

УДК 62-50

© 2004 г. Р. Габасов, Н. М. Дмитрук, Ф. М. Кириллова

**ОПТИМАЛЬНОЕ УСЛОВНО-ОТНОСИТЕЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

Рассматривается возникающая при управлении в условиях неопределенности задача оптимального наблюдения, в которой при неполноте определенном начальном состоянии динамической системы требуется путем обработки неполных и неточных измерений текущих состояний получить информацию о ее выходном сигнале. Задача исследуется для трех типов помех в измерительном устройстве. Описываются методы построения апостериорных и позиционных решений. Результаты иллюстрируются на примере наблюдения динамической системы четвертого порядка.

В теории управляемых систем с усложнением объектов управления и ужесточением требований к качеству систем управления неуклонно растет размерность используемых математических моделей. При этом часто априорная информация о начальных значениях многих фазовых переменных известна с ограниченной точностью, а существующие измерительные устройства могут неточно измерять лишь некоторые выходные сигналы физической системы. С другой стороны, для целей управления интерес могут представлять только отдельные фазовые переменные. В этой ситуации для управления динамической системой приходится от обратных связей по состоянию переходить к обратным связям по выходу. Поскольку выходные сигналы измеряются с ограниченной точностью, при реализации обратных связей возникает проблема наблюдения – проблема обработки доступных измерений с целью получения информации о представляющих интерес переменных.

В теории наблюдения используются множественные и вероятностные модели неопределенностей. Первые задачи оптимального наблюдения с множественными моделями поставлены и решены Н.Н. Красовским [1]. Подобные задачи исследовались затем и другими авторами [2–4]. Со стохастической теорией наблюдения (теорией фильтрации) можно ознакомиться по монографии Леондеса [5].

Данная работа примыкает к предыдущим исследованиям с участием авторов [6–9]. Ее цель – описать конструктивный метод решения задачи оптимального условно-относительного наблюдения [7–9] с учетом трех классов помех в измерительном устройстве. Основное внимание уделяется алгоритму работы оптимального эстиматора, который в реальном времени вычисляет текущие оценки выходного сигнала динамической системы. Это позволяет использовать результаты при управлении в реальном времени системами с неопределенностями.

1. Апостериорное и позиционное наблюдение. Рассмотрим динамическую систему, поведение математической модели которой на промежутке времени $T = [t_*, t^*]$, $-\infty < t_* < t^* < \infty$, описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.1}$$

Здесь $x = x(t) - n$ -вектор (столбец) состояния системы в момент времени t ; $A(t) \in R^{n \times n}$, $t \in T$, – кусочно-непрерывная $(n \times n)$ -матричная функция.

Считаем, что начальное состояние $x(t_*)$ системы не известно точно, а имеет вид

$$x(t_*) = x_0 + G\omega$$

где x_0 – известный n -вектор, $G = (g_{(i)}, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}) - (n \times n_\omega)$ -матрица ($g_{(i)}$ – i -я строка); $\omega - n_\omega$ -вектор неизвестных параметров, принадлежащий ограниченному множеству

$$\Omega = \{\omega \in R^{n_\omega} : d_* \leq \omega \leq d^*\}$$

Множество Ω характеризует априорную неопределенность в поведении системы (1.1); назовем его априорным распределением параметров начального состояния. Ему соответствует априорное распределение $X_0 = x_0 + G\Omega$ начального состояния $x(t_*)$. Заметим, что здесь лишь для упрощения последующих выкладок рассматривается параллелепипедное множество, результаты можно обобщить на случай произвольного полиэдрального множества.

Предположим, что в связи с некоторой задачей управления интерес представляет информация о выходном сигнале системы (1.1)

$$z(\tau_*) = Hx(\tau_*)$$

где $\tau_* \in T$ – заданный момент, $H = (h_j, j \in I)$, – заданная $m \times n$ -матрица, h_j – ее j -й столбец. Априорным распределением выходного сигнала назовем множество $Z = HX_{\tau_*}$, где $X_{\tau_*} = x_0(\tau_*) + \Phi(\tau_*)\Omega$ – априорное распределение состояния $x(\tau_*)$ системы (1.1); $x_0(t), t \in T$, – траектория системы (1.1) с начальным состоянием $x(t_*) = x_0$; $\Phi(t), t \in T$, – $(n \times n_\omega)$ -матричная функция, решение уравнения

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(t_*) = G \tag{1.2}$$

Если $n_\omega < n, m < n, \tau_* = t_*$ и матрицы G, H имеют вид (штрих означает транспонирование)

$$G = (E \in R^{n_\omega \times n_\omega}; 0 \in R^{(n-n_\omega) \times n_\omega}), \quad H = (E \in R^{m \times m}; 0 \in R^{m \times (n-m)})$$

то у системы (1.1) не известны первые n_ω координат начального состояния и интерес представляет информация о первых m координатах начального состояния.

Для уменьшения априорной неопределенности векторов $\omega, x(t_*), z$ будем вести за системой (1.1) наблюдение, обрабатывая записываемые в дискретные моменты $t \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^*\}$ ($h = (t^* - t_*)/N, N$ – натуральное число) сигналы $y(t_*), y(t_* + h), \dots, y(t^*)$ измерительного устройства

$$y = c'(t)x + \xi \tag{1.3}$$

где $c(t), t \in T$, – известная непрерывная n -вектор-функция.

Устройство (1.3) с ошибкой ξ измеряет одну комбинацию $c_1(t)x_1 + \dots + c_n(t)x_n(t)$ компонент вектора x . Функция ошибок измерения $\xi = \xi(t), t \in T$, кусочно-непрерывна и удовлетворяет неравенствам

$$\xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, \quad t \in T_h \tag{1.4}$$

в которых числа ξ_*, ξ^* характеризуют точность измерения.

Задача наблюдения состоит в получении информации о реализовавшемся выходном сигнале z путем обработки априорной информации Z и результатов измерений.

Будем различать задачи апостериорного и позиционного наблюдения. Задача апостериорного наблюдения решается после проведения всех измерений; время, потраченное на ее решение, не имеет существенного значения. Задача позиционного наблюдения решается в процессе измерений и нацелена на получение текущей информации о векторе z по текущим измерениям. При решении задачи позиционного наблюдения время построения оценок вектора z играет решающую роль. Задачи апостериорного и позиционного наблюдения представляют собой двойственные аналоги задач программного и позиционного управления.

2. Задача оптимального наблюдения. Пусть $y(\cdot) = (y(t), t \in T_h)$ – совокупность всех проведенных измерений.

Определение. Множество $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(t^*; y(\cdot))$ назовем апостериорным распределением параметров начального состояния ω , соответствующим терминальной позиции $(t^*; y(\cdot))$, если оно состоит из тех и только тех векторов $\omega \in \Omega$, которым соответствуют начальные состояния $x(t_*) = x_0 + G\omega$, способные вместе с некоторыми возможными $\xi(t)$, $t \in T_h$, породить сигнал $y(\cdot)$. Элементы $\omega \in \hat{\Omega}$ будем называть (апостериорно) возможными значениями параметров начального состояния.

