УДК 62-50

© 2004 г. Ф. Л. Черноусько

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Рассматривается специальный класс линейных динамических систем, на которые действуют управления и ограниченные возмущения. Предполагается, что возмущения обусловлены погрешностью реализации управляющего воздействия: при нулевом управлении возмущения отсутствуют, а с увеличением интенсивности управления возможная величина возмущений возрастает. Ставится задача о построении управления, доставляющего минимакс заданному критерию оптимальности при произвольной допустимой реализации возмущений. Решение поставленной минимаксной задачи сводится к решению трансцендентных уравнений. При определенных условиях решение получено в явном виде. Рассмотрен пример, в котором оптимальное управление построено как в форме программы, так и в форме синтеза.

1. Постановка задачи. Многие управляемые динамические системы описываются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, \upsilon, t) \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)$ – n-мерный вектор фазовых координат, t – время, $u(t)$ – m-мерный вектор управляющих воздействий, $\upsilon(t)$ – k-мерный вектор возмущений, f – заданная функция своих аргументов. Системы вида (1.1) являются предметом изучения в теории дифференциальных игр [1]. Возмущение $\upsilon(t)$ может интерпретироваться как активное воздействие противника (второго игрока), как неконтролируемое внешнее возмущение, а также как ошибка реализации управления $u(t)$. Последний случай имеет место, если заданное управляющее воздействие (например, сила тяги двигателя) отрабатывается неточно. В этом случае интенсивность возможного возмущения $\upsilon(t)$ зависит от величины управляющего воздействия $u(t)$ и возрастает с ростом этой величины.

Задача, рассматриваемая в данной работе, моделирует описанную выше ситуацию, в которой величина возможного неконтролируемого возмущения обусловлена погрешностью реализации управления и растет с ростом величины управления. Накладываемые ограничения и критерий оптимальности выбраны таким образом, что поставленная задача допускает решение.

Перейдем к формальной постановке задачи.

Рассматривается линейная управляемая система вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)\upsilon + g(t) \tag{1.2}$$

на заданном интервале времени $t \in [t_0, T]$. Здесь x, u, υ имеют тот же смысл, что и в системе (1.1), $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ – заданные матричные функции времени размерности $n \times n$, $n \times m$ и $n \times k$ соответственно, $g(t)$ – заданная n-мерная вектор-функция времени. На возмущение $\upsilon(t)$ наложено ограничение вида

$$(G(t)\upsilon(t), \upsilon(t)) \le \|u(t)\|^4 \tag{1.3}$$

Здесь $G(t)$ – заданная симметрическая положительно-определенная матричная функция времени размерности $k \times k$, скобки $(.,.)$ обозначают скалярное произведение векторов, символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма вектора. В частности, если $G(t)$ – единичная матрица, то условие (1.3) означает, что интенсивность возможного возмущения пропорциональна квадрату величины управления.

В начальный момент $t = t_0$ задано начальное условие

$$x(t_0) = x^0 \tag{1.4}$$

где x^0 – заданный n-мерный вектор.

Критерий оптимальности управления зададим в виде

$$J = \int_{t_0}^{T} [(a(t), x(t)) + b(t)\|u\|^2]dt + F(x(T)) \tag{1.5}$$

Здесь $a(t)$ – заданная n-мерная вектор-функция времени, $b(t)$ – заданная положительная скалярная функция, $F(x)$ – заданная скалярная гладкая функция векторного аргумента. Критерий оптимальности J включает линейное по x интегральное слагаемое, пропорциональное проекции фазового вектора на заданное направление, квадратичное по управлению u слагаемое, а также нелинейное терминальное слагаемое, которое может служить мерой отклонения терминального состояния $x(T)$ от заданной точки. Введение этого нелинейного слагаемого является существенным обобщением постановки задачи, рассмотренной в [2]. Все заданные функции времени, фигурирующие в соотношениях (1.2), (1.3), (1.5), предполагаются кусочно-непрерывными на интервале $t \in [t_0, T]$.

