ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **Том 68. Вып. 4, 2004**

УДК 62–50

© 2004 г. А. Г. Ченцов

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ В АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается прямая (в смысле построения управляющих процедур – квазистратегий) версия метода программных итераций для абстрактной задачи управления пучками траекторий, информация о которых реализуется посредством некоторого сигнала. Исследуются условия гарантированной разрешимости задачи о встрече с функциональным множеством, определяемые посредством итерационной процедуры в пространстве многозначных реакций на поступающие в систему сигналы.

Исследуемая процедура известна в теории управления как метод программных итераций (МПИ). По существу МПИ можно рассматривать и в более широком плане – как метод построения неподвижных точек операторов, экстремальных в смысле некоторого порядка. В то же время исторически МПИ связан с задачами теории дифференциальных игр [1–8], где применялся для построения функций цены и стабильных мостов в смысле Н.Н. Красовского. В исследованиях школы Н.Н. Красовского вопросы применения программных конструкций для целей построения стратегий управления по принципу обратной связи традиционно занимали важное место. Создание МПИ было подготовлено развитием этих программных конструкций классической теории управления, с одной стороны, и принципиально новой теорией управления по принципу обратной связи, опирающейся на фундаментальную теорему об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина, – с другой. Эта теория связана с использованием весьма нерегулярных (нелинейных, разрывных) законов управления по принципу обратной связи (формализация Н.Н. Красовского), существенность которых была убедительно показана Н.Н.Субботиной и А.И.Субботиным. Отметим, что в задачах управления с помехами ранние конструкции МПИ (см. [9–12] и др.) удачно сочетались с идеализированными управляющими процедурами – многозначными квазистратегиями (см. также [13, 14]); в связи с понятием "квазистратегия" напомним работы [15, 16]. Отметим здесь же исследования [17–19], связанные с конструкциями МПИ.

В задачах управления часто приходится сталкиваться с проблемой неполноты информации о фазовых состояниях (см. в этой связи [3, 20–22]). Были даны общие принципы позиционного управления в дифференциальных играх с неполной информацией [3]. Рассматривались [20] вопросы программного и позиционного управления по неполным данным, минимаксные задачи наблюдения и фильтрации. Отметим важное понятие информационного множества ([20], с. 290), которое нашло широкое применение в задачах управления и наблюдения.

Ниже делается попытка использовать так называемую прямую версию МПИ в задаче управления с неполной информацией; имеются в виду управление по некоторому сигналу и абстрактные аналоги такого способа управления. В качестве управляющих процедур предлагается использовать многозначные квазистратегии, т.е. неупреждающие отклики на сигнал; в абстрактных версиях используется наследственность откликов (аналог неупреждаемости). Данный вариант конструирования управляющих процедур связывается с развиваемым автором подходом [23–25] (прямая версия МПИ). Существо этих конструкций, среди которых находится и требуемая для построения квазистратегии управления по сигналу, составляет итерационная процедура, каждый шаг которой имеет смысл выделения неупреждающей части уже построенной мультифункции.

1. Общие понятия и обозначения. Для сокращения словесных формулировок ниже используются кванторы и пропозициональные связки [26]. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Следующие общие обозначения существенны для прямой версии МПИ в ее абстрактной форме.

Через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества H, а через B^A – множество ([26], с. 77) всех функций, действующих из множества A в множество B. Если A и B – множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $(f|C) \triangleq f \cap \cap (C \times B) \in B^C$ есть, по определению, сужение f на C; $(f|C)(x) = f(x)$ для $x \in C$. Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую; $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ и $\mathcal{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathcal{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$. С каждым оператором, действующим в заданном множестве, связываем последовательность его степеней: если A – множество и $T \in A^A$, то последовательность $(T^k)_{k \in \mathcal{N}_0}$ в множестве A^A имеет вид

$$(T^0(a) \triangleq a \ \forall a \in A) \ \& \ (T^k = T \circ T^{k-1} \ \forall k \in \mathcal{N}) \tag{1.1}$$

В терминах (1.1) для $\alpha \in A$ реализуется последовательность $(T^k(\alpha))_{k \in \mathcal{N}_0}$ в A со свойствами

$$(T^0(\alpha) = \alpha) \ \& \ (T^k(\alpha) = T(T^{k-1}(\alpha)) \ \forall k \in \mathcal{N}) \tag{1.2}$$

Итерационные процедуры вида (1.2) используются, в частности, в схемах МПИ. Для всяких множеств U и V полагаем $\mathbb{M}(U, V) \triangleq \mathcal{P}(V)^U$; элементы $\mathbb{M}(U, V)$ именуем также мультифункциями (МФ) из U в V. В соотношениях (1.1), (1.2) можно, в частности, использовать случай $A = \mathbb{M}(U, V)$. В этом случае вводим бесконечную степень оператора, действующего в A.

Итак, если U и V – множества, а T – оператор, действующий в $\mathbb{M}(U, V)$, то оператор T^∞, также действующий в $\mathbb{M}(U, V)$, определяем по правилу: для $\mathscr{C} \in \mathbb{M}(U, V)$ и $u \in U$

$$T^\infty(\mathscr{C})(u) \triangleq \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} T^k(\mathscr{C})(u) \tag{1.3}$$

В пространствах МФ вводим поточечную упорядоченность по вложению, обозначаемую через $\sqsubseteq$: если U и V – множества, $\alpha \in \mathbb{M}(U, V)$ и $\beta \in \mathbb{M}(U, V)$, то $\alpha \sqsubseteq \beta$ заменяет высказывание

$$\alpha(u) \subset \beta(u) \ \forall u \in U$$

В этих терминах вводим свойство изотонности операторов, действующих в пространствах МФ. Для любых множеств U и V через $\mathcal{M}[U; V]$ обозначаем множество всех операторов T, действующих в $\mathbb{M}(U, V)$ и таких, что $T(\mathscr{C}) \sqsubseteq \mathscr{C} \ \forall \mathscr{C} \in \mathbb{M}(U, V)$. В дальнейшем нам потребуется монотонная сходимость множеств и МФ. Первое понятие стандартно ([27], гл. I): если U – множество, $(M_i)_{i \in \mathcal{N}}$ – последовательность подмножеств U (т.е. последовательность в $\mathcal{P}(U)$) и $M \in \mathcal{P}(U)$, то $(M_i)_{i \in \mathcal{N}} \downarrow M$ означает, что: 1) M – пересечение всех множеств M_i, $i \in \mathcal{N}$; 2) $M_{k+1} \subset M_k \ \forall k \in \mathcal{N}$. Упомянутый тип сходимости распространяем на случай МФ: если A и B – множества, $(\mathscr{C}_i)_{i \in \mathcal{N}}$ – последовательность в $\mathbb{M}(A, B)$ и $\mathscr{C} \in \mathbb{M}(A, B)$, то, по определению,

$$((\mathscr{C}_i)_{i \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathscr{C}) \Leftrightarrow ((\mathscr{C}_i(a))_{i \in \mathcal{N}} \downarrow \mathscr{C}(a) \ \forall a \in A) \tag{1.4}$$