Множеству $\hat{\Omega}$ соответствуют апостериорные распределения

$$\hat{X}_0 = \hat{X}_0(t^*; y(\cdot)) = x_0 + G\hat{\Omega}, \quad \hat{Z} = \hat{Z}(t^*; y(\cdot)) = H(x_0(\tau_*) + \Phi(\tau_*)\hat{\Omega})$$

начального состояния и выходного сигнала. Множество \hat{X}_0 под другими названиями использовалось в [2, 3].

Для некоторых задач оптимального управления с гарантией [10] интерес представляет не все множество \hat{Z}_0 , а только некоторые его оценки (числовые характеристики). В связи с этим, следуя описанному ранее подходу [6], задачей оптимального апостериорного наблюдения назовем экстремальную задачу (q – заданный m -вектор, $\|q\| = 1$)

$$\hat{\alpha}(t^*; y(\cdot)) = q'z^0(t^*; y(\cdot)) = \max q'z, \quad z \in \hat{Z} \quad (2.1)$$

Вектор $z^0 = z^0(t^*; y(\cdot))$ (экстремальный выходной сигнал) и соответствующую ему оценку $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(t^*; y(\cdot))$ будем называть апостериорным решением задачи оптимального наблюдения (2.1) (или решением задачи оптимального апостериорного наблюдения).

Перейдем к формулировке задачи оптимального позиционного наблюдения. Пусть $\tau \in T_h$ – произвольный текущий момент времени, $y_\tau(\cdot) = (y(t_*), y(t_* + h), \dots, y(\tau))$ – совокупность измерений, проведенных к этому моменту времени; $Y(\tau)$ – множество всех возможных сигналов $y_\tau(\cdot)$. Множество $\hat{\Omega}(\tau) = \hat{\Omega}(\tau, y_\tau(\cdot))$ назовем текущим распределением параметров начального состояния для позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$; ему соответствуют текущие распределения

$$\hat{X}_0(\tau) = \hat{X}_0(\tau; y_\tau(\cdot)) = x_0 + G\hat{\Omega}(\tau)$$

$$\hat{Z}(\tau) = \hat{Z}(\tau; y_\tau(\cdot)) = H(x_0(\tau_*) + \Phi(\tau_*)\hat{\Omega}(\tau))$$

начального состояния и выходного сигнала.

Семейство задач

$$\hat{\alpha}(\tau) = \max q'z, \quad z \in \hat{Z}(\tau) \quad (2.2)$$

зависящих от сигнала $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$ и момента $\tau \in T_h$, назовем задачей оптимального позиционного наблюдения.

Решением этой задачи (позиционным решением задачи оптимального наблюдения (ПРЗОН)) будем называть функционалы

$$\omega^0(\tau, y_\tau(\cdot)), x^0(\tau, y_\tau(\cdot)), z^0(\tau, y_\tau(\cdot)), \hat{\alpha}(\tau, y_\tau(\cdot)), \quad y_\tau(\cdot) \in Y(\tau), \tau \in T_h \quad (2.3)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$x^0(\tau, y_\tau(\cdot)) = x_0 + G\omega^0(\tau, y_\tau(\cdot)), \quad z^0(\tau, y_\tau(\cdot)) = H(x_0(\tau_*) + \Phi(\tau_*)\omega^0(\tau, y_\tau(\cdot)))$$

$$\hat{\alpha}(\tau, y_\tau(\cdot)) = q'z^0(\tau, y_\tau(\cdot)) = \max q'z, \quad z \in \hat{Z}(\tau)$$

Понятно, что ПРЗОН состоит из заранее (до начала процесса наблюдения) заготовленных отображений всех возможных измерений в представляющие интерес оценки. Знание ПРЗОН позволяет вести наблюдения (получать оценки вектора z) по ходу измерений. Для этого достаточно в каждый текущий момент времени $\tau \in T_h$, получив очередное измерение $y(\cdot)$, составить вектор $y_\tau(\cdot)$ и подставить его в функционалы (2.3), что даст текущую оценку $\hat{\alpha}(\tau, y_\tau(\cdot))$.

ПРЗОН является аналогом позиционного решения задачи оптимального управления (оптимального управления типа обратной связи). В теории управления позиционные решения при использовании совершенных измерений состояний реализуются с помощью систем управления с замкнутыми контурами, включающими обратные связи по состоянию. ПРЗОН используются при управлении по несовершенным измерениям и реализуются с помощью части замкнутого контура. Остальная часть реализует управление по оценкам, получаемым в первой части. В совокупности обе части замкнутого контура реализуют управление типа обратной связи по выходу. Как и в случае оптимального управления типа обратной связи, построение ПРЗОН (2.3) в замкнутой форме невозможно для нетривиальных случаев, т.е. невозможно реализовать принцип оптимального наблюдения по "замкнутому" контуру. В связи с этим для реализации ПРЗОН перейдем к принципу оптимального наблюдения в реальном времени, который является аналогом принципа оптимального управления в реальном времени, описанным в [11]. При оптимальном наблюдении в реальном времени функционалы (2.3) не составляются заранее, а представляющие интерес оценки вычисляются в процессе наблюдения по мере поступления измерений.

Оптимальное наблюдение в реальном времени основано на следующем анализе.

Предположим, что ПРЗОН (2.3) построено. Оно основано на математической модели (1.1), но предназначено, понятно, для ее физического прототипа. Предположим, что поведение последнего описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + w \tag{2.4}$$

где w – совокупность членов, описывающих неточности математического моделирования и возмущения, действующие на физическую систему.

Рассмотрим конкретный процесс наблюдения, в котором реализовался неизвестный наблюдателю вектор параметров начального состояния ω^* , породивший начальное состояние $x^*(t_*) = x_0 + G\omega^*$. Это начальное состояние реального физического прототипа (2.4), неизвестные возмущения $w^*(t)$, $t \in T$, и реализовавшиеся ошибки $\xi^*(t)$, $t \in T_h$, измерительного устройства породят траекторию $x^*(t|t_*, x^*(t_*))$, $t \in [t_*, \tau]$, системы (2.4) и измеренный к моменту τ сигнал $y_\tau^*(\cdot)$. Решение задачи (2.2) для позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ дают функционалы (2.3), которые вдоль сигнала

$$y_\tau^*(t) \equiv c'(t)x^*(t|t_*, x^*(t_*)) + \xi^*(t), t \in T_h(\tau) = \{t_*, t_* + h, \dots, \tau\}$$

удовлетворяют тождествам

$$x^0(\tau, y_\tau^*(\cdot)) \equiv x_0 + G\omega^0(\tau, y_\tau^*(\cdot)), \quad z^0(\tau, y_\tau^*(\cdot)) \equiv H(x_0(\tau_*) + \Phi(\tau_*)\omega^0(\tau, y_\tau^*(\cdot)))$$

$$\hat{\alpha}(\tau, y_\tau^*(\cdot)) \equiv q'z^0(\tau, y_\tau^*(\cdot)), \quad \tau \in T_h$$

Отсюда видно, что в конкретном процессе наблюдения ПРЗОН (2.3) не используется полностью (для всех $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$, $\tau \in T_h$), нужны лишь его значения вдоль реализующихся сигналов $y_\tau^*(\cdot)$, $\tau \in T_h$, измерительного устройства.

