(\tau_i))X(\tau_i, \tau_{i-1})]x_0 \tag{1.3}$$

где $\chi(\cdot)$ – функция Хевисайда: $\chi(t) = 0$ при $t < 0$, $\chi(t) = 1$ при $t > 0$.

В точках τ_i значения функции $x(\cdot)$ не определены (в случае необходимости их можно доопределить по непрерывности слева или справа). Важно отметить, что в определения импульсной системы и ее решения явно входит нумерация точек τ_i, которая отражает порядок следования импульсов. При этом даже совпадающие точки τ_i нельзя поменять местами, так как произведение соответствующих матриц $E + H_i(\tau_i)$ в общем случае некоммутативно. Это означает, что изменение порядка следования импульсов, сосредоточенных в одной точке, может изменить решение импульсной системы.

Рассмотрим семейство систем

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^{k}\delta_i(t - \tilde{\tau}_i)H_i(t)x(\tilde{\tau}_i - \varepsilon_2) \tag{1.4}$$

зависящих от чисел ε_1, ε_2, ε_3, моментов времени $\tilde{\tau}_i$ и функций $\delta_i(\cdot)$ и удовлетворяющих следующим условиям аппроксимации: 1) функции $\delta_i(\cdot)$ непрерывны на $(-\infty, \infty)$; $\delta_i(t) \geq 0$ при всех t; $\delta_i(t) = 0$ при всех $t \notin (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ и $\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1}\delta_i(t)dt = 1$; 2) $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$; 3) $|\tilde{\tau}_i - \tau_i| \leq \varepsilon_3$ для всех $i = 1, \ldots, k$; 4) $|\tilde{\tau}_{i+1} - \tilde{\tau}_i| > \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ для всех $i = 0, \ldots, k - 1$.

Условие 1 описывает аппроксимацию дельта-функции с полушириной импульса ε_1. Условие 2 означает, что в момент времени $\tilde{\tau}_i - \varepsilon_2$ измеряется значение решения, а затем по измеренным значениям формируется на отрезке $[\tilde{\tau}_i - \varepsilon_1, \tilde{\tau}_i + \varepsilon_1]$ импульс, причем запаздывание ε_2 больше, чем полуширина импульса ε_1. Третье условие вводит оценку близости точек $\tilde{\tau}_i$ и τ_i. Четвертое условие означает, что измерение очередного значения решения производится после завершения предыдущего импульса.

На отрезке $[t_0, \tilde{\tau}_1 - \varepsilon_1]$ все функции $\delta_i(\cdot)$ равны нулю, поэтому решения системы (1.4) понимаются в классическом смысле и совпадают с решениями системы $\dot{x} = A(t)x$. Далее, значение решения $x(\tilde{\tau}_1 - \varepsilon_2)$ уже определено, поэтому на отрезке $[\tilde{\tau}_1 - \varepsilon_1, \tilde{\tau}_1 + \varepsilon_1]$ решения системы (1.4) также понимаются в классическом смысле. Затем аналогичным образом решения определяются на отрезке $[\tilde{\tau}_1 + \varepsilon_1, \tilde{\tau}_2 - \varepsilon_1]$, на отрезке $[\tilde{\tau}_2 - \varepsilon_1, \tilde{\tau}_2 + \varepsilon_1]$ и т.д.

Определение 1.3. Решения системы (1.1) аппроксимируются решениями системы (1.4) равномерно на множестве I, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, для любого вектора x_0 найдутся числа r_1, r_2, r_3 и r_4, такие, что если $|\varepsilon_1| \leq r_1$, $|\varepsilon_2| \leq r_2$, $|\varepsilon_3| \leq r_3$, $|\tilde{x}_0 - x_0| \leq r_4$ и выполняются условия аппроксимации, то $|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$ для всех t из множества I. Здесь $\tilde{x}(\cdot)$ – решение системы (1.4) с начальным условием $x(t_0) = \tilde{x}_0$, а $x(\cdot)$ – решение импульсной задачи Коши (1.1), (1.2).