Поставим задачу найти управление, доставляющее следующий минимакс функционалу J из (1.5)

$$J^* = \min_u \max_v J \tag{1.6}$$

при выполнении соотношений (1.2)–(1.4). Здесь максимум берется по всем возмущениям $v(t)$, удовлетворяющим ограничению (1.3), причем при выборе возмущений управление $u(t)$ считается известным на всем интервале $t \in [t_0, T]$. Минимум в (1.6) берется по всем управлениям $u(t)$. При этом будет построено как программное управление $u(t)$, рассчитанное на "наихудший" случай реализации возмущения $v(t)$, так и управление в форме синтеза (по принципу обратной связи) как функция $u = u^*(x, t)$ от времени и текущего фазового состояния, рассчитанное на наихудшую будущую реализацию возмущения. Поставленная задача может трактоваться как задача гарантированного (в смысле критерия оптимальности (1.6)) управления ансамблем траекторий системы (1.2) при всевозможных допустимых ограничениях.

2. Преобразования. Выполним некоторые преобразования, упрощающие поставленную задачу. Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу системы (1.2). Эта матрица определяется соотношениями

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(t_0) = E_n \tag{2.1}$$

где E_n – единичная $(n \times n)$-матрица. Считая фундаментальную матрицу известной, сделаем в системе (1.2) замену фазового вектора и возмущения

$$x = \Phi(t)y, \quad v = \|u\|^2 D(t)w \tag{2.2}$$

Квадратную невырожденную матрицу $D(t)$ размерности $k \times k$ выберем таким образом, чтобы при всех $t \in [t_0, T]$ выполнялось тождество

$$D^T G D = E_k \tag{2.3}$$

Соотношение (2.3) означает, что преобразование возмущения в (2.2) должно приводить квадратичную форму (1.3) к сумме квадратов. В качестве $D(t)$ можно взять, например, матрицу $G^{-1/2}$.

После подстановки (2.2) система (1.2) примет вид

$$\dot{y} = B_1(t)u + \|u\|^2 C_1(t)w + g_1(t) \tag{2.4}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} &B_1(t) = \Phi^{-1}(t)B(t), \quad C_1(t) = \Phi^{-1}(t)C(t)D(t) \\ &g_1(t) = \Phi^{-1}(t)g(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ограничение (1.3) при учете равенств (2.2) и (2.3) преобразуется к простому виду

$$\|w\| \le 1 \tag{2.6}$$

Начальное условие (1.4) и критерий оптимальности (1.5) в результате замены переменных (2.2) запишутся в виде

$$y(t_0) = x^0 \tag{2.7}$$

$$J = \int_{t_0}^{T} [(a_1(t), y(t)) + b(t)\|u\|^2]dt + F_1(y(T)) \tag{2.8}$$

Здесь обозначено

$$a_1(t) = \Phi^T(t)a(t), \quad F_1(y) = F(\Phi(T)y) \tag{2.9}$$

Таким образом, исходная задача (1.2)–(1.6) сводится к отысканию минимакса

$$J^* = \min_u \max_w J \tag{2.10}$$

для системы (2.4) с ограничением (2.6) на возмущение w, с начальными условиями (2.7) и с критерием оптимальности (2.8). Пользуясь принципом максимума [3], последовательно определим сначала максимум J по w, а затем минимум по u.

3. Построение решения. Для задачи о максимуме функционала (2.8) по w составим функцию Гамильтона для системы (2.4) с критерием оптимальности (2.8)

$$H = (p, B_1u) + \|u\|^2(C_1^T p, w) + (p, g_1) + (a_1, y) + b\|u\|^2 \tag{3.1}$$

Запишем сопряженную систему и условие трансверсальности для сопряженного вектора $p(t)$

$$\dot{p} = -a_1(t), \quad p(T) = \partial F_1(y(T))/\partial y \tag{3.2}$$

Решая задачу Коши (3.2), получим

$$p(t, y(T)) = \int_t^T a_1(\tau)d\tau + \frac{\partial F_1(y(T))}{\partial y} \tag{3.3}$$

Условие максимума гамильтониана (3.1) по w при ограничении (2.6) дает

$$w(t) = \|C_1^T p\|^{-1} C_1^T p \tag{3.4}$$

Подставляя функцию $w(t)$ из (3.4) в систему (2.4), получим

$$\dot{y} = B_1 u + \|u\|^2 \left\|C_1^T p\right\|^{-1} C_1 C_1^T p + g_1 \tag{3.5}$$