Функции

$$\omega^*(\tau) = \omega^0(\tau, y_\tau^*(\cdot)), \quad x^*(\tau) = x^0(\tau, y_\tau^*(\cdot))$$

$$z^*(\tau) = z^0(\tau, y_\tau^*(\cdot)), \quad \hat{\alpha}^*(\tau) = \hat{\alpha}(\tau, y_\tau^*(\cdot)), \quad \tau \in T_h$$

назовем реализацией ПРЗОН в конкретном процессе наблюдения. Устройство, способное при $\tau \in T_h$ вычислять значение $z^*(\tau)$ для каждой текущей позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ за время $s(\tau)$, не превосходящее h , будем называть оптимальным эстиматором, реализующим позиционное наблюдение в реальном времени. Таким образом, проблема оптимального позиционного наблюдения свелась к построению алгоритма работы оптимального эстиматора.

3. Построение апостериорного решения. Для аналитической формулировки задачи (2.1) опишем множество \hat{Z} . Сигнал измерительного устройства (1.3) для вектора параметров начального состояния $\omega \in \Omega$ и функции ошибок $\xi(t)$, $t \in T_h$, имеет вид

$$y(t) = c'(t)x(t) + \xi(t) = c'(t)x_0(t) + c'(t)\Phi(t)\omega + \xi(t), \quad t \in T_h$$

При измеренном сигнале $y(t)$, $t \in T_h$, множество \hat{Z} при учете ограничения (1.4) состоит из тех и только тех векторов z , которые удовлетворяют соотношениям

$$z = H(x_0(\tau_*) + \Phi(\tau_*)\omega);$$

$$\xi_* \leq y(t) - c'(t)x_0(t) - c'(t)\Phi(t)\omega \leq \xi^*, \quad t \in T_h; \quad \omega \in \Omega$$

Обозначим $p' = q'H\Phi(\tau_*)$. Тогда задача (2.1) примет вид

$$p'\omega^0 = \max p'\omega$$

$$\xi_* \leq y(t) - c'(t)x_0(t) - c'(t)\Phi(t)\omega \leq \xi^*(t), \quad t \in T_h; \quad d_* \leq \omega \leq d^* \quad (3.1)$$

При этом

$$x^0 = x_0 + G\omega^0, \quad z^0 = H(x_0(\tau_*) + \Phi(\tau_*)\omega^0)$$

Задача (3.1) – интервальная задача линейного программирования (ЛП) с $N + 1$ основными ограничениями и n_ω переменными. В отличие от общей задачи ЛП ее элементы имеют динамическую природу. Ниже описывается двойственный метод, который представляет специальную быструю динамическую реализацию двойственного адаптивного метода ЛП [12]. Как и в случае задачи оптимального управления, основные затраты времени при решении задач оптимального наблюдения связаны с интегрированием прямой системы, поэтому, как и ранее [11], при оценке эффективности метода за единицу трудоемкости принимается одно интегрирование прямой системы на всем промежутке наблюдения T .

Основным инструментом двойственного метода является опора – такая пара

$$K_b = \{T_b, J_b\}, \quad T_b \subset T_h, \quad J_b \subset J = \{1, 2, \dots, n_\omega\}, \quad |T_b| = |J_b|$$

что в случае непустых множеств T_b, J_b не вырождена матрица

$$D_b = D(T_b, J_b) = (-c'(t)\Phi_j(t), j \in J_b, t \in T_b)$$

Если множества T_b, J_b пусты, то K_b – пустая опора по определению.

При решении задачи (3.1) наряду с опорой K_b используются сопровождающие ее элементы.

1°. Функция потенциалов $v(t)$, $t \in T_h$: $v(t) = 0$, $t \in T_n = T_h \setminus T_b$; $v_b = (v(t), t \in T_b)$ – решенные уравнения

$$v'_b D_b = p'_b, \quad p_b = (p_j, j \in J_b) \tag{3.2}$$

2°. Вектор оценок

$$\delta' = p' + \sum_{t \in T_b} v(t) c'(t) \Phi(t) \tag{3.3}$$

Опорные компоненты вектора оценок равны нулю: $\delta_j = 0, j \in J_b$.

3°. Вектор псевдопараметров κ ; его неопорные компоненты $\kappa_j, j \in J_n = J \setminus J_b$, таковы:

$$\begin{aligned} \kappa_j &= d_{*j}, \quad \text{если } \delta_j < 0; \quad \kappa_j = d_j^*, \quad \text{если } \delta_j > 0 \\ \kappa_j &\in [d_{*j}, d_j^*], \quad \text{если } \delta_j = 0; \quad j \in J_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

Опорные компоненты $\kappa_b = (\kappa_j, j \in J_b)$ вычисляются из уравнения

$$D_b \kappa_b = (\zeta(t) - y(t) + c'(t)x_0(t) + c'(t)\Phi(t)\kappa_0, t \in T_b) \tag{3.5}$$

где

$$\zeta(t) = \xi_*, \quad \text{если } v(t) < 0; \quad \zeta(t) = \xi^*, \quad \text{если } v(t) > 0$$

$$\zeta(t) \in [\xi_*, \xi^*], \quad \text{если } v(t) = 0; \quad t \in T_b$$

$$\kappa_0 = (\kappa_{0j} = 0, j \in J_b; \kappa_{0j} = \kappa_j, j \in J_n)$$

4°. Функция псевдоошибок

$$\zeta(t) = y(t) - c'(t)x_0(t) - c'(t)\Phi(t)\kappa, \quad t \in T_h \tag{3.6}$$

Определения. Опору K_b назовем регулярной, если сопровождающие ее элементы удовлетворяют соотношениям $v(t) \neq 0, t \in T_b$; $\delta_j \neq 0, j \in J_n$.

Опору K_b^0 назовем оптимальной, если на некоторых сопровождающих ее векторе псевдопараметров κ и функции псевдоошибок $\zeta(t), t \in T_h$, выполняются неравенства

$$d_{*j} \leq \kappa_j \leq d_j^*, \quad j \in J_b; \quad \xi_* \leq \zeta(t) \leq \xi^*, \quad t \in T_n$$

Вектор псевдопараметров, сопровождающий оптимальную опору, является решением задачи (3.1). Экстремальный выходной сигнал равен $z^0 = H(x_0(\tau_*) + \Phi(\tau_*)\kappa)$.

При применении двойственного метода решения задачи оптимального апостериорного наблюдения (2.1) итерации начинаются с произвольной опоры K_b^1 (возможно, пустой) и решение завершается построением оптимальной опоры K_b^0 . Каждая итерация метода представляет собой замену “старой” опоры K_b на “новую” \bar{K}_b , при которой выполняется неравенство $p'\bar{\kappa} \leq p'\kappa$. Ниже с целью сокращения объема статьи описываются только основные операции двойственного метода. Их обоснование легко выводится из полученных ранее результатов [12].