Теорема 1.1. При любых $r > 0$ и $T > t_0$ решение системы (1.1) аппроксимируется решениями системы (1.4) равномерно на множестве

$$I = [t_0, T]\setminus\bigcup_{i=1}^{m}(\tau_i - r, \tau_i + r)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $r > 0$ и $T > t_0$. Пусть $\tilde{x}(\cdot)$ – решение системы (1.4) с начальным условием $x(t_0) = \tilde{x}_0$, а $x(\cdot)$ – решение импульсной задачи Коши (1.1), (1.2), определенное по формуле (1.3). При достаточно малых ε_1, ε_2 и ε_3 справедливо включение $[\tilde{\tau}_i - \varepsilon_2, \tilde{\tau}_i + \varepsilon_1] \subseteq (\tau_i - r, \tau_i + r)$. Тогда по формуле Коши при всех $t \in I$

$$\tilde{x}(t) = X(t, \tilde{\tau}_k + \varepsilon_1)\prod_{i=1}^{k}[(X(\tilde{\tau}_i + \varepsilon_1, \tilde{\tau}_i - \varepsilon_2) + \chi(t - \tau_i)B_i)X(\tilde{\tau}_i - \varepsilon_2, \tilde{\tau}_{i-1} + \varepsilon_1)]X(t_0 + \varepsilon_1, t_0)\tilde{x}_0 \quad (1.5)$$

где

$$B_i = \int_{\tilde{\tau}_i - \varepsilon_2}^{\tilde{\tau}_i + \varepsilon_1} \delta_i(s - \tilde{\tau}_i)X(\tilde{\tau}_i + \varepsilon_1, s)H_i(s)ds$$

При $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ и $\tilde{\tau}_i \to \tau_i$ в силу непрерывности матрицы Коши получаем, что

$$X(t, \tilde{\tau}_k + \varepsilon_1) \to X(t, \tau_k), \quad X(\tilde{\tau}_i + \varepsilon_1, \tilde{\tau}_i - \varepsilon_2) \to E$$

$$X(\tilde{\tau}_i - \varepsilon_2, \tilde{\tau}_{i-1} + \varepsilon_1) \to X(\tau_i, \tau_{i-1}), \quad X(t_0 + \varepsilon_1, t_0) \to E$$

причем эта сходимость равномерная по t на множестве I.

Применяя к каждому элементу матрицы B_i теорему о среднем для интеграла, получаем

$$B_i = P(\bar{\xi})\int_{\tilde{\tau}_i - \varepsilon_2}^{\tilde{\tau}_i + \varepsilon_1} \delta_i(s - \tilde{\tau}_i)ds = P(\bar{\xi})$$

где $P(\bar{\xi})$ – матрица, элементы которой – значения элементов матрицы $X(\tilde{\tau}_i + \varepsilon_1, s)H_i(s)$ в некоторых точках $\xi_{j,k} \in [\tilde{\tau}_i - \varepsilon_2, \tilde{\tau}_i + \varepsilon_1]$. Тогда в силу непрерывности матриц X и H имеет место равномерная сходимость $P(\bar{\xi})$ к $H_i(\tau_i)$ при $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ и $\tilde{\tau}_i \to \tau_i$. Следовательно, $\tilde{x}(t)$ равномерно на множестве I сходится к $x(t)$. Теорема доказана.

Доказательство аналогичной теоремы с помощью техники нестандартного анализа приведено ранее [3, 4].

2. Билинейные импульсные управляемые системы запаздывающего типа. Рассмотрим на отрезке $I = [t_0, t_1]$ билинейную управляемую импульсную систему запаздывающего типа (управляемую импульсную систему)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)U(t)x(t - 0) \quad (2.1)$$

где $A(t)$ и $B(t) = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$ – матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$ с непрерывными элементами, $U(\cdot)$ принадлежит множеству допустимых управлений.