Рассмотрим теперь задачу о минимуме функционала (2.8) по u для системы (3.5). Функция Гамильтона для этой задачи оптимального управления имеет вид

$$H_1 = (p_1, B_1 u) + \|u\|^2 \left\|C_1^T p\right\|^{-1} (p_1, C_1 C_1^T p) + (p_1, g_1) - (a_1, y) - b\|u\|^2 \tag{3.6}$$

Здесь p_1 – сопряженный вектор для рассматриваемой задачи, удовлетворяющий следующей сопряженной системе и условию трансверсальности

$$\dot{p}_1 = a_1(t), \quad p_1(T) = -\partial F_1(y(T))/\partial y \tag{3.7}$$

Сопоставляя соотношения (3.7) и (3.2), находим, что имеет место равенство

$$p_1 = -p(t, y(T)), \quad t \in [t_0, T] \tag{3.8}$$

Функция $p(t, y(T))$ определена равенством (3.3).

Подставляя выражение (3.8) в гамильтониан (3.6), получим после упрощений

$$H_1 = -(B_1^T p, u) - \|u\|^2 (\left\|C_1^T p\right\| + b) - (p, g_1) - (a_1, y) \tag{3.9}$$

Максимум гамильтониана H_1 из (3.9) по u достигается при

$$u(t) = -\frac{B_1^T p}{2(\left\|C_1^T p\right\| + b)} \tag{3.10}$$

Формулы (3.10) и (3.4) выражают оптимальное программное управление $u(t)$ и "наихудшее" возмущение $w(t)$ через заданные функции времени и сопряженный вектор p, определяемый соотношением (3.3) и зависящий, в свою очередь, от терминального значения $y(T)$ фазового вектора. Поэтому для нахождения решения в законченном виде требуется еще определить $y(T)$.

Подставим управление $u(t)$ из (3.10) в систему (3.5) и проинтегрируем ее при начальном условии (2.7). Получим

$$y(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} L(p, \tau) d\tau \tag{3.11}$$

где введено обозначение

$$L(p, t) = \frac{\left\|B_1^T p\right\|^2 C_1 C_1^T p}{4\left\|C_1^T p\right\| (\left\|C_1^T p\right\| + b)^2} - \frac{B_1 B_1^T p}{2(\left\|C_1^T p\right\| + b)} + g_1 \tag{3.12}$$

Зависимость функции $L(p, t)$ от второго аргумента обусловлена зависимостью от t заданной функции $b(t)$, а также функций $B_1(t)$, $C_1(t)$, $g_1(t)$, которые определены соотношениями (2.5). Функция $p(t, y(T))$ определена равенством (3.3).

Полагая $t = T$ в (3.11), получим

$$y(T) = x^0 + \int_{t_0}^{T} L(p(t, y(T)), t) dt \tag{3.13}$$

Равенство (3.13) представляет собой систему n уравнений для неизвестного n-мерного вектора $y(T)$. Вопрос о существовании и единственности решения этой системы в общем случае остается открытым. Ниже рассматриваются некоторые частные случаи, в которых существует единственное решение этого уравнения.

Предположим, что единственное решение $y(T)$ системы (3.13) найдено. Тогда приходим к следующей процедуре решения поставленной минимаксной задачи. Когда вектор $y(T)$ найден, сопряженный вектор $p(t, y(T))$ полностью определен равенством (3.3), оптимальное программное управление $u(t)$ и наихудшее возмущение $w(t)$ задаются равенствами (3.10) и (3.4) соответственно, а фазовый вектор $y(t)$ для данных $u(t)$ и $w(t)$ определен в виде квадратуры (3.11). Искомый минимакс J^* функционала J найдем, подставляя в равенство (2.8) найденные функции $u(t)$ из (3.10), $y(t)$ из (3.11) и вычисляя еще одну квадратуру. Фазовую траекторию $x(t)$ и возмущение $\upsilon(t)$ в исходных переменных определим при помощи соотношений (2.2).