Момент $t \in T_h \setminus \{t_*, t^*\}$ будем называть точкой минимума функции псевдоошибок $\zeta(t)$, $t \in T_h$, если $\zeta(t) < \zeta(t-h)$ и $\zeta(t) < \zeta(t+h)$; точкой максимума, если $\zeta(t) > \zeta(t-h)$ и $\zeta(t) > \zeta(t+h)$. Множество всех точек экстремума обозначим через T_0 .

К началу каждой итерации в памяти ЭВМ хранится следующая информация: 1) опора K_b , 2) матрица $D_{(b)} = (-c'(t)\Phi(t), t \in T_b)$, 3) опорные значения функции потенциалов v_b , 4) вектор оценок δ , 5) псевдосостояние κ , 6) множество T_0 , 7) значения $x_0(t)$, $\Phi(t)$, $t \in T_0 \cup \{t^*, t^*\}$.

По информации 1–7, учитывая формулу (3.6), подсчитаем

$$\rho^0(K_b) = \max \left\{ \rho_{j^0}, \rho(t^0) \right\}$$

$$\rho_{j^0} = \max \rho(\kappa_j, [d_{*j}, d_j^*]), j \in J_b$$

$$\rho(t^0) = \max \rho(\zeta(t), [\xi_*, \xi^*]), t \in T_0 \cup \{t^*, t^*\}$$

($\rho(c, [a, b])$ – расстояние от числа c до отрезка $[a, b]$).

Если $\rho^0(K_b) = 0$, то K_b – оптимальная опора. Иначе построим вариации функции потенциалов $\Delta v(t)$, $t \in T_b$, в зависимости от двух случаев

Случай 1. При $\rho^0 = \rho_{j^0}$: $\Delta v(t) = 0$, $t \in T_n$; $\Delta v_b' D_b = -(\Delta \delta_j, j \in J_b)'$, $\Delta \delta_{j^0} = 1$, если $\kappa_{j^0} > d_{j^0}^*$; $\Delta \delta_{j^0} = -1$, если $\kappa_{j^0} < d_{*j^0}$; $\Delta \delta_j = 0$, $j \in J_b \setminus j^0$.

Случай 2. При $\rho^0 = \rho(t^0)$: $\Delta v(t) = 0$, $t \in T_n \setminus t^0$; $\Delta v_b' D_b = \Delta v(t^0)(c'(t^0)\Phi_j(t^0))'$, $j \in J_b$, $\Delta v(t^0) = 1$, если $\zeta(t^0) > \xi^*$; $\Delta v(t^0) = -1$, если $\zeta(t^0) < \xi_*$.

Найдем вариацию вектора оценок

$$\Delta \delta' = \sum_{t \in T_b \cup t^0} \Delta v(t) c'(t) \Phi(t)$$

Вычислим

$$\sigma_j = -\delta_j / \Delta \delta_j, \text{ если } \delta_j \Delta \delta_j < 0; \sigma_j = \infty, \text{ если } \delta_j \Delta \delta_j \geq 0; j \in J_n$$

$$\sigma(t) = -v(t) / \Delta v(t), \text{ если } v(t) \Delta v(t) < 0$$

$$\sigma(t) = \infty, \text{ если } v(t) \Delta v(t) \geq 0; t \in T_b$$

С целью упрощения выкладок считаем, что числа $\sigma_j, j \in J_n$; $\sigma(t), t \in T_b$, различны и отличны от нуля (ранее [12] исследован общий случай). Пронумеруем конечные из них в порядке возрастания: $0 < \sigma^1 < \sigma^2 < \dots < \sigma^{k_\sigma}$.

Подсчитаем

$$\alpha^1 = -\rho(K_b); \alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta \alpha^k$$

$$\Delta \alpha^k = (d_{j^k}^* - d_{*j^k}) |\Delta \delta_{j^k}|, \text{ если } \sigma^k = \sigma_{j^k}$$

$$\Delta \alpha^k = (\xi^* - \xi_*) |\Delta v(t^k)|, \text{ если } \sigma^k = \sigma(t^k), k = 1, \dots, k_\sigma$$

Двойственным шагом назовем такое число $\sigma^* = \sigma^{k^*}$, что $\alpha^{k^*} < 0$, $\alpha^{k^*+1} \geq 0$.

В зависимости от а) $\sigma^* = \sigma_{j^k}$, б) $\sigma^* = \sigma(t^k)$ построим новую опору $\bar{K}_b = \{ \bar{T}_b, \bar{J}_b \}$:

$$1a) \bar{T}_b = T_b, \bar{J}_b = (J_b \setminus j^0) \cup j^{k^*}; \quad 1b) \bar{T}_b = T_b \setminus t^{k^*}, \bar{J}_b = J_b \setminus j^0$$

$$2a) \bar{T}_b = T_b \cup t^0, \bar{J}_b = J_b \cup j^{k^*}; \quad 2b) \bar{T}_b = (T_b \setminus t^{k^*}) \cup t^0, \bar{J}_b = J_b$$

По завершении итерации преобразуем информацию 2–7 для новой опоры \bar{K}_b .

Матрицу $D_{(b)}$ в случае 1а не изменяем; в случае 1б удалим из $D_{(b)}$ строку, соответствующую моменту $t^{k*} \in T_b$. В случае 2 добавим в матрицу $D_{(b)}$ строку $-c'(t^0)\Phi(t^0)$, соответствующую моменту t^0 (значение $\Phi(t^0)$ хранится в памяти ЭВМ, поскольку $t^0 \in T_0$), а в случае 2б, кроме того, удалим строку $-c'(t^{k*})\Phi(t^{k*})$.

Опорные значения функции потенциалов \bar{v}_b и вектор оценок $\bar{\delta}$ пересчитаем по формулам (3.2), (3.3). По правилам (3.4) построим неопорные компоненты вектора псевдопараметров $\bar{k}_j, j \in J_n$. Решив систему (3.5), найдем \bar{k}_b .

Для осуществления коррекции информации 6–7 построим вариацию псевдосостояния $\Delta k = \bar{k} - k$ и порождаемую ею вариацию функции псевдоошибок $\Delta \zeta(t) = -c'(t)\Phi(t)\Delta k$. Пусть

$$\zeta(t, \vartheta) = \zeta(t) + \vartheta \Delta \zeta(t), \quad t \in T_h, \vartheta \geq 0 \tag{3.7}$$

При изменении ϑ на отрезке $[0, 1]$ точки экстремума функции (3.7) будут перемещаться от экстремумов $\zeta(t) = \zeta(t, 0), t \in T_h$, к экстремумам $\bar{\zeta}(t) = \zeta(t, 1), t \in T_h$. Направления $s(t), t \in T_0 \cup \{t_*, t^*\}$, этих перемещений определим следующим образом: $s(t) = 1$, если $(\zeta(t+h) - \zeta(t))/(\Delta \zeta(t+h) - \Delta \zeta(t)) < 0$, $s(t) = -1$ в противном случае, $t \in T_0$; $s(t_*) = 1, s(t^*) = -1$.