Итак, в пространствах типа $\mathbb{M}(A, B)$ используются поточечный порядок $\sqsubseteq$ и поточечная сходимость $\Downarrow$ (см. (1.4)). Отметим одно простое следствие: если A и B – множества, $T \in \mathcal{M}[A; B]$ и $\mathscr{C} \in \mathbb{M}(A, B)$, то последовательность $(T^k(\mathscr{C}))_{k \in \mathcal{N}}$ (в $\mathbb{M}(A, B)$) сходится к МФ $T^\infty(\mathscr{C})$, определяемой в (1.3), т.е.

$$(T^k(\mathscr{C})_{k \in \mathcal{N}} \Downarrow T^\infty(\mathscr{C}))$$

2. Одна абстрактная задача управления с неполной информацией. Рассмотрим одну достаточно общую постановку задачи управления по сигналу, поступающему от некоторого объекта. Управляющие процедуры определяются в виде многозначных квазистратегий, применяемых в задачах управления с полной информацией (см. в этой связи [15, 16], где использованы однозначные квазистратегии в задачах теории дифференциальных игр). В связи с последующими построениями отметим пример ([28], с. 357–360) одного конкретного класса задач управления по сигналу (имеется в виду игровая задача о встрече к заданному моменту в условиях искажения информации об одном из объектов аддитивной помехой). Идея построения решения распространяется далее на весьма общий случай наследственных процедур управления, причем сама наследственность здесь уже не обязательно связана с традиционной неупреждаемостью в классе откликов на функции времени. Упомянутое понятие наследственности соответствует введенному ранее понятию [23–25] (в разд. 6 дана традиционная интерпретация, связанная с неупреждаемостью реакций на развивающиеся функции времени).

В содержательном отношении рассматриваемая далее задача (в своей общей постановке) соответствует развивающейся в некотором абстрактном пространстве системе; управляющая сторона имеет при этом вполне определенную цель, осуществление которой затруднено неясностью условий в той или иной части пространства. Об этих условиях (а они также могут задаваться в виде отображения на упомянутом пространстве) имеется лишь косвенная информация, реализуемая сигналом, механизм формирования которого какими-либо требованиями наследственности не ограничивается. В рассматриваемой развивающейся системе, напротив, допускаются лишь наследственные процедуры, отвечающие фактически случаю использования реакций на поступивший в систему фрагмент сигнала. Само выделение фрагментов связывается при этом с заданным априори семейством непустых множеств (в упомянутом пространстве), точки которых не имеют, вообще говоря, смысла моментов времени. Существенны лишь сами множества, на которые осуществляется сужение взаимодействующих отображений. В терминах этих сужений и определяется свойство наследственности, допускающее как традиционные для теории динамических систем интерпретации, так и нетрадиционные (и формально не связанные с какой-либо динамикой). Например, речь может идти о вычислении фрагментов одних зависимостей при косвенной информации об аналогичных фрагментах других зависимостей с последующим расширением области пространства, определяющей упомянутые фрагменты.

Осуществляемые конкретные действия можно в этой весьма общей ситуации интерпретировать как реализации наследственного (в упомянутом смысле) выбора. Механизмы такого выбора (реакции на сигнал) можно рассматривать в виде аналогов управляющих процедур. Неконтролируемые факторы (характеристики пространства, формализуемые отображениями из некоторого функционального множества, а также возможные версии самого сигнала) влияют, однако, на конкретные реализации. Приходится говорить о пучках возможных траекторий, понимаемых, конечно, расширительно в сравнении с “обычным” случаем управляемых динамических систем. От процедуры наследственного выбора естественно требовать гарантии в части, касающейся достижения цели на траекториях из пучка. Стало быть, приходим к игровой постановке, что и будет отражено в последующем изложении.

Фиксируем далее произвольные непустые множества X, Y, Υ и E. Используем X в качестве аналога промежутка управления. Множества Y, Υ и E играют роль множеств значений функций, определенных на X. Фиксируем

$$(Z \in \mathcal{P}'(Y^X)) \;\&\; (\mathbb{E} \in \mathcal{P}'(E^X))$$

Z и $\mathbb{E}$ – два непустых множества в функциональных пространствах: $Z \subset Y^X$, $\mathbb{E} \subset E^X$. Функции из Z и $\mathbb{E}$ играют роль траекторий; полагаем, что выбором “траектории" $z \in Z$

ведает игрок I, а выбором "траектории" $e \in \mathbb{E}$ – игрок II. Задано множество $M \in \mathcal{P}'(Z \times \mathbb{E})$, т.е. непустое множество M, $M \subset Z \times \mathbb{E}$. Осуществление события $(z, e) \in M$ составляет цель игрока I, однако его информация о "траектории" $e \in \mathbb{E}$, требуемая для выбора $z \in Z$, является, вообще говоря, неполной, а именно: игрок I получает сигнал $\omega \in \Upsilon^X$ (функцию, действующую из X в Υ), порожденный "траекторией" e.

Итак, фиксируем оператор

$$\Lambda : \mathbb{E} \to \mathcal{P}'(\Upsilon^X) \tag{2.1}$$

т.е. МФ из $\mathbb{E}$ в Υ^X; при $e \in \mathbb{E}$ $\Lambda(e)$ есть множество всех сигналов, возможных при реализации e. Конкретный выбор $\lambda \in \Lambda(e)$ для игрока I непредсказуем. Тогда

$$\Omega \triangleq \bigcup_{e \in \mathbb{E}} \Lambda(e) \in \mathcal{P}'(\Upsilon^X) \tag{2.2}$$

есть множество всех возможных сигналов (выбор "траектории" $e \in \mathbb{E}$ также непредсказуем для игрока I).

Итак, Ω – непустое множество в пространстве $\Upsilon^X = \{X \to \Upsilon\}$ всех функций, действующих из X в Υ; одна из функций $\omega \in \Omega$ будет сообщена игроку I. Разумеется, при этом ему становится известным и непустое множество $\{e \in \mathbb{E} \mid \omega \in \Lambda(e)\}$.

Логично ввести оператор

$$\mathbb{L} : \Omega \to \mathcal{P}'(\mathbb{E}) \tag{2.3}$$

(т.е. МФ из Ω в $\mathbb{E}$) по правилу: если $\omega \in \Omega$, то $\mathbb{L}(\omega) \triangleq \{e \in \mathbb{E} \mid \omega \in \Lambda(e)\}$. Фактически в (2.3) определено правило построения функциональных информационных множеств. Можно рассматривать (2.3) как оператор, обратный, в некотором смысле, по отношению к Λ (2.1).