Выше описана процедура построения оптимального программного управления $u(t)$ при заданном начальном условии $x(t_0) = x^0$ из (1.4). Найденное управление, зависящее от начальных данных, можно представить в виде функции $u = \tilde{u}\,(t;\, t_0,\, x^0)$. Аналогично, наихудшее возмущение представляется в виде $\upsilon = \tilde{\upsilon}\,(t;\, t_0,\, x^0)$. Чтобы получить оптимальное управление по принципу обратной связи, т.е. в форме синтеза, нужно отождествить текущий момент t и начальный момент t_0. Полученные в результате функции

$$\bar{u}(x, t) = \tilde{u}(t;\, t, x), \quad \bar{\upsilon}(x, t) = \tilde{\upsilon}(t;\, t, x) \tag{3.14}$$

представляют собой, соответственно, искомое оптимальное управление и наихудшее возмущение в форме синтеза.

Отметим, что если возмущение отличается от наихудшего, то, используя оптимальное управление по обратной связи $\bar{u}\,(x,\, t)$, будем получать выигрыш по функционалу (по сравнению с его значением для программного управления), так как применяемое управление будет оптимальным для каждого текущего состояния, рассматриваемого как начальное.

4. Линейный случай. Наиболее простое решение имеет место, если функция $F(x)$ в формуле для функционала (1.5) линейна, т.е.

$$F(x) = (c, x) \tag{4.1}$$

Здесь c – заданный n-мерный вектор. В этом случае, рассмотренном ранее [2], сопряженный вектор полностью определяется равенством (3.3) и не зависит от $y(T)$. Имеем из соотношений (3.3), (4.1)

$$p(t) = c + \int_t^T a_1(\tau)d\tau \tag{4.2}$$

Так как $p(t)$ не зависит от $y(T)$, то в этом случае отпадает необходимость решать систему (3.13), и все искомые величины определяются в замкнутом виде. Оптимальное управление $u(t)$ и наихудшее возмущение $w(t)$ определяются формулами (3.10) и (3.4) соответственно, в которые нужно подставить $p(t)$ из (4.2). Формула (3.11) определяет оптимальную фазовую траекторию. При этом управление в форме синтеза $u(t)$ совпадает с программным управлением. Другими словами, нет необходимости пересчитывать оптимальное управление в каждый момент времени, так как оно оказывается не зависящим от текущего фазового состояния и, следовательно, от реализации возмущения. Был приведен пример, в котором решение для рассматриваемого линейного случая доведено до конечных формул [2].

5. Пример. В качестве примера рассмотрим задачу управления системой второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + \upsilon \tag{5.1}$$

при начальных условиях

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0 \tag{5.2}$$

Здесь x_1 – координата системы, x_2 – ее скорость, u – управляющая сила, υ – возмущение, представляющее собой погрешность реализации управления. Ограничение (1.3) возмущения возьмем в виде

$$|\upsilon| \le ku^2 \tag{5.3}$$

где $k > 0$ – заданная постоянная.

Критерий оптимальности (1.5) зададим в виде

$$J = b\int\limits_{t_0}^{T} u^2 dt + x_1^2(T) \tag{5.4}$$

где $b > 0$ – заданная постоянная. Критерий (5.4) включает ресурс управления и квадратичную ошибку приведения системы в нуль по координате.

Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы (5.1), удовлетворяющая условиям (2.1), и обратная к ней матрица $\Phi^{-1}(t)$ таковы:

$$\Phi(t) = \begin{Vmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} 1 & t_0 - t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{5.5}$$

Для рассматриваемого примера (5.1)–(5.4) имеем в соответствии с обозначениями (1.2), (1.3), (1.5)

$$B = C = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad g = 0, \quad G = k^2, \quad a = 0, \quad F(x) = x_1^2 \tag{5.6}$$

Матрицы и векторы D, B_1, C_1, g_1, a_1, определяемые соотношениями (2.3), (2.5), (2.9), (5.6) и фундаментальной матрицей (5.5), таковы:

$$D = k, \quad B_1(t) = \begin{Vmatrix} t_0 - t \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C_1 = kB_1, \quad g_1 = a_1 = 0 \tag{5.7}$$

Вычисляя функцию $F_1(y)$ и ее производные по y при помощи равенств (2.9), (5.5), (5.6), получим

$$F_1(y) = F(\Phi(T)y) = Y^2, \quad \frac{\partial F_1(y)}{\partial y} = 2Y\begin{Vmatrix} 1 \\ T - t_0 \end{Vmatrix} \tag{5.8}$$