В связи со сказанным для каждого момента $t \in T_0 \cup \{t_*, t^*\}$ выполним следующую последовательность действий.

1°. Вычислим число

$$\vartheta(t) = -(\zeta(t+s(t)h) - \zeta(t))/(\Delta \zeta(t+s(t)h) - \Delta \zeta(t)) \tag{3.8}$$

2°. Если $0 < \vartheta(t) < 1$, то функция (3.7) в малой правосторонней окрестности $\vartheta = \vartheta(t)$ имеет точкой экстремума $t + s(t)h \in T_h$. В множестве T_0 заменим момент t на $t + s(t)h$; вместо $x_0(t), \Phi(t)$ запомним $x_0(t + s(t)h), \Phi(t + s(t)h)$.

3°. Повторим операции 1°, 2° для момента $t + s(t)h$ ($s(t + s(t)h) = s(t)$), до тех пор пока не будет выполнено либо неравенство $\vartheta(t) \geq 1$, либо неравенство $\vartheta(t) \leq 0$, либо условие $t + s(t)h \notin T_h$. Два последних случая характеризуют исчезновение точек экстремума функции (3.7); удалим из множества T_0 момент t , из памяти ЭВМ – значения $x_0(t), \Phi(t)$.

Замечание. В данной работе случай появления новых точек экстремума внутри интервала T не рассматривается. Он может быть исследован с помощью точек экстремума функции $\zeta^1(t) = (\zeta(t+h) - \zeta(t))/h, t \in T_h \setminus t^*$.

Трудоемкость итерации метода определяется длиной максимального отрезка перемещения точек экстремума $t \in T_0$. Представление о ней можно получить из численно-го эксперимента (см. ниже).

Теорема [12]. Метод конечен, если на итерациях опоры регулярны.

Можно построить [12] конечную модификацию метода для любой задачи (3.1).

4. Реализация позиционного решения. Согласно сказанному в разд. 2, реализация позиционного решения осуществляется с помощью оптимального эстиматора (ОЭ). До начала процесса наблюдения он вычисляет оценку $\hat{\alpha}^*(t_* - 0)$ и экстремальный выходной сигнал

$$z^*(t_* - 0) = H(x_0(\tau_*) + \Phi(\tau_*)\omega^*(t_* - 0))$$

по решению $\omega^*(t_* - 0)$ задачи

$$p'\omega \rightarrow \max, \quad \omega \in \Omega$$

и сохраняет оптимальную опору $K_b^0(t_* - 0)$ для дальнейших операций.

Предположим, что ОЭ проработал на отрезке $[t_*, \tau]$, вычислив по реализовавшемуся сигналу $y_\tau^*(\cdot)$ векторы $\omega^*(t)$, $x^*(t)$, $z^*(t)$, $t \in T_h(\tau)$ и оценки $\hat{\alpha}^*(t)$, $t \in T_h(\tau)$. В момент $\tau + h$ ОЭ становится известным измерение $y^*(\tau + h)$, и он должен быстро подсчитать значения $\omega^*(\tau + h)$, $x^*(\tau + h)$, $z^*(\tau + h)$, $\hat{\alpha}^*(\tau + h)$.

По предположению, в предыдущий момент τ (точнее, на отрезке $[\tau, \tau + s(\tau)[$) ОЭ решил задачу

$$\begin{aligned} p' \omega &\rightarrow \max \\ \xi_* &\leq y^*(t) - c'(t)x_0(t) - c'(t)\Phi(t)\omega \leq \xi^*, \quad t \in T_h(\tau); \quad d_* \leq \omega \leq d^* \end{aligned} \quad (4.1)$$

и сохранил ее оптимальную опору $K_b^0(\tau)$ и соответствующую ей информацию 2–7.

В момент $\tau + h$ ОЭ решает задачу, которая отличается от задачи (4.1) дополнительным ограничением

$$\xi_* \leq y^*(\tau + h) - c'(\tau + h)x_0(\tau + h) - c'(\tau + h)\Phi(\tau + h)\omega \leq \xi^* \quad (4.2)$$

Для решения задачи (4.1), (4.2) в качестве начальной опоры $K_b(\tau + h)$ ОЭ берет оптимальную опору $K_b^0(\tau)$ задачи (4.1). Если выполняются неравенства

$$\xi_* \leq \zeta(\tau + h | K_b(\tau + h)) \leq \xi^*$$

то $K_b^0(\tau)$ – оптимальная опора задачи (4.1), (4.2). В противном случае имеем

$$\rho^0(K_b(\tau + h)) = \rho^0(\zeta(\tau + h | K_b(\tau + h)), [\xi_*, \xi^*]) \sim h$$

В силу этого для коррекции начальной опоры $K_b(\tau + h)$ до получения оптимальной опоры $K_b^0(\tau + h)$ достаточно небольшого числа итераций, в процессе которых происходят небольшие перемещения точек экстремума функции псевдоошибок. На этих перемещениях интегрируется прямая система. Отсюда следует, что трудоемкость решения задачи (4.1), (4.2) с начальной опорой $K_b(\tau + h) = K_b^0(\tau)$ невелика.

Найти формулу для оценки трудоемкости одной коррекции опоры в алгоритме работы ОЭ, видимо, невозможно. Представление об эффективности описанного алгоритма можно получить из результатов численного эксперимента (см. пример).

Замечание. В случае, когда математическая модель (1.1) отличается от физического прототипа (2.4) ($w(t) \neq 0$, $t \in T$), процесс наблюдения может прерваться в некоторый момент $\bar{t} \in T_h$ из-за несовместности ограничений задачи (4.1). Подобный эффект имеет место и в теории оптимального управления при использовании классических оптимальных обратных связей. Чтобы исключить подобный эффект, нужно строить теорию оптимального наблюдения по недетерминированным математическим моделям, что уже сделано для задач оптимального управления. Однако этот вопрос выходит за рамки данной работы.

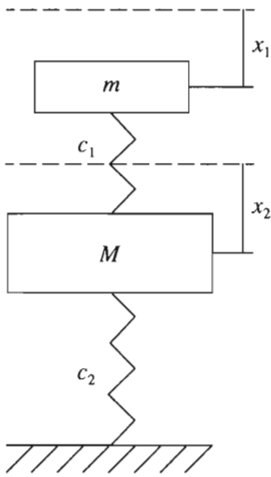
Пример. Рассмотрим на промежутке времени $T = [0, 3]$ задачу наблюдения колебательной двухмассовой системы (фиг. 1)

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_4 = 0.1x_1 - x_2 \quad (4.3)$$

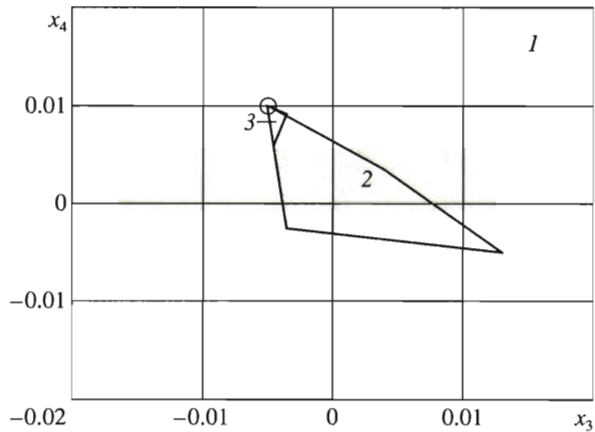
Пусть начальное состояние системы (4.3) имеет вид

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = \omega_1, \quad x_4(0) = \omega_2$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ – вектор параметров начального состояния – с априорным распределением $\Omega = \{\omega \in R^2 : |\omega_i| \leq 0.2, i = 1, 2\}$. (Ожидается, что в начальный момент $t = 0$ по



Фиг. 1



Фиг. 2

покоящимся массам могут быть нанесены удары, интенсивности которых не могут превышать известных предельных значений.)