Определение 2.1. Допустимым управлением $U(\cdot)$ будем называть любую конечную последовательность пар $\{(\tau_k, U_k)\}_{k=1}^{p}$, такую, что U_k – $(m \times n)$-матрицы и $t_0 = \tau_0 < \tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_p < t_1$. При этом будем формально использовать запись

$$U(t) = \sum_{k=1}^{p}\delta(t - \tau_k)U_k \quad (2.2)$$

Определение 2.2. Решением импульсной задачи Коши (2.1), (1.2) будем в соответствии с определением (1.2) называть функцию

$$x(t, x_0, U) = X(t, \tau_p)\prod_{k=1}^{p}[(E+\chi(t-\tau_k)B(\tau_k)U_k)X(\tau_k, \tau_{k-1})]x_0$$

Обозначим через

$$x(\tau_j - 0, x_0, U) = X(\tau_j, \tau_{j-1})\prod_{k=1}^{j-1}[(E+B(\tau_k)U_k)X(\tau_k, \tau_{k-1})]x_0$$

значение решения $x(\cdot, x_0, U)$ "перед" импульсом, сосредоточенным в точке τ_j. Обозначим через

$$x(\tau_j + 0, x_0, U) = (E+B(\tau_j)U_j)x(\tau_j - 0, x_0, U)$$

значение решения $x(\cdot, x_0, U)$ "после" импульса, сосредоточенного в точке τ_j. В случае, когда все τ_k различны, эти значения совпадают с левосторонним и правосторонним пределами функции $x(\cdot, x_0, U)$ в точке τ_j.

3. Множество глобальной управляемости. *Определение* 3.1. Назовем множеством управляемости системы (2.1) на I множество всех векторов x_0, таких, что $x(t_1, x_0, U) = 0$ при некотором допустимом управлении U.

Построим по системе (2.1) множества

$$M_j = \sum_{s\in(t_0, t_1)}\langle X(t_0, s)b_j(s)\rangle, \quad M = \sum_{j=1}^{m} M_j \tag{3.1}$$

где угловые скобки обозначают линейную оболочку вектора, а знак суммы – сумму линейных подпространств, понимаемую в следующем смысле: вектор $h \in M_j$ тогда и только тогда, когда существует конечное число точек $\tau_1, \ldots, \tau_q$, индексов $j_1, \ldots, j_q$ и векторов $h_1, \ldots, h_q$, таких, что $t_k \in (t_0, t_1)$, $h = h_1 + \ldots + h_q$, где $h_k \in \langle X(t_0, \tau_k)b_{j_k}(\tau_k)\rangle$.

Лемма 3.1. Множество управляемости системы (2.1) на I вложено в множество M.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольный вектор, такой, что $x(t_1, x_0, U) = 0$ при некотором допустимом управлении $U(t)$ (2.2).

Для любой матрицы U_k имеет место представление

$$(E+B(\tau_k)U_k)x_0 = x_0 + \sum_{j=1}^{m} c_{k,j}b_j(\tau_k), \quad \mathrm{col}(c_{k,1}, \ldots, c_{k,m}) = U_kx_0$$

Тогда

$$x(\tau_1 - 0, x_0, U) = X(\tau_1, t_0)x_0$$

$$x(\tau_1 + 0, x_0, U) = (E+B(\tau_1)U_1)x(\tau_1 - 0, x_0, U) = X(\tau_1, t_0)x_0 + \sum_{j=1}^{m} c_{1,j}b_j(\tau_1)$$

$$x(\tau_2 - 0, x_0, U) = X(\tau_2, \tau_1)x(\tau_1 + 0, x_0, U)$$

$$x(\tau_2 + 0, x_0, U) = X(\tau_2, t_0)x_0 + \sum_{j=1}^{m}[c_{1,j}X(\tau_2, \tau_1)b_j(\tau_1) + c_{2,j}b_j(\tau_2)]$$