Введем $\alpha^0 \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ по правилу

$$\alpha^0(\omega) \triangleq \{z \in Z \mid (z, e) \in M \ \forall e \in \mathbb{L}(\omega)\}, \quad \forall \omega \in \Omega \tag{2.4}$$

Имеем теперь целевую МФ из Ω в Z. Смысл введения α^0 (2.4) состоит в следующем: если игрок I получил в свое распоряжение сигнал ω, то он вынужден допускать возможность реализации любой "траектории" $e \in \mathbb{E}$, которая может привести к осуществлению данного сигнала. Цель игрока I достигается с гарантией, если для всех "траекторий" из $\mathbb{L}(\omega)$ осуществляется требуемая встреча с множеством M, поскольку он должен допускать возможность самых неблагоприятных действий игрока II. Более того, и сам сигнал ω может формироваться неблагоприятным для игрока I образом. Наконец, в типичных конкретных постановках такого рода траектория $z \in Z$ должна формироваться в "темпе реального времени" по мере поступления фрагментов сигнала. В рассматриваемой весьма общей постановке введем абстрактный аналог этого требования.

Полагаем заданным непустое семейство $\mathcal{X}$ непустых подмножеств X: $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$. В терминах $\mathcal{X}$ определяется специальная наследственность, а именно, $\mathcal{X}$ – наследственность: если $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, то называем α наследственной МФ (из Ω в Z), если $\forall \omega_1 \in \Omega$, $\forall \omega_2 \in \Omega$, $\forall A \in \mathcal{X}$

$$((\omega_1|A) = (\omega_2|A)) \Rightarrow (\{(z|A) : z \in \alpha(\omega_1)\} = \{(z|A) : z \in \alpha(\omega_2)\}) \tag{2.5}$$

Замечание. В случае, когда $X = [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0, \infty[$, а $\mathcal{X} = \{[t_0, t] : t \in X\}$, соотношение (2.5) определяет традиционное условие неупреждаемости отклика α (в многозначной форме).

В связи с условием (2.5) отметим общие конструкции ([23–25] и [28], гл. 6). Напомним некоторые из них. Если $A \in \mathcal{X}$, то

$$(\Omega_0(\omega|A) \triangleq \{\nu \in \Omega | (\omega|A) = (\nu|A)\} \ \forall \omega \in \Omega) \& (Z_0(z|A) \triangleq \{z' \in Z | (z|A) = (z'|A)\} \ \forall z \in Z)$$

и в этих терминах определяем $\mathbf{\Gamma}_A \in \mathcal{M}[\Omega; Z]$ (как отображение, действующее в $\mathbb{M}(\Omega, Z)$) посредством правила $\forall \zeta \in \mathbb{M}(\Omega, Z), \forall \omega \in \Omega$:

$$\mathbf{\Gamma}_A(\zeta)(\omega) \triangleq \{z \in \zeta(\omega) | Z_0(z|A) \cap \zeta(\nu) \neq \varnothing \ \forall \nu \in \Omega_0(\omega|A)\} \tag{2.6}$$

С операторами $\mathbf{\Gamma}_A$, $A \in \mathscr{X}$, естественным образом связывается (см. [23–25]) оператор $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{M}[\Omega; Z]$, такой, что

$$\mathbf{\Gamma}(\zeta)(\omega) \triangleq \bigcap_{A \in \mathscr{X}} \mathbf{\Gamma}_A(\zeta)(\omega) \ \forall \zeta \in \mathbb{M}(\Omega, Z), \forall \omega \in \Omega \tag{2.7}$$

Определения (2.6), (2.7) соответствуют введенным ранее [23–25].

Оператор $\mathbf{\Gamma}$ играет важную роль в связи со свойством наследственности: если $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, то МФ α наследственна в смысле (2.5) тогда и только тогда, когда $\alpha = \mathbf{\Gamma}(\alpha)$.

Итак, наследственные МФ – неподвижные точки $\mathbf{\Gamma}$ и только они. Стало быть, $\mathbb{N} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z) \mid \alpha = \mathbf{\Gamma}(\alpha)\}$ – множество всех наследственных МФ из Ω в Z. Заметим, что (см. [24, 25])

$$\mathbf{\Gamma}_A \circ \mathbf{\Gamma}_A = \mathbf{\Gamma}_A \ \forall A \in \mathscr{X} \tag{2.8}$$

т.е. имеем полезное свойство идемпотентности оператора (2.6). Как следствие

$$\{\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z) | \alpha = \mathbf{\Gamma}_A(\alpha)\} = \{\mathbf{\Gamma}_A(\beta) : \beta \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\} \ \forall A \in \mathscr{X} \tag{2.9}$$

Для дальнейших построений имеет смысл связать соотношения (2.8), (2.9) с МФ α^0 (2.4). Введем

$$\mathbb{N}^0 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{N} | \alpha \sqsubseteq \alpha^0\} \tag{2.10}$$

Элементы множества (2.10) – наследственные мультиселекторы МФ α^0 и только они. Множество (2.10) обладает $\sqsubseteq$-наибольшим элементом $(\mathrm{na})[\alpha^0] \in \mathbb{N}^0$; при этом

$$(\mathrm{na})[\alpha^0](\omega) \triangleq \bigcup_{\mathscr{C} \in \mathbb{N}^0} \mathscr{C}(\omega) \ \forall \omega \in \Omega \tag{2.11}$$

Заметим, что (см. (2.8), (2.9) и приведенные ранее положения [24, 25]) множество (2.10) допускает представление в терминах действия операторов $\mathbf{\Gamma}_A$, $A \in \mathscr{X}$, а именно:

$$\mathbb{N}^0 \triangleq \bigcap_{A \in \mathscr{X}} \{\mathbf{\Gamma}_A(\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z), \mathscr{C} \sqsubseteq \alpha^0\} \tag{2.12}$$

а МФ $(\mathrm{na})[\alpha^0] \in \mathbb{N}^0$ такова, что $\mathscr{H} \sqsubseteq (\mathrm{na})[\alpha^0] \ \forall \mathscr{H} \in \mathbb{N}^0$. Стало быть (см. (2.12)), для определения МФ (2.11) следует построить множество

$$\mathbf{S}^0 \triangleq \{\mathscr{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z) | \mathscr{C} \sqsubseteq \alpha^0\} \tag{2.13}$$

и после этого рассмотреть образы множества (2.13) при действии каждого из операторов $\mathbf{\Gamma}_A$, $A \in \mathscr{X}$. В пересечении этих образов (оно совпадает с $\mathbb{N}^0$) содержится МФ $(\mathrm{na})[\alpha^0]$ (2.11). Более того, эта МФ является $\sqsubseteq$-наибольшим элементом этого множества-пересечения. Данный подход сводится, стало быть, к просмотру МФ, лежащих в каждом из упомянутых выше образов множества (2.13), с последующим выбором среди них $\sqsubseteq$-наибольшей.

Если $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, то полагаем

$$(\mathrm{DOM})[\alpha] \triangleq \{\omega \in \Omega | \alpha(\omega) \neq \varnothing\} \tag{2.14}$$

(эффективная область МФ α). В терминах $\mathbb{N}$ и (2.14) конструируем множество (многозначных) квазистратегий: через Q обозначаем множество всех $\alpha \in \mathbb{N}$, таких, что $(\mathrm{DOM})[\alpha] = \Omega$. Рассматриваем в качестве основного вопрос о гарантированной встрече с множеством M, реализуемой надлежащей квазистратегией. Выделяем в этой связи проблему разрешимости и при ее положительном решении проблему построения соответствующей квазистратегии.