где

$$Y = y_1 + (T - t_0)y_2 \tag{5.9}$$

Сопряженный вектор (3.3) в силу последнего равенства (5.7) для a_1 и (5.8) оказывается постоянным:

$$p = 2Y(T)\begin{Vmatrix} 1 \\ T - t_0 \end{Vmatrix} \tag{5.10}$$

Подставим выражения для B_1, C_1, g_1 из (5.7) и p из (5.10) в формулу (3.12) для $L(p, t)$. После упрощений и введения обозначений

$$\eta = Y(T), \quad s = 2k|\eta|b^{-1}, \quad Z = (T - t)s, \quad z = (T - t_0)s \tag{5.11}$$

будем иметь

$$L(p,t) = \frac{\eta Z(2+Z)}{2bs(1+Z)^2}\begin{Vmatrix} t-t_0 \\ -1 \end{Vmatrix} \tag{5.12}$$

Подставим выражение (5.12) в интеграл (3.11) и вычислим его. Получим

$$\int_{t_0}^{t} L d\tau = \frac{\eta}{2bs}\begin{Vmatrix} \frac{(t-t_0)^2}{2} - \frac{t-t_0}{s(1+Z)} - \frac{1}{s^2}\ln\frac{(1+Z)}{(1+z)} \\ t_0 - t + \frac{1}{s(1+Z)} - \frac{1}{s(1+z)} \end{Vmatrix} \tag{5.13}$$

В равенстве (5.13) положим $t = T$ (тогда $Z = 0$) и подставим полученное выражение в уравнение (3.13). В результате получим

$$\begin{Vmatrix} y_1(T) \\ y_2(T) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{Vmatrix} + \frac{\eta}{2bs^3}\begin{Vmatrix} z^2/2 - z + \ln(1+z) \\ -sz^2(1+z)^{-1} \end{Vmatrix} \tag{5.14}$$

Заметим, что величины η и s, фигурирующие в правой части равенства (5.14), выражаются через вектор $y(T)$ посредством равенств (5.9) и (5.11). Поэтому равенство (5.14) представляет собой систему двух трансцендентных уравнений для компонент $y_1(T)$ и $y_2(T)$ вектора $y(T)$.

Эту систему приведем к одному уравнению, для чего сначала подставим $y_1(T)$ и $y_2(T)$ из (5.14) в формулы (5.9) и (5.11) для η. Разрешая полученное соотношение относительно η и вводя обозначение

$$\psi(z) = \frac{2+z+z^2}{2z(1+z)} - z^{-2}\ln(1+z) \tag{5.15}$$

будем иметь

$$\eta = [1 + (T-t_0)^3(2b)^{-1}z^{-1}\psi(z)]^{-1}[x_1^0 + (T-t_0)x_2^0] \tag{5.16}$$

Учитывая, что $\psi(z) > 0$ при всех $z \geq 0$, вычислим модуль обеих частей равенства (5.16) и подставим полученное выражение для $|\eta|$ во второе и последнее соотношения (5.11). В результате будем иметь следующее уравнение относительно z:

$$z + (T-t_0)^3(2b)^{-1}\psi(z) = 2k(T-t_0)b^{-1}\xi \tag{5.17}$$

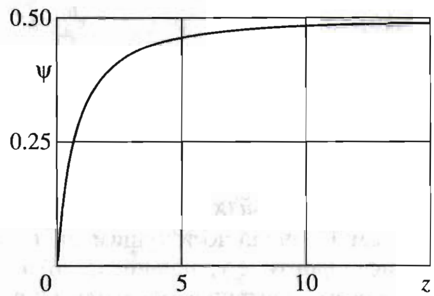
Здесь обозначено

$$\xi = \left|x_1^0 + (T-t_0)x_2^0\right| \tag{5.18}$$

Функция $\psi(z)$ строго возрастает при $z > 0$ (фигура). Таким образом, левая часть уравнения (5.17) – монотонная функция, строго возрастающая от 0 до ∞. Следовательно, это уравнение имеет единственное решение $z > 0$ при всех значениях положительных параметров $T - t_0$, k, b, ξ.