Продолжая далее, по индукции получаем

$$x(\tau_p + 0, x_0, U) = X(\tau_p, t_0)x_0 + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m} c_{k,j}X(\tau_p, \tau_k)b_j(\tau_k)$$

$$x(t_1, x_0, U) = X(t_1, t_0)x_0 + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m} c_{k,j}X(t_1, \tau_k)b_j(\tau_k) = 0$$

Умножая последнее равенство слева на $X(t_0, t_1)$, получаем

$$x_0 = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} c_{k,j}X(t_0, \tau_k)b_j(\tau_k)$$

Следовательно, $x_0 \in M$.

Лемма 3.2. Существует допустимое управление U, такое, что $x(t_1, x_0, U) = 0$ для всех $x_0 \in M$.

Доказательство. Так как $M \subseteq \mathbb{R}^n$, то найдутся число $p \le n$, точки $\tau_1, \ldots, \tau_p$ из $[t_0, t_1]$ и индексы $j_1, \ldots j_p$, такие, что $M = \sum_{i=1}^{p} \langle X(t_0, \tau_i)b_{j_i}(\tau_i)\rangle$; кроме того, система векторов $\{X(t_0, \tau_i)b_{j_i}(\tau_i)\}_{i=1}^{p}$ линейно независима.

Рассмотрим управление

$$U(t) = \sum_{k=1}^{p} \delta(\tau_k)U_k$$

такое, что все строки матриц U_k, за исключением строки с номером j_k, нулевые, а строка с номером j_k имеет вид $(\alpha_{k,1}, \ldots\alpha_{k,n})$, где числа $\alpha_{k,j}$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$(\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n})(X(\tau_k, \tau_k)b_{j_k}(\tau_k), \ldots, X(\tau_k, \tau_p)b_{j_p}(\tau_p)) = (-1, 0, \ldots, 0) \tag{3.2}$$

Так как система векторов $\{X(t_0, \tau_i)b_{j_i}(\tau_i)\}_{i=1}^{p}$ линейно независима, то система векторов $\{X(\tau_k, \tau_i)b_{j_i}(\tau_i)\}_{i=k}^{p}$ также линейно независима. Следовательно, система (3.2) имеет решение, т.е. рассматриваемое управление U существует (хотя, в общем случае, не является единственным).

По построению управления U получаем, что

$$B(\tau_k)U_k = b_{j_k}(\tau_k)(\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n})$$

$$(\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n})X(\tau_k, \tau_i)b_{j_i}(\tau_i) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad i = k \\ 0, & \text{если} \quad i > k \end{cases}$$

Тогда

$$(E + B(\tau_k)U_k)X(\tau_k, \tau_i)b_{j_i}(\tau_i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i = k \\ X(\tau_k, \tau_i)b_{j_i}(\tau_i), & \text{если} \quad i > k \end{cases} \tag{3.3}$$

Пусть $x_0 \in M$ – произвольный вектор. Тогда, используя соотношение (3.3), получаем

$$x(\tau_1 - 0, x_0, U) \in \sum_{k=1}^{p} \langle X(\tau_1, \tau_k)b_{j_k}(\tau_k)\rangle$$

$$x(\tau_1 + 0, x_0, U) = (E + B(\tau_1)U_1)x(\tau_1 - 0, x_0, U) \in \sum_{k=2}^{p} \langle X(\tau_1, \tau_k)b_{j_k}(\tau_k)\rangle$$

$$x(\tau_2 - 0, x_0, U) = X(\tau_2, \tau_1)x(\tau_1 + 0, x_0, U) \in \sum_{k=2}^{p} \langle X(\tau_2, \tau_k)b_{j_k}(\tau_k)\rangle$$

$$x(\tau_2 + 0, x_0, U) = (E + B(\tau_2)U_2)x(\tau_2 - 0, x_0, U) \in \sum_{k=3}^{p} \langle X(\tau_2, \tau_k)b_{j_k}(\tau_k)\rangle$$