Предположим, что измерительное устройство измеряет положение первой массы $x_1(t)$ с ошибкой

$$|\xi(t)| \leq 0.15, \quad t \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, 3-h, 3\}, \quad h = 0.03$$

т.е. измерительное устройство в дискретные моменты $t \in T_h$ поставляет значения сигнала $y(t) = x_1(t) + \xi(t)$. Представляет интерес скорость второй массы при $t = 0$, т.е. будем оценивать скаляр $z = x_4(0)$. Априорное распределение выходного сигнала имеет вид $Z = \{z \in R: |z| \leq 0.2\}$.

Считаем, что модель (4.3) точно описывает физическую систему ($w^*(t) \equiv 0, t \in T$), в процессе наблюдения реализовались (неизвестные) значения компонент начального состояния

$$x_3^*(0) = -0.05, \quad x_4^*(0) = 0.1 \tag{4.4}$$

и функция ошибок

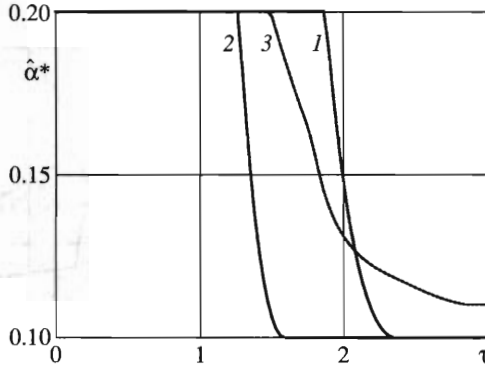
$$\xi^*(t) = 0.15 \sin 2t, \quad t \in [0, 3] \tag{4.5}$$

В результате решения задачи оптимального апостериорного наблюдения (4.3) получена следующая оценка:

$$-0.0498241 \leq z \leq 0.100059$$

При $q = 1$ трудоемкость построения апостериорного решения (начальная опора – пустая) оказалась равной 0.34. При $q = -1$ она равна 0.36.

На фиг. 2 изображены априорное (множество 1) и апостериорное (множество 2) распределения компонент $x_3(0), x_4(0)$. На фиг. 3 (кривая 1) представлено поведение оценки $\hat{\alpha}^*(\tau), \tau \in T_h$, при решении задачи позиционного наблюдения с $q = 1$.



Фиг. 3

В процессе наблюдения системы (4.3) с реализовавшимся начальным состоянием (4.4) и функцией ошибок (4.5) были получены следующие оптимальные опоры $K_b^0(\tau) = \{T_b^0(\tau), J_b^0(\tau)\}$:

$$K_b^0(\tau) = \emptyset, \quad \tau \in [0, 1.71[$$

$$T_b^0(\tau) = \{\tau\}, \quad J_b^0(\tau) = \{1\}, \quad \tau \in [1.71, 1.89[$$

$$T_b^0(\tau) = \{t_1, \tau\}, \quad J_b^0(\tau) = \{1, 2\}, \quad \tau \in [1.89, 2.4[$$

где t_1 — точка экстремума функции $z(t)$, $t \in T_h(\tau)$, переместившаяся из $t_1 = 0.69$ в $t_1 = 0.78$; $T_b = \{0.78, 2.37\}$, $J_b = \{1, 2\}$, $\tau \in [2.4, 3.0]$. Поскольку на интервалах $[0, 1.71[\cup [2.4, 3.0]$ оптимальная опора задачи, которую решал ОЭ, не менялась, трудоемкость коррекции информации равна 0.01 — отношению длины интервала, на котором интегрируется прямая система (1.1) и система (1.2) для построения $\zeta(\tau + h)$, к длине промежутка наблюдения T . На интервале $[1.71, 2.4[$ трудоемкость складывается из трудоемкости вычисления $\zeta(\tau + h)$ (она равна 0.01) и трудоемкости построения чисел (3.8), которая также равна 0.01, т.е. суммарная трудоемкость составляет 0.02. В моменты $\tau = 1.77$, $\tau = 1.83$, $\tau = 1.95$, точка экстремума t_1 перемещается на h вправо. Таким образом, трудоемкость в эти моменты равна 0.03. Если через γ обозначить время, необходимое данному микропроцессору для одного интегрирования системы (4.3) на промежутке $[0, 3]$, то при выполнении неравенства $0.03\gamma < h$ этот микропроцессор можно использовать для реализации позиционного решения задачи оптимального наблюдения системы (4.3).

5. Оптимальное наблюдение при инерционных помехах. Рассмотрим сформулированную в разд. 2 задачу оптимального наблюдения, считая

$$n_\omega = m = n, \quad G = E, \quad H = E$$

(векторы неизвестных параметров ω и z совпадают с начальным состоянием $x(t_*) = x_0$, $x_0 \in X_0 = \Omega$).

Изменим класс функций, описывающих ошибки измерения $\xi(t)$, $t \in T$, дополнив неравенства (1.4) новыми:

$$\xi_*^1 \leq (\xi(t+h) - \xi(t))/h \leq \xi^{*1}, \quad t \in T_h \setminus t^*$$

которые характеризуют инерционность функции ошибок измерения.

Обозначим

$$y^1(t) = (y(t+h) - y(t))/h$$

$$(c'\Phi)^1(t) = (c'(t+h)\Phi(t+h) - c'(t)\Phi(t))/h, \quad T_h \setminus t^*$$

Тогда получим следующую аналитическую форму множества \hat{X}^0 :

$$\hat{X}_0 = \{x \in X_0 : \xi_* \leq y(t) - c'(t)\Phi(t)x \leq \xi^*, t \in T_h\}$$

$$\xi_*^1 \leq y^1(t) - (c'\Phi)^1(t)x \leq \xi^{*1}, \quad t \in T_h \setminus t^*\}$$

Приведем функциональную форму задачи оптимального апостериорного наблюдения

$$\hat{\alpha}^1 = p'x^0 = \max p'x, \quad \xi_* - y(t) \leq -c'(t)\Phi(t)x \leq \xi^* - y(t), t \in T_h \tag{5.1}$$

$$\xi_*^1 - y^1(t) \leq -(c'\Phi)^1(t)x \leq \xi^{*1} - y^1(t), t \in T_h \setminus t^*, \quad d_* \leq x \leq d^*$$

Опишем основные элементы двойственного метода решения задачи (5.1). Опора задачи (5.1) – такая совокупность $K_b = \{T_b, T_b^1, J_b\}$, что $T_b \subset T_h, T_b^1 \subset T_h \setminus t^*, J_b \subset J = \{1, 2, \dots, n\}$,

$|T_b| + |T_b^1| = |J_b|$, и не вырождена матрица $\begin{pmatrix} D_b \\ D_b^1 \end{pmatrix}$, где

$$D_b = (-c'(t)\Phi_j(t), j \in J_b, t \in T_b), \quad D_b^1 = (-(c'\Phi)_j^1(t), j \in J_b, t \in T_b^1)$$

Приведем элементы, сопровождающие опору K_b .