Итак, в рассматриваемой постановке квазистратегии – невырожденные наследственные МФ и только они. Тогда, в силу определения (2.4),

$$Q^0 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{N}^0 \,|\, (\mathrm{DOM})[\alpha] = \Omega\} \tag{2.15}$$

есть множество всех квазистратегий, осуществляющих встречу "траекторий" с M при любой реализации сигнала. Более точно, для Q^0 (2.15) справедливо следующее

Предложение 1. Q^0 – множество всех квазистратегий $\alpha \in Q$, для каждой из которых

$$(z, e) \in M \ \forall e \in \mathbb{E}, \quad \forall \omega \in \Lambda(e), \quad \forall z \in \alpha(\omega)$$

Ограничимся изложением схемы доказательства, полагая

$$Q_0 \triangleq \{\alpha \in Q \,|\, (z, e) \in M \ \forall e \in \mathbb{E}, \forall \omega \in \Lambda(e), \forall z \in \alpha(\omega)\}$$

Выберем произвольно $\beta^0 \in Q^0$, что означает (для МФ $\beta^0 \in Q$) справедливость свойства

$$\beta^0(\omega) \subset \alpha^0(\omega) \ \forall \omega \in \Omega$$

Пусть $e_* \in \mathbb{E}$; тогда $\Lambda(e_*) \in \mathcal{P}'(\Omega)$ в силу определения (2.2), т.е. $\Lambda(e_*)$ – непустое подмножество Ω. Выберем $\omega_* \in \Lambda(e_*)$; тогда $\beta^0(\omega_*) \subset \alpha^0(\omega_*)$. Кроме того, $e_* \in \mathbb{L}(\omega_*)$ по определению оператора (2.3). С учетом определения (2.4) получаем теперь

$$(z, e_*) \in M \ \forall z \in \beta^0(\omega_*)$$

Поскольку выбор элемента ω_* был произвольным, имеем свойство

$$(z, e_*) \in M \ \forall \omega \in \Lambda(e_*), \forall z \in \beta^0(\omega)$$

Однако и элемент e_* выбирался произвольно. Стало быть, $\beta^0 \in Q_0$, так как β^0 – квазистратегия. Вложение $Q^0 \subset Q_0$ установлено.

Пусть $\beta_0 \in Q_0$. Тогда, в частности, $\beta_0 \in Q$. Выберем произвольно $\omega^* \in \Omega$. Тогда

$$\mathbb{L}(\omega^*) = \{e \in \mathbb{E} \,|\, \omega^* \in \Lambda(e)\}, \quad \mathbb{L}(\omega') \neq \varnothing$$

Пусть $e^* \in \mathbb{L}(\omega^*)$. Стало быть, $e^* \in \mathbb{E}$ и при этом $\omega^* \in \Lambda(e^*)$.

Итак, $e^* \in \mathbb{E}$ и $\omega^* \in \Lambda(e^*)$, что, по определению Q_0, означает

$$(z, e^*) \in M \ \forall z \in \beta_0(\omega^*)$$

Поскольку выбор элемента e^* был произвольным, установлено, что

$$(z, e) \in M \ \forall e \in \mathbb{L}(\omega^*), \quad \forall z \in \beta_0(\omega^*)$$

Как следствие имеем из определения (2.4) вложение $\beta_0(\omega^*) \subset \alpha^0(\omega^*)$. Поскольку выбор элемента ω^* был произвольным, получаем свойство $\beta_0 \sqsubseteq \alpha^0$ и, как следствие, $\beta_0 \in \mathbb{N}^0$ (см. (2.10)). Но β_0 – квазистратегия, а потому $(\mathrm{DOM})[\beta_0] = \Omega$ и, в силу определения (2.15), $\beta_0 \in Q^0$. Вложение $Q_0 \subset Q^0$ установлено, что и требовалось.

По свойствам (2.15) имеем

$$((\mathrm{na})[\alpha^0] \in Q^0) \Leftrightarrow ((\mathrm{DOM})[(\mathrm{na})[\alpha^0]] = \Omega) \tag{2.16}$$

С учетом свойства экстремальности $(\mathrm{na})[\alpha^0]$ (см. определение (2.11)) имеем из определения (2.15)

$$((\mathrm{na})[\alpha^0] \notin Q) \Leftrightarrow (Q^0 = \varnothing) \tag{2.17}$$

Свойства (2.16), (2.17) определяют роль $(\mathrm{na})[\alpha^0]$ в вопросах разрешимости основной задачи в классе квазистратегий.

Предложение 2. Если $(\mathrm{DOM})[(\mathrm{na})[\alpha^0]] \neq \Omega$, то $\forall \alpha \in Q\ \exists e \in \mathbb{E}\ \exists \omega \in \Lambda(e)\ \exists z \in \alpha(\omega)$: $(z, e) \notin M$.

Доказательство легко следует из соотношения (2.17).

Из свойств (2.16), (2.17) и предложений 1, 2 вытекает

Теорема 1. Эквивалентны следующие свойства: 1) $(\mathrm{na})[\alpha^0] \in Q^0$, 2) $Q^0 \neq \varnothing$.

Итак, возможность успешного решения основной задачи в классе квазистратегий тождественна (см. свойство (2.16)) свойству непустоты всех множеств (2.11). При этом из представления (2.12) имеем также свойство: если существует МФ $\mathfrak{D}^0 \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, для которой $(\mathrm{DOM})[\mathfrak{D}^0] = \Omega$ и, кроме того, выполнено условие принадлежности к образу множества (2.13) при действии каждого оператора $\mathbf{\Gamma}_A$, $A \in \mathscr{X}$, то $Q^0 \neq \varnothing$; при этом $\mathfrak{D}^0 \in Q^0$. В связи с аналогами данного подхода, связанного с преобразованием $\mathbf{S}^0$ (2.13), отметим соотношения, полученные ранее [29, 30].

3. Метод итераций. Представлением (2.12) намечен подход к определению МФ из $\mathbb{N}^0$ и, в частности, к определению $(\mathrm{na})[\alpha^0]$; последняя МФ содержит (см. теорему 1) исчерпывающую информацию о возможности решения основной задачи в классе квазистратегий. В целом представление (2.12) имеет смысл некоторого экспериментирования с реакциями на возможные сигналы, подчиненными МФ α^0; главную роль здесь играют действия на основе операторов (2.6). Более регулярный метод получается, если учесть определение (2.7) и на этой основе реализовать итерационную процедуру.