$\ldots$

$$x(\tau_p - 0, x_0, U) \in \langle X(\tau_p, \tau_p) b_{j_p}(\tau_p) \rangle = \langle b_{j_p}(\tau_p) \rangle$$

$$x(\tau_p + 0, x_0, U) = (E + B(\tau_p) U_p) x(\tau_p - 0, x_0, U) \in \{0\}$$

$$x(t_1, x_0, U) = X(t_1, \tau_p) x(t_p + 0, x_0, U) = 0$$

В силу произвольности вектора x_0 лемма доказана.

Теорема 3.1. Множество M совпадает с множеством управляемости системы (2.1) на I. Кроме того, существует допустимое управление U, такое, что $x(t_1, x_0, U) = 0$ для всех $x_0 \in M$.

Утверждение теоремы 3.1 следует из двух последних лемм.

В отличие от классического случая для импульсных систем согласно теореме 3.1 существует одно и то же допустимое управление U, которое переводит любое начальное состояние из M в момент времени t_0 точно в нуль в момент времени t_1, причем ни моменты времени τ_k, ни матрицы U_k, входящие в управление U, не зависят от начального состояния x_0. Чтобы подчеркнуть этот факт, будем называть множество управляемости множеством глобальной управляемости, а управление U из утверждения теоремы 3.1 – универсальным управлением.

Заметим, что из доказательства теоремы 3.1 легко извлекается конструктивный способ построения универсального управления U.

Определение 3.2. Система (2.1) называется глобально управляемой на I, если ее множество глобальной управляемости совпадает с $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.3. Будем говорить, что система глобально управляема на отрезке $[t_0 - 0,\ t_1 + 0]$, если она глобально управляема на любом отрезке $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$, таком, что $\tilde{t}_0 < t_0$ и $\tilde{t}_1 > t_1$.

Введем в рассмотрение матрицу

$$D_n = \begin{Vmatrix} f_{1,j_1}(\tau_1) & f_{1,j_2}(\tau_2) & \dots & f_{1,j_n}(\tau_n) \\ f_{2,j_1}(\tau_1) & f_{2,j_2}(\tau_2) & \dots & f_{2,j_n}(\tau_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n,j_1}(\tau_1) & f_{n,j_2}(\tau_2) & \dots & f_{n,j_n}(\tau_n) \end{Vmatrix}$$

Лемма 3.3 (о линейно независимых функциях). Для того чтобы функции $f_1(t), f_2(t), \dots$ $\dots, f_n(t)$: $I \to \mathbb{R}^m$ были линейно независимы на множестве I, необходимо и достаточно, чтобы существовали точки $\tau_1, \dots, \tau_n \in I$ и индексы $j_1, \dots, j_n$, такие, что $\det D_n \neq 0$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем индукцией по n необходимость. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть при $n < k$ лемма справедлива. Докажем утверждение леммы при $n = k$. Пусть система функций $\{f_i(t)\}_{i=1}^{k}$ линейно независима на I. Следовательно, по предположению индукции существуют системы точек $\{\tau_i\}_{i=1}^{k-1}$ и индексов $\{j_i\}_{i=1}^{k-1}$, такие, что $\det D_{k-1} \neq 0$. Тогда последняя строка матрицы

$$\begin{Vmatrix} f_{1,j_1} & \dots & f_{1,j_{k-1}}(\tau_{k-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k,j_1} & \dots & f_{k,j_{k-1}}(\tau_{k-1}) \end{Vmatrix}$$

единственным образом выражается в виде линейной комбинации предыдущих строк. Обозначим коэффициенты этой линейной комбинации через $c_1, \dots, c_{k-1}$. Так как функции $f_1, \dots, f_k$ линейно независимы на I, то существует точка $\tau_k \in I$ такая, что

$$f_k(\tau_k) \neq c_1 f_1(\tau_k) + \dots + c_{k-1} f_{k-1}(\tau_k)$$

Тогда найдется индекс j_k такой, что

$$f_{k, j_k}(\tau_k) \neq c_1 f_{1, j_k}(\tau_k) + \ldots + c_{k-1, j_k} f_{k-1}(\tau_k)$$

Следовательно, в силу единственности выбора коэффициентов c_i строки матрицы D_n линейно независимы, а ее определитель не равен нулю.