1°. Функции потенциалов $v(t), t \in T_h; v^1(t), t \in T_h \setminus t^*$:

$$v(t) = 0, \quad t \in T_n = T_h \setminus T_b; \quad v^1(t) = 0, \quad t \in T_n^1 = T_h \setminus \{t^*, T_b^1\}$$

$v_b = (v(t), t \in T_b), v_b^1 = (v^1(t), t \in T_b^1)$ – решение уравнения

$$v_b' D_b + v_b^{1'} D_b^1 = p_b', \quad p_b = (p_j, j \in J_b)$$

2°. Вектор оценок

$$\delta' = p' + \sum_{t \in T_b} v(t)c'(t)\Phi(t) + \sum_{t \in T_b^1} v^1(t)(c'\Phi)^1(t)$$

3°. Псевдосостояние κ ; неопорные компоненты $\kappa_j, j \in J_n$, задаются по формуле (3.4); опорные компоненты $\kappa_b = (\kappa_j, j \in J_b)$ находятся из системы уравнений

$$D_b \kappa_b = (\zeta(t) - y(t) + c'(t)\Phi(t)\kappa_0, t \in T_b)$$

$$D_b^1 \kappa_b = (\zeta^1(t) - y^1(t) + (c'\Phi)^1(t)\kappa_0, t \in T_b^1)$$

где

$$\zeta(t) = \xi_*, \quad \text{если } v(t) < 0; \quad \zeta(t) = \xi^*, \quad \text{если } v(t) > 0$$

$$\zeta(t) \in [\xi_*, \xi^*], \quad \text{если } v(t) = 0; \quad t \in T_b$$

$$\zeta^1(t) = \xi_*^1, \quad \text{если } v^1(t) < 0; \quad \zeta^1(t) = \xi^{*1}, \quad \text{если } v^1(t) > 0$$

$$\zeta^1(t) \in [\xi_*^1, \xi^{*1}], \quad \text{если } v^1(t) = 0; \quad t \in T_b^1$$

$$\kappa_0 = (\kappa_{0j} = 0, j \in J_b; \kappa_{0j} = \kappa_j, j \in J_n)$$

4°. Функции псевдоошибок

$$\zeta(t) = y(t) - c'(t)\Phi(t)\kappa, \quad t \in T_h; \quad \zeta^1(t) = (\zeta(t+h) - \zeta(t))/h, \quad t \in T_h \setminus t^*$$

Определение. Опора K_b^0 называется оптимальной в задаче (5.1), если на некоторых сопровождающих ее псевдосостоянии κ и функциях псевдоошибок $\zeta(t)$, $t \in T_h$, $\zeta^1(t)$, $t \in T_h \setminus t^*$, выполняются неравенства

$$d_{*j} \leq \kappa_j \leq d_j^*, \quad j \in J_b; \quad \xi_* \leq \zeta(t) \leq \xi^*, \quad t \in T_n; \quad \xi_*^1 \leq \zeta^1(t) \leq \xi^{*1}, \quad t \in T_n^1$$

Вектор псевдосостояния, сопровождающий оптимальную опору, является решением задачи (5.1): $x^0 = \kappa$.

Итерация двойственного метода решения задачи (5.1) строится по аналогии с алгоритмом, изложенным в разд. 3, с учетом нового определения опоры K_b , дополнительных элементов, сопровождающих ее, и правил их построения. Заметим, что при выполнении итерации обрабатываются не только точки экстремума функции псевдоошибок $\zeta(t)$, $t \in T_h$, но и точки ее перегиба, т.е. экстремумы функции $\zeta^1(t)$, $t \in T_h \setminus t^*$.

Пример. Рассмотрим пример разд. 4 с дополнительным условием инерционности функции ошибок

$$\xi(t), t \in T_h : |(\xi(t+h) - \xi(t))/h| \leq 0.3$$

Заметим, что в данном примере рассматривается задача оптимального условно-относительного наблюдения с инерционными помехами. Опираясь на результаты разд. 3, 5, несложно построить алгоритм апостериорного решения таких задач.

Новое апостериорное распределение вектора $(x_3(0), x_4(0))$ изображено на фиг. 2 (множество 3). Согласно результатам решения задачи апостериорного наблюдения, выходной сигнал z удовлетворяет неравенствам

$$0.0598594 \leq z \leq 0.100059$$

Трудоемкость при $q = 1$ (начальная опора пустая) составила 0.44; при $q = -1$ она равна 0.78.

На фиг. 3 (кривая 2) изображено поведение оценки $\hat{\alpha}^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, в процессе позиционного решения задачи. Трудоемкость построения $\hat{\alpha}^*(\tau)$ для каждого $\tau \in T_h$ не превышала (как и в примере с безынерционными помехами) значения 0.03 в силу того, что единственная точка перегиба функции $\zeta(t)$, $t \in T_h$, появилась в момент $\tau = 1.56$ и далее по ходу итераций не изменялась.

6. Оптимальное наблюдение при зашумленных конечно-параметрических помехах. Пусть функция $\xi(t)$, $t \in T_h$, имеет вид

$$\xi(t) = \sum_{s=1}^{s^*} \xi_s \chi_s(t) + \xi_0(t) \quad (6.1)$$

где ξ_s , $s \in S = \{1, 2, \dots, s^*\}$, – неизвестные параметры; $\chi_s(t)$, $s \in S$, $t \in T$, – известные непрерывные функции; $\xi_0(t)$, $t \in T$, – неизвестная кусочно-непрерывная функция, характеризующая шум.

Будем считать, что компоненты функции ошибок удовлетворяют ограничениям

$$\xi_{*s} \leq \xi_s \leq \xi_s^*, s \in S; \quad \xi_{*0} \leq \xi_0(t) \leq \xi_0^*, t \in T_h$$

Функциональная форма задачи оптимального апостериорного наблюдения с функцией ошибок (6.1) примет вид

$$p'x^0 = \max p'x, \quad \xi_{*0} - y(t) \leq -c'(t)\Phi(t)x - \sum_{s=1}^{s^*} \xi_s \chi_s(t) \leq \xi_0^* - y(t), \quad t \in T_h \quad (6.2)$$

$$d_* \leq x \leq d^*; \quad \xi_{*s} \leq \xi_s \leq \xi_s^*, s \in S$$

Опора задачи (6.2) – такая совокупность $K_b = \{T_b, J_b, S_b\}$ ($T_b \subset T_h, J_b \subset J, S_b \subset S, |T_b| = |J_b| + |S_b|$), что не вырождена матрица (D_b, Q_b) , где

$$D_b = (-c'(t)\Phi_j(t), j \in J_b, t \in T_b), \quad Q_b = (-\chi_s(t), s \in S_b, t \in T_b)$$

Опору K_b сопровождают следующие элементы.