Рассмотрим последовательность $(\mathbf{\Gamma}^k)_{k \in \mathcal{N}_0}$ степеней $\mathbf{\Gamma}$ и предельный оператор $\mathbf{\Gamma}^\infty$ (см. соотношение (1.3)). Тогда $(\mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0))_{k \in \mathcal{N}_0}$ – последовательность в $\mathbb{M}(\Omega, Z)$, для которой

$$(\mathbf{\Gamma}^0(\alpha^0) = \alpha^0) \& (\mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{\Gamma}^{k-1}(\alpha^0))\ \forall k \in \mathcal{N}) \tag{3.1}$$

Последовательность (3.1) сходится (поточечно) к МФ $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$:

$$(\mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0))_{k \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) \tag{3.2}$$

причем $(\mathrm{na})[\alpha^0] \sqsubseteq \mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)$ (см. [23–25]). С учетом свойства (2.16) и теоремы 1 получаем теперь следующее

Предложение 3. Если $(\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)] \neq \Omega$, то $Q^0 = \varnothing$.

Итак, итерационный метод на основе соотношений (3.1), (3.2) (прямая версия МПИ) можно всегда использовать для получения достаточных условий неразрешимости основной задачи в классе квазистратегий. На самом же деле во многих случаях в соотношении (3.2) реализуется сходимость к $(\mathrm{na})[\alpha^0]$. Условия такого рода указаны ранее [23–25]. Сейчас напомним только некоторые общие положения.

Через $\mathfrak{Z}$ обозначаем семейство всех множеств $\mathbf{S}$, $\mathbf{S} \subset \mathbb{M}(\Omega, Z)$, таких, что $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{C}) \in \mathbf{S}$ $\forall \mathscr{C} \in \mathbf{S}$ (тем самым введено семейство всех $\mathbf{\Gamma}$-инвариантных подмножеств $\mathbb{M}(\Omega, Z)$). Через $\mathbf{Z}$ обозначаем семейство всех множеств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \subset \mathbb{M}(\Omega, Z)$, таких, что $\forall (H_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathfrak{H}^{\mathcal{N}}\ \forall H \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$

$$((H_i)_{i \in \mathcal{N}} \Downarrow H) \Rightarrow (H \in \mathfrak{H})$$

$\mathbf{Z}$ можно рассматривать как семейство всех (секвенциально) замкнутых, относительно $\Downarrow$-сходимости, подмножеств $\mathbb{M}(\Omega, Z)$. Наконец, через $\mathfrak{G}$ обозначаем семейство всех множеств $\mathbb{U}$, $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}(\Omega, Z)$, таких, что $\forall (U_j)_{j \in \mathcal{N}} \in \mathbb{U}^{\mathcal{N}}\ \forall U \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$

$$((U_j)_{j \in \mathcal{N}} \Downarrow U) \Rightarrow ((\mathbf{\Gamma}(U_j))_{j \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathbf{\Gamma}(U))$$

В последнем случае рассматриваются подмножества $\mathbb{M}(\Omega, Z)$, на которых оператор $\mathbf{\Gamma}$ обладает некоторым аналогом свойства секвенциальной непрерывности. Заметим, что для $\mathbf{U} \in \mathfrak{Z}$ при $\alpha^0 \in \mathbf{U}$ имеем, что $(\mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0))_{k \in \mathcal{N}_0}$ – последовательность в $\mathbf{U}$; если, к тому же, $\mathbf{U} \in \mathbf{Z}$, то $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) \in \mathbf{U}$. Известно [24, 25] свойство: если $\mathbf{S} \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}$ и $\alpha^0 \in \mathbf{S}$, то

$$\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) = (\mathrm{na})[\alpha^0] \tag{3.3}$$

если же, кроме того, $\mathbf{S} \in \mathbf{Z}$, то $(\mathrm{na})[\alpha^0] \in \mathbf{S}$.

С учетом свойства (3.3) получаем следующее положение.

Теорема 2. Пусть $\exists \mathbf{S} \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}$: $\alpha^0 \in \mathbf{S}$. Тогда эквивалентны следующие три утверждения: 1) $(\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)] = \Omega$, 2) $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) \in Q^0$, 3) $Q^0 \neq \varnothing$.

Итак, для выяснения возможности успешного решения основной задачи в классе квазистратегий следует проверить свойства МФ (2.4), реализовать итерационный процесс (3.1), (3.2) и выяснить, совпадает ли с Ω эффективная область его предельной МФ.

В следующем разделе покажем, что условия, налагаемые на МФ α^0 в теореме 2, допускают зачастую простую проверку.

4. Топологические конструкции и метод итераций. Рассмотрим распространенный случай, когда "траектория" игрока I реализуется в хаусдорфовом топологическом пространстве (ТП). Итак, пусть множество Y (см. разд. 2) оснащено топологией τ, причем (Y, τ) – хаусдорфово ([31], с. 98) ТП. Введем топологию $\otimes^X(\tau)$ множества Y^X, соответствующую тихоновскому произведению экземпляров ТП (Y, τ) с индексным множеством X (см. [31], с. 127). Через ϑ обозначаем топологию множества Z, индуцированную ([31], с. 77) из

$$(Y^X, \otimes^X(\tau)) \tag{4.1}$$

Следовательно, (Z, ϑ) – подпространство ТП (4.1), а ϑ – топология поточечной сходимости в Z ([31], с. 283). Через $\mathbb{K}$ (через $\mathcal{K}$) обозначаем семейство всех компактных, [32], с. 196 (секвенциально компактных, [32], с. 314) в ТП(Z, ϑ) подмножеств Z. Упомянутое ТП хаусдорфово, а каждое множество из $\mathbb{K}$ – компакт ([32], с. 208) в топологии, индуцированной из (Z, ϑ). Напомним, что $\mathbb{K}^\Omega$ и $\mathcal{K}^\Omega$ – множества всех отображений из Ω в $\mathbb{K}$ и $\mathcal{K}$ соответственно. Из общих положений [23–25] следует, что

$$(\mathbb{K}^\Omega \in \mathfrak{Z} \cap \mathbf{Z} \cap \mathfrak{G})\&(\mathcal{K}^\Omega \in \mathfrak{Z} \cap \mathbf{Z} \cap \mathfrak{G}) \tag{4.2}$$

Теперь свойство (4.2) можно использовать в теореме 2. Однако предварительно отметим простое следствие свойств (3.3) и (4.2).

Предложение 4. Если $\alpha^0 \in \mathbb{K}^\Omega$, то $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) = (\mathrm{na})[\alpha^0] \in \mathbb{K}^\Omega$. В случае $\alpha^0 \in \mathcal{K}^\Omega$ имеем $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) = (\mathrm{na})[\alpha^0] \in \mathcal{K}^\Omega$.

В порядке дополнения к предложению 4 отметим теорему ([28, теорема 6.1.2]), на основе которой может осуществляться комбинация фрагментов α^0 с компактными и секвенциально компактными значениями. Из теоремы 2 и свойства (4.2) вытекает

Теорема 3. Если $(\alpha^0 \in \mathbb{K}^\Omega) \vee (\alpha^0 \in \mathcal{K}^\Omega)$, то эквивалентны утверждения *1–3* теоремы 2.