Рассмотрим строки матрицы $X(t_0, s)B(s)$ как функции переменной s. Выделим из них максимальную линейно независимую на отрезке $[t_0, t_1]$ подсистему и представим $X(t_0, s)B(s)$ в виде

$$X(t_0, s)B(s) = h_1 f_1(s) + h_2 f_2(s) + \ldots + h_q f_q(s)$$

где $h_1, \ldots, h_q$ – некоторые постоянные векторы, а строки-функции $f_1(\cdot), \ldots, f_q(\cdot)$ – линейно независимы на отрезке $[t_0, t_1]$.

Теорема 3.2. Множество глобальной управляемости M совпадает с линейной оболочкой $\langle h_1, \ldots, h_q \rangle$.

Доказательство. По формуле (3.1) очевидно, что $M \subseteq \langle h_1, \ldots, h_q \rangle$. Докажем, что $\langle h_1, \ldots, h_q \rangle \subseteq M$. Пусть h – произвольный вектор, такой, что $h = \alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_q h_q$. Так как функции $f_k(\cdot)$ линейно независимы, то по лемме 3.3 найдутся точки $s_1, \ldots s_q$ и индексы $j_1, \ldots, j_q$, такие, что матрица

$$D = \left\| \begin{matrix} f_{1, j_1}(s_1) & \ldots & f_1(s_{q, j_q}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{q, j_1}(s_1) & \ldots & f_q(s_{q, j_q}) \end{matrix} \right\|$$

будет невырожденной. Тогда

$$X(t_0, s_k)b_{j_k}(s_k) = \sum_{i=1}^{q} h_i f_{i, j_k}(s_k)$$

Приравнивая коэффициенты при векторах h_i, получаем, что

$$h = \sum_{k=1}^{q} c_k X(t_0, s_k) b_{j_k}(s_k)$$

причем постоянные c_k удовлетворяют линейной системе уравнений

$$D\mathrm{col}(c_1, \ldots, c_q) = \mathrm{col}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$$

Следовательно, $h \in M_j$.

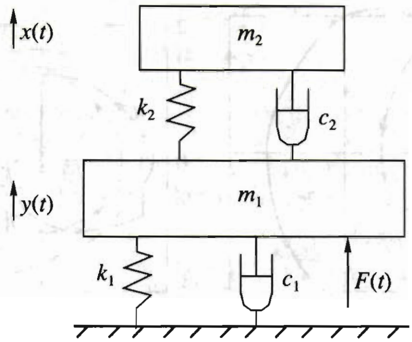
Теорема 3.3. Импульсная система (2.1) глобально управляема на отрезке $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда соответствующая классическая система $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$ вполне управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Из теоремы 3.2 следует, что система (2.1) глобально управляема на I тогда и только тогда, когда строки матрицы $X(t_0, s)B(s)$ линейно независимы на I. Согласно критерию Н.Н. Красовского [5] линейная независимость строк матрицы $X(t_0, s)B(s)$ эквивалентна полной управляемости классической линейной управляемой системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$.

Следствие. На любом отрезке $[t_0, t_1]$ множество глобальной управляемости стационарной импульсной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BU(t)x(t-0)$$

совпадает с линейной оболочкой столбцов матриц $B, AB, A^2 B, \ldots, A^{n-1}B$.



Фиг. 1

Пример. Рассмотрим изображенную на фиг. 1 конструкцию, состоящую из двух колебательных звеньев. Здесь m_1 и m_2 – массы звеньев, k_1 и k_2 – коэффициенты жесткости, c_1 и c_2 – коэффициенты вязкости.