1°. Функция потенциалов $v(t), t \in T_h: v(t) = 0, t \in T_n = T_h \setminus T_b; v_b = (v(t), t \in T_b)$ – решение уравнения

$$v_b' D_b = p_b', \quad v_b' Q_b = 0, \quad p_b = (p_j, j \in J_b)$$

2°. Вектор оценок состояния

$$\delta' = p' + \sum_{t \in T_b} v(t)c'(t)\Phi(t)$$

и вектор оценок параметров функции ошибок

$$\delta_s^{\xi} = \sum_{t \in T_b} v(t)\chi_s(t), \quad s \in S$$

3°. Псевдосостояние $k \in R^n$ и вектор псевдопараметров $\zeta \in R^{s^*}$. Неопорные компоненты $\kappa_j, j \in J_n$, задаются по формуле (3.4); неопорные компоненты $\zeta_s, s \in S_n = S \setminus S_b$, имеют вид

$$\zeta_s = \xi_{*s}, \quad \text{если } \delta_s^{\xi} < 0; \quad \zeta_s = \xi_s^*, \quad \text{если } \delta_s^{\xi} > 0; \quad \zeta_s \in [\xi_{*s}, \xi_s^*], \quad \text{если } \delta_s^{\xi} = 0; \\ s \in S_n$$

опорные компоненты κ_b и $\zeta_b = (\zeta_s, s \in S)$ вычисляются как решение уравнения

$$D_b \kappa_b + Q_b \zeta_b = \left(\zeta(t) - y(t) + c'(t)\Phi(t)\kappa_0 + \sum_{s \in S_n} \zeta_s \chi_s(t), t \in T_b \right)$$

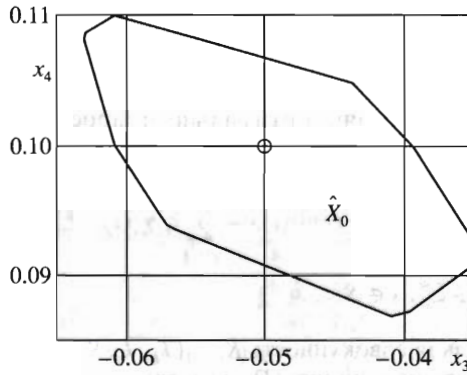
где

$$\zeta(t) = \xi_{*0}, \quad \text{если } v(t) < 0; \quad \zeta(t) = \xi_0^*, \quad \text{если } v(t) > 0$$

$$\zeta(t) \in [\xi_{*0}, \xi_0^*], \quad \text{если } v(t) = 0; \quad t \in T_b$$

4°. Функция псевдоошибок

$$\zeta(t) = y(t) - c'(t)\Phi(t)\kappa - \sum_{s=1}^{s^*} \zeta_s \chi_s(t), \quad t \in T_h$$



Фиг. 4

Определение. Опора K_b^0 оптимальна в задаче (6.2), если на некоторых сопровождающих ее элементах κ , ζ_s , $s \in S$, и $\zeta(t)$, $t \in T_h$, выполняются неравенства

$$d_{*j} \leq \kappa_j \leq d_j^*, \quad j \in J_b; \quad \xi_{*s} \leq \xi_s \leq \xi_s^*, \quad s \in S_b; \quad \xi_{*0} \leq \zeta(t) \leq \xi_0^*, \quad t \in T_n$$

Вектор псевдосостояния, сопровождающий оптимальную опору, есть решение задачи (6.2): $x^0 = \kappa$.

С учетом новых определений опоры K_b , оптимальной опоры K_b^0 и сопровождающих элементов по аналогии с предложенным в разд. 3 методом можно построить двойственный алгоритм решения задачи (6.2).

Как видно из изложенного в разд. 4, алгоритм работы ОЭ опирается на двойственный метод построения апостериорного решения и состоит в коррекции с его помощью на каждом шаге оптимальной опоры, построенной на предыдущем шаге. Поэтому на базе методов построения апостериорного решения задач оптимального наблюдения при инерционных и зашумленных конечно-параметрических помехах нетрудно, следуя изложенному в разд. 4, описать алгоритмы работы ОЭ для этих задач.

Пример. Пусть в рассмотренном в разд. 4 примере возможные функции ошибок имеют вид

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \xi_1 \sin(2t) + \xi_2 \cos(4t); \quad |\xi_0(t)| \leq 0.01, \quad |\xi_i| \leq 0.15, \quad i = 1, 2$$

В процессе наблюдения реализовалась та же функция ошибок, что и в рассмотренных ранее примерах. В результате решения апостериорной задачи наблюдения получена следующая оценка скорости второй массы:

$$0.086867 \leq z \leq 0.110098$$

Трудоёмкость построения решения при $q = 1$ оказалась равной 0.86.

На фиг. 4 изображено апостериорное распределение компонент начального состояния $x_3(0)$, $x_4(0)$. Кривой $\hat{\alpha}^*(\tau)$ на фиг. 3 представлены оценки $\hat{\alpha}^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, полученные в процессе реализации позиционного решения. Трудоёмкость коррекции опор в процессе работы ОЭ не превосходила 0.15.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 3–14.
2. Schweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. AC-13. № 1. P. 22–68.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
5. Бар-Шалом Я., Бреввер Г., Джонсон С. и др. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса. М.: Мир, 1980. 407 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Союзные задачи управления, наблюдения и идентификации // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 9. С. 777–780.
7. Габасов Р., Жевняк Р.М., Кириллова Ф.М., Копейкина Т.Б. Относительная наблюдаемость линейных систем. 1. Обыкновенные системы // Автоматика и телемеханика. 1972. № 8. С. 5–15.
8. Габасов Р., Жевняк Р.М., Кириллова Ф.М., Копейкина Т.Б. Относительная наблюдаемость линейных систем. 2. Наблюдения при постоянно действующих возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1972. № 10. С. 5–15.
9. Габасов Р., Жевняк Р.М., Кириллова Ф.М., Копейкина Т.Б. Условная наблюдаемость линейных систем // Проблемы управления и теории информации. 1972. Т. 1. № 3–4. С. 217–238.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Синтез оптимальных управлений при неполной и неточной информации об их состоянии // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 1995. Т. 211. С. 140–152.
11. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 6. С. 838–859.
12. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. Минск: Изд-во “Университетское”, 1984. 214 с.

Минск

e-mail: kirill@nsys.minsk.by

dmitruk@im.bas-net.by

Поступила в редакцию

23.XII.2003