Отметим в связи с условиями, налагаемыми на α^0, также полезное добавление к представлениям (2.12), (2.13). По аналогии со свойством (4.2) устанавливается (см. [28], с. 355), что при $A \in \mathcal{X}$ имеют место свойства инвариантности: 1) $\{\mathbf{\Gamma}_A(\mathcal{C}): \mathcal{C} \in \mathbb{K}^\Omega\} \subset \mathbb{K}^\Omega$; 2) $\{\mathbf{\Gamma}_A(\mathcal{D}): \mathcal{D} \in \mathcal{K}^\Omega\} \subset \mathcal{K}^\Omega$. Как следствие, из представления (2.12) вытекает, что

$$\mathbb{N}^0 \cap \mathbb{K}^\Omega = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \{\mathbf{\Gamma}_A(\mathcal{H}): \mathcal{H} \in \mathbb{K}^\Omega, \mathcal{H} \sqsubseteq \alpha^0\} \tag{4.3}$$

$$\mathbb{N}^0 \cap \mathcal{K}^\Omega = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \{\mathbf{\Gamma}_A(\mathcal{H}): \mathcal{H} \in \mathcal{K}^\Omega, \mathcal{H} \sqsubseteq \alpha^0\} \tag{4.4}$$

Используя априорную информацию об α^0, можем теперь на основе соотношений (4.3), (4.4) реализовать аналог построений, связанных с представлением (2.13).

В самом деле, если $\alpha^0 \in \mathbb{K}^\Omega$ (т.е. α^0 – компактнозначная МФ), то следует ввести множество

$$\mathbf{S}^0_{\mathbb{K}} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{K}^\Omega \,|\, \alpha \sqsubseteq \alpha^0\} \tag{4.5}$$

и построить его образы при действии каждого из операторов $\mathbf{\Gamma}_A$, $A \in \mathcal{X}$. В пересечении всех таких образов содержится (na)[α^0] и, более того, (na)[α^0] есть $\sqsubseteq$-наибольший элемент данного пересечения. Вообще, если в упомянутом выше пересечении образов удается найти МФ $\mathcal{D}^0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}^\Omega$ со свойством (DOM)[$\mathcal{D}^0_{\mathbb{K}}$] $= \Omega$, то $Q^0 \neq \varnothing$ (при условии компактнозначности α^0).

Если же $\alpha^0 \in \mathcal{K}^\Omega$, то в аналогичных целях используем соотношение (4.4): введем множество

$$\mathbf{S}^0_{\mathcal{K}} \triangleq \{\alpha \in \mathcal{K}^\Omega \,|\, \alpha \sqsubseteq \alpha^0\} \tag{4.6}$$

и построим его образы при действии каждого из операторов $\mathbf{\Gamma}_A$, $A \in \mathcal{X}$. Тогда (na)[α^0] является $\sqsubseteq$-наибольшим элементом пересечения всех этих образов. Если в данном пересечении содержится МФ $\mathcal{D}^0_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}^\Omega$, для которой (DOM)[$\mathcal{D}^0_{\mathcal{K}}$] $= \Omega$, то $Q^0 \neq \varnothing$.

Итак, получены признаки успешной разрешимости основной задачи, не использующие метод итераций.

5. Об условиях неразрешимости основной задачи в классе квазистратегий. Общее достаточное условие неразрешимости задачи из разд. 2 содержит предложение 3. Из теорем 2 и 3 извлекаются в соответствующих классах МФ α^0 необходимые и достаточные условия. Все они связаны с вопросом об обнаружении ситуации $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)(\omega) = \varnothing$ для некоторой реализации $\omega \in \Omega$. Рассмотрим некоторые дополнительные возможности в этом отношении, привлекая общие соображения (см. [23–25] и [28], гл. 6), связанные с факторизацией Ω.

Пусть $\mathbb{H}_0$ есть, по определению, семейство всех множеств $H \in \mathcal{P}'(\Omega)$, таких, что

$$\bigcup_{A \in \mathcal{X}} \Omega_0(\omega|A) \subset H \;\; \forall \omega \in H \tag{5.1}$$

Пусть теперь $\mathbf{H}_0$ – множество всех семейств $\mathcal{U} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H}_0)$, таких, что 1) Ω – объединение всех множеств $U \in \mathcal{U}$, 2) $(U_1 \cap U_2 \neq \varnothing) \Rightarrow (U_1 = U_2)\; \forall U_1 \in \mathcal{U}, \forall U_2 \in \mathcal{U}$. Элементы $\mathbf{H}_0$ – разбиения пространства сигналов в сумму непустых множеств со свойством (5.1). В терминах $\mathbf{H}_0$ можно реализовать (см., например, [28], § 6.8) систему локальных итерационных процессов, склеиваемых затем в процедуру (3.1), (3.2). Эти процессы отвечают клеткам соответствующих разбиений из $\mathbf{H}_0$. Эту полезную возможность сейчас не рассматриваем. Рассмотрим только применение самих этих разбиений и связанных с ними факторизаций для поиска способов, облегчающих проверку свойства $Q^0 = \varnothing$. Отметим в этой связи, что при $(\alpha \in \mathbb{K}^\Omega) \vee (\alpha \in \mathcal{K}^\Omega)$ имеем для $\omega \in \Omega$ свойство: если (na)[α^0]$(\omega) = \varnothing$, то $\exists n \in \mathcal{N}$: $\mathbf{\Gamma}^n(\alpha^0)(\omega) = \varnothing$. На самом же деле в этом утверждении можно использовать и некоторые условия, налагаемые на α^0, допускающие комбинацию фрагментов этой МФ с компактными и секвенциально компактными значениями (см. [28], с. 347).

Пусть далее выполнено следующее

Условие 1. Семейство $\mathcal{X}$ является базисом фильтра в X, т.е.

$$\forall A \in \mathcal{X}\; \forall B \in \mathcal{X}\; \exists C \in \mathcal{X}: C \subset A \cap B$$

Замечание. Для задач управления типичен случай, когда $X = [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 < \vartheta_0$ – два числа, а $\mathcal{X}$ – семейство всех промежутков $[t_0, t]$, $t \in X$. Условие 1 здесь выполнено.

Видно, что в рассматриваемом случае

$$\mathfrak{S} \triangleq \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{X}} \Omega_0(\omega|A) \colon \omega \in \Omega \right\} \in \mathbf{H}_0 \tag{5.2}$$

Тем самым определена факторизация Ω; на самом же деле она экстремальна в $\mathbf{H}_0$: разбиение $\mathfrak{S}$ вписано ([32], с. 195, 196) в любое множество $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$. Если $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и $S \in \mathfrak{S}$, то

$$((\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}(\alpha)] \cap S \neq \varnothing) \Rightarrow (S \subset (\mathrm{DOM}[\alpha])) \tag{5.3}$$

Свойство (5.3) разбиения (5.2) (оно проверялось – см. [24] и [28], § 6.9) позволяет дать некоторые рецепты, связанные с вопросом о невырожденности $(\mathrm{na})[\alpha^0]$; сейчас ограничимся только свойством: если $S \in \mathfrak{S}$, то

$$((\mathrm{DOM})[(\mathrm{na})[\alpha^0]] \cap S \neq \varnothing) \Leftrightarrow (S \subset [\mathrm{DOM}][(\mathrm{na})[\alpha^0]])$$

Отметим одно весьма общее положение (см. [24, 25] и [28], § 6.11).