Обозначим через x и y смещения масс m_2 и m_1 относительно положения равновесия. Согласно второму закону Ньютона движение конструкции описывается системой уравнений

$$m_2\ddot{x} = -k_2(x-y) - c_2(\dot{x}-\dot{y})$$

$$m_1\ddot{y} = -k_1 y - c_1\dot{y} + k_2(x-y) + c_2(\dot{x}-\dot{y}) + F(t)$$

Обозначив $z = \mathrm{col}(x,\ \dot{x},\ y,\ \dot{y})$ и $u(t) = F(t)/m_1$, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка $\dot{z} = Az + u(t)B$,
где

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{c_2}{m_2} & \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{c_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{c_2}{m_1} & -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & -\dfrac{c_1+c_2}{m_1} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|$$

Будем строить управление $u(t)$ по принципу обратной связи, т.е.

$$u(t) = U(t)z(t-0)$$

Тогда получим замкнутую систему

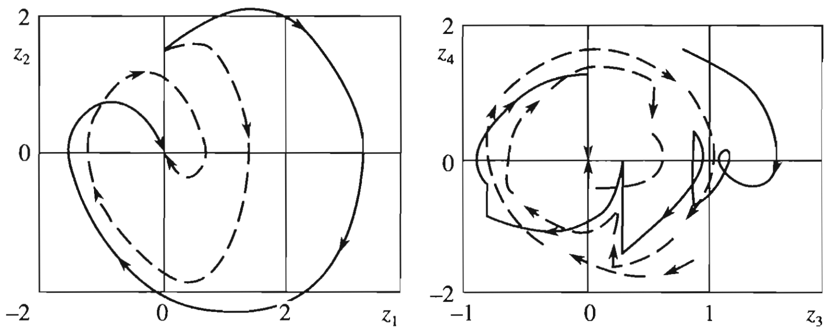
$$\dot{z}(t) = Az(t) + BU(t)z(t-0) \tag{3.4}$$

Зафиксируем значения параметров конструкции

$$m_1 = 10, \quad m_2 = 7, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 8, \quad c_1 = 0.1, \quad c_2 = 0.2$$

По следствию из теоремы 3.3 система (3.4) глобально управляема на любом отрезке. Зафиксируем начальный момент времени и моменты времени импульсов

$$t_0 = 0, \quad \tau_1 = 4, \quad \tau_2 = 5, \quad \tau_3 = 6.5, \quad \tau_4 = 8$$



Фиг. 2

Строим методом, описанным в доказательстве леммы 3.2, универсальное управление (2.2) ($p = 4$). Получаем

$$U_1 \approx (0.4694, -0.3791, -0.6823, -1)$$

$$U_2 \approx (0, 0.6026, 1.0073, -1)$$

$$U_3 \approx (0, 0, 0.4186, -1)$$

$$U_4 \approx (0, 0, 0, -1)$$

На фиг. 2 траектории системы (3.4), отвечающие начальному условию $z(0) = \operatorname{col}(0, 1.6, 0.8, 1.6)$, показаны сплошными кривыми, а отвечающие начальному условию $z(0) = \operatorname{col}(0, 1.6, 0.8, -1.6)$ – штриховыми кривыми.

Работа выполнена при поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания (E00-1.0-5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е.* Динамические системы с импульсной структурой. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1983. 112 с.
3. *Оленчиков Д.М.* Импульсное управление показателями Ляпунова. 1 // Фундамент. и прикл. математика. 2002. Т. 8. Вып. 1. С. 151–169.
4. *Оленчиков Д.М.* Импульсное управление показателями Ляпунова. 2 // Фундамент. и прикл. математика. 2002. Т. 8. Вып. 1. С. 171–185.
5. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.

Ижевск
e-mail: diol@idz.ru

Поступила в редакцию
17.II.2003