Предложение 5. Пусть $C \in \mathfrak{S}$ и при этом

$$(\alpha^0(\omega) \in \mathbb{K}\ \forall \omega \in C) \vee (\alpha^0(\omega) \in \mathcal{K}\ \forall \omega \in C)$$

Тогда эквивалентны следующие условия:

1) $(\mathrm{DOM})[(\mathrm{na})[\alpha^0]] \cap C = \varnothing$;
2) $C \setminus (\mathrm{DOM})[(\mathrm{na})[\alpha^0]] \neq \varnothing$;
3) $\exists k \in \mathcal{N}\colon (\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0)] \cap C = \varnothing$;
4) $\exists k \in \mathcal{N}_0\colon C \setminus (\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0)] \neq \varnothing$.

Обсуждение. В предложении 5 не требуется сходимости последовательности (3.1) к $(\mathrm{na})[\alpha^0]$; данное утверждение имеет локальный характер – анализируется клетка C разбиения (5.2) и фрагмент $((\mathrm{na})[\alpha^0]|C)$ МФ$(\mathrm{na})[\alpha^0]$ на этой клетке. Если для некоторого $\omega \in C$ имеет место равенство $(\mathrm{na})[\alpha^0](\omega) = \varnothing$ (см. условие 2 в предложении 5), то, согласно условию 3, имеем для некоторого $n \in \mathcal{N}$ свойство $\mathbf{\Gamma}^n(\alpha^0)(\tilde{\omega}) = \varnothing\ \forall \tilde{\omega} \in C$. Итак, прямая версия МПИ (см. условие (3.1)) позволяет при естественных топологических свойствах α^0 на клетках (5.2) фиксировать свойство $(\mathrm{na})[\alpha^0] \notin Q^0$ (и, стало быть, свойство $Q^0 = \varnothing$; см. теорему 1) без исполнения предельного перехода и, более того, это свойство фиксируется универсально в смысле выбора сигнала из соответствующей клетки. Само свойство $\mathbf{\Gamma}^n(\alpha^0)(\omega) = \varnothing$ факторизуется на основе (5.2), что облегчает проверку условия $Q^0 = \varnothing$ (можно рассматривать "клеточный" аналог условия $\mathbf{\Gamma}^n(\alpha^0)(\omega) = \varnothing$ как "надежный" вариант проверки свойства неразрешимости основной задачи в классе квазистратегий).

6. Простейший пример задачи управления. Рассмотрим интерпретацию общих конструкций предыдущих разделов для следующей простейшей задачи управления. Даны две системы

$$\dot{z} = u, \quad u \in P_* \tag{6.1}$$

$$\dot{e} = v, \quad v \in Q_* \tag{6.2}$$

где z, e, u, v – n-мерные векторы, P_* и Q_* – непустые компакты в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}_n$, причем компакт P_* – выпуклый (ограничиваемся рассмотрением так называемых простых движений по соображениям наглядности). Движения систем (6.1), (6.2) рассматриваются на отрезке $[t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$. Для системы (6.1) задано начальное условие: $z(t_0) = z_0 \in \mathbb{R}_n$. Про начальное состояние системы (6.2) известно только, что оно является точкой непустого ограниченного множества E_*, $E_* \subset \mathbb{R}_n$.

Системой (6.1) управляет игрок I, используя любую функцию $U = u(\cdot)$ из множества $\mathcal{U}$ всех борелевских отображений из $[t_0, \vartheta_0]$ в P_*. Каждая функция $U \in \mathcal{U}$ формирует (стартующую из точки z_0), траекторию $\varphi_U^{(1)}$ на $[t_0, \vartheta_0]$, получаемую интегрированием U на промежутках $[t_0, t[$, $t \in [t_0, \vartheta_0]$. Пучок $\{\varphi_U^{(1)} : U \in \mathcal{U}\}$ условимся обозначать далее через Z, предполагая (см. разд. 2), что $Y = \mathbb{R}_n$. Разумеется, Z – непустой компакт в пространстве $\mathbf{C}$ всех непрерывных n-вектор-функций на $[t_0, \vartheta_0]$ с топологией $\mathcal{T}$ равномерной сходимости.

Системой (6.2) управляет игрок II, применяя для этого любую функцию $V = \upsilon(\cdot)$ из некоторого непустого множества $\mathcal{V}$ борелевских отображений из $[t_0, \vartheta_0]$ в Q_*. Кроме того, он может выбрать любой вектор начальных данных $e_0 \in E_*$, после чего реализуется (стартующая из точки e_0) траектория $\varphi_V^{(2)}[e_0]$ на $[t_0, \vartheta_0]$, получаемая интегрированием функции V на промежутках $[t_0, t[$, $t \in [t_0, \vartheta_0]$. Пучок всех таких траекторий $\varphi_V^{(2)}[e_0]$, $V \in \mathcal{V}$, $e_0 \in E_*$, обозначаем далее через $\mathbb{E}$, полагая при этом (см. разд. 2) $E = \mathbb{R}_n$. Разумеется, $\mathbb{E}$ – непустое множество в $\mathbf{C}$, ограниченное в sup-норме $\mathbf{C}$. С учетом сделанных предположений естественно считать далее, что $X = [t_0, \vartheta_0]$.

Пусть $\|\cdot\|$ – евклидова (для определенности) норма в $\mathbb{R}_n$, $\delta \in]0, \infty[$. Определяем при $\Upsilon = \mathbb{R}_n$ оператор Λ (2.1) следующим образом: если $e \in \mathbb{E}$, то $\Lambda(e)$ – по определению множество всех функций ω из $[t_0, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}_n$, для каждой из которых

$$\|e(t) - \omega(t)\| \le \delta \ \forall t \in [t_0, \vartheta_0]$$

Это условие отвечает действию аддитивной δ-ограниченной помехи в канале измерения. Следуя определению (2.2) при упомянутой конкретизации Λ, заключаем, что Ω – непустое множество, элементы которого – функции из $[t_0, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}_n$. Как следствие, оператор (2.3) ставит в соответствие каждой такой вектор-функции непустое подмножество пучка $\mathbb{E}$. Фиксируем в согласии со сказанным в разд. 2 множество M, $M \subset Z \times \mathbb{E}$; пусть

$$M[e] \triangleq \{z \in Z | (z, e) \in M\} \ \forall e \in \mathbb{E} \tag{6.3}$$

Оснащая множество $Y = \mathbb{R}_n$ обычной топологией покоординатной сходимости, получаем ([31], гл. 7) в виде ϑ естественную топологию поточечной сходимости на множестве Z. В этой связи полезно отметить связь с топологией $\mathbf{t}$ равномерной сходимости в Z, индуцированной (в Z) из $(\mathbf{C}, \mathcal{T})$ (см. [31], с. 77). Разумеется, $\mathbf{t}$ – топология Z, порожденная метрикой равномерной сходимости; при этом ([32], с. 174) $\vartheta \subset \mathbf{t}$, поэтому всякое подмножество Z, компактное в ТП $(Z, \mathbf{t})$, компактно в (Z, ϑ), т.е. является элементом $\mathbb{K}$. Полагаем далее, что каждое множество (6.3) замкнуто в ТП $(Z, \mathbf{t})$.

В отношении семейства $\mathcal{X}$ полагаем в дальнейшем

$$\mathcal{X} \triangleq \{[t_0, t] : t \in [t_0, \vartheta_0]\}$$

Ясно, что такое семейство $\mathcal{X}$ есть базис фильтра в X. Таким образом, конкретизирована общая постановка задачи из разд. 2; при этом условие (2.5) превращается в обычное требование неупреждаемости многозначной реакции α на развивающиеся во времени сигналы. Смысл α^0 также понятен: с каждым возможным сигналом ω сопоставляется пучок траекторий из Z, реализующих элемент M в паре с любой траекторией из $\mathbb{E}$, которая может порождать данный сигнал.

Рассмотрим топологические свойства α^0 и покажем, что $\alpha^0(\omega)$, $\omega \in \Omega$, – компактные в $(Z, \mathbf{t})$ подмножества Z. Само ТП $(Z, \mathbf{t})$ – компакт. Стало быть, достаточно установить замкнутость множеств – значений α^0. Фиксируем $\omega \in \Omega$. Рассмотрим множество $\alpha^0(\omega)$ – см. определение (2.4). Поскольку компакт $(Z, \mathbf{t})$ метризуем, достаточно проверить секвенциальную замкнутость. Пусть функция $z \in Z$ такова, что некоторая последовательность $(z_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $\alpha^0(\omega)$ сходится к z в ТП $(Z, \mathbf{t})$. Выберем произвольно $e \in \mathbb{L}(\omega)$. Из определения (2.4) имеем, что $(z_i, e) \in M\ \forall i \in \mathcal{N}$. Иными словами (см. свойство (6.3)), $(z_i)_{i \in \mathcal{N}}$ – последовательность в $M[e]$, сходящаяся к z в $(Z, \mathbf{t})$. В силу замкнутости $M[e]$ имеем $z \in M[e]$, что означает, коль скоро выбор e был произвольным, свойство $z \in \in \alpha^0(\omega)$ – см. свойства (2.4), (6.3). Итак, множество $\alpha^0(\omega)$ замкнуто в $(Z, \mathbf{t})$ и, следовательно, компактно в упомянутом ТП. С учетом соотношений для ϑ и $\mathbf{t}$ заключаем, что множество $\alpha^0(\omega)$ компактно и в (Z, ϑ). Поскольку выбор ω был произвольным, установлено, что $\alpha^0 \in \mathbb{K}^{\Omega}$. В силу предложения 4 имеем (па)$[\alpha^0] = \mathbf{\Gamma}^{\infty}(\alpha^0)$, а теорема 3 доставляет необходимые и достаточные условия того, что $Q^0 \neq \varnothing$. А именно последнее имеет место тогда и только тогда, когда $\mathbf{\Gamma}^{\infty}(\alpha^0)(\omega) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega$.

Можно, разумеется, воспользоваться и соотношениями (4.3), т.е. попытаться найти в пересечении образов множества (4.5) при действии операторов $\mathbf{\Gamma}_{[t_0,\, t]}$, $t \in [t_0, \vartheta_0]$, МФ $\mathfrak{D}^0_{\mathbb{K}}$ со свойством: $\mathfrak{D}^0_{\mathbb{K}}(\omega) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega$.

Автор имел счастливую возможность обсуждать свои результаты с Н.Н. Красовским, начиная с самых первых работ, связанных с итерационными конструкциями, выступать на семинаре Н.Н. Красовского. Это имело большое значение для становления и развития упомянутого направления. Автор выражает Н.Н. Красовскому глубокую благодарность за неизменную поддержку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00415, 04-01-96093).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isaacs R.* Differential Games. N.Y. etc.: Wiley, 1965 = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
5. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
7. *Понтрягин Л.С.* К теории дифференциальных игр // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21. № 4. С. 219–274.
8. *Пшеничный Б.Н.* Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285–287.
9. *Ченцов А.Г.* О структуре одной игровой задачи сближения. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
10. *Ченцов А.Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99. № 3. С. 394–420.
11. *Ченцов А.Г.* К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.

12. *Ченцов А.Г.* К игровой задаче наведения с информационной памятью // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 2. С. 306–308.
13. *Krasovskii N.N., Chentsov A.G.* On the design of differential games. I // Probl. Control and Inform. Theory. 1977. V. 6. № 5–6. P. 381–395.
14. *Krasovskii N.N., Chentsov A.G.* On the design of differential games. II // Probl. Control and Inform. Theory. 1979. V. 8. № 1. P. 3–11.
15. *Roxin E.* Axiomatic approach in differential games // J. Optim Theory and Appl. 1969. V. 3. P. 153–163.
16. *Elliot R.J., Kalton N.J.* The existence of value in differential games // Mem. Amer. Math. Soc. 1972. № 126. 67 p.
17. *Чистяков С.В.* К решению игровых задач преследования // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 825–832.
18. *Меликян А.А.* Цена игры в линейной дифференциальной игре сближения // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 3. С. 521–524.
19. *Ухоботов В.И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 358–361.
20. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
21. *Osipov Yu.S.* An informational game problem // Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 1975. V. 27. P. 482–486.
22. *Кряжимский А.В.* Альтернатива в линейной игре сближения – уклонения с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. № 4. С. 773–776.
23. *Ченцов А.Г.* К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений // Изв. вузов. Математика. 2000. № 3. С. 66–76.
24. *Ченцов А.Г.* Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. I // Дифференц. уравнения. 2001. № 4. С. 470–480.
25. *Ченцов А.Г.* Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. II // Дифференц. уравнения. 2001. № 5. С. 679–688.
26. *Kuratowski K., Mostowski A.* Set Theory. Amsterdam: North – Holland, 1967 = *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
27. *Neveu J.* Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités. Paris: Masson et Cie, 1964 = *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 306 с.
28. *Chentsov A.G., Morina S.I.* Extensions and Relaxations. Dordrecht: Kluwer, 2003. 408 p.
29. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения. Свердловск. 1979. Деп. в ВИНИТИ № 1933–79 Деп. 102 с.
30. *Chentsov A.G., Morina S.I, Zobnin B.B.* On some constructions of control by systems with a varying structure // Mathematics and Computers in Simulation. 1999. V. 49. № 6. P. 319–334.
31. *Kelley J.L.* General Topology. N.Y.: Springer, 1975 = *Келли Дж.Л.* Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
32. *Engelking R.* General Topology. Warszawa: PWN, 1977 = *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.

Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
14.I.2004