В предельных случаях малых и больших значений величины ξ, воспользовавшись асимптотиками

$$\psi(z) \sim 2z/3 \quad \text{при} \quad z \to 0, \quad \psi(z) \to 1/2 \quad \text{при} \quad z \to \infty \tag{5.19}$$



решение уравнения (5.17) можно найти в явном виде

$$z = 2k(T-t_0)\xi[b+(T-t_0)^3/3]^{-1} + \ldots \quad \text{при} \quad \xi \to 0 \tag{5.20}$$

$$z = 2k(T-t_0)\xi b^{-1} + \ldots \quad \text{при} \quad \xi \to \infty \tag{5.21}$$

В общем случае решение уравнения (5.17) нетрудно найти численно при заданных значениях параметров $T - t_0$, k, b, ξ. После этого определим η по формуле (5.16), s при помощи второго равенства (5.11), а затем вектор $y(T)$ из соотношения (5.14). Оптимальное программное управление $u(t)$ определяется по формуле (3.10), в которую нужно подставить выражения для B_1, C_1 из (5.7) и p из (5.1). Получим окончательно

$$u(t) = \frac{\eta(t-T)}{2k|\eta|(T-t)+b} \tag{5.22}$$

Величина η определена равенством (5.16). Наихудшее возмущение $\upsilon(t)$ определяется соотношениями (2.2), (3.4), в которые нужно подставить выражения (5.7) для D и C_1, (5.10) для p и (5.22) для $u(t)$. Имеем

$$\upsilon(t) = \frac{k\eta|\eta|(T-t)^2}{[2k|\eta|(T-t)+b]^2} \tag{5.23}$$

Оптимальную траекторию $y(t)$ можно определить, подставляя в равенство (3.11) выражение для интеграла (5.13). После этого, пользуясь соотношениями $x(t) = \Phi(t)y(t)$ из (2.2) и равенствами (5.5), найдем оптимальную траекторию $x(t)$ в исходных переменных. В частности, получим (см. (5.9), (5.11))

$$x_1(T) = y_1(T) + (T-t_0)y_2(T) = \eta \tag{5.24}$$

Минимаксное значение J^* функционала J определим, подставляя выражения (5.22) и (5.24) в соотношение (5.4). Выражая η через z по формулам (5.11), получим

$$J^* = \frac{b(T-t_0)}{2k^2}\left[\frac{2+z}{1+z} - \frac{2}{z}\ln(1+z)\right] + \frac{b^2z^2}{4k^2(T-t_0)^2} \tag{5.25}$$

В предельных случаях $\xi \to 0$ и $\xi \to \infty$, используя асимптотики (5.20),(5.21), имеем

$$J^* = \xi^2[1+(T-t_0)^3(3b)^{-1}]^{-1} + \ldots \quad \text{при} \quad \xi \to 0$$

$$J^* = \xi^2 + \ldots \quad \text{при} \quad \xi \to \infty$$

Величина ξ определена формулой (5.18).

Тем самым завершается решение поставленной минимаксной задачи в форме программы. Для получения решения в форме синтеза проделаем построения, описанные в конце разд. 3.

В сотношениях (5.11), (5.16)–(5.18) положим $t_0 = t$, $x^0 = x$. Тогда получим

$$z + (T-t)^3(2b)^{-1}\psi(z) = 2k(T-t)b^{-1}\xi, \quad \xi = |x_1 + (T-t)x_2| \tag{5.26}$$

$$\eta = \frac{x_1 + (T-t)x_2}{1 + (T-t)^3 2b^{-1}\psi(z)} \tag{5.27}$$

Синтез оптимального управления $u = \bar{u}(x, t)$ и наихудшего возмущения $\upsilon = \bar{\upsilon}(x, t)$ определяется следующим образом. Сначала по текущим значениям времени t и фазового вектора x нужно решить трансцендентное уравнение (5.26) для z. Определив единственное положительное решение z этого уравнения, определим η по формуле (5.27) и подставим найденное значение в соотношения (5.22) для u и (5.23) для υ. Получим искомый синтез управления $\bar{u}(x, t)$ и возмущения $\bar{\upsilon}(x, t)$. Полагая $t_0 = t$ в (5.25), найдем минимаксное значение функционала как функцию текущих значений t, x.

Рассмотрим частный случай отсутствия возмущений: $\upsilon = 0$ в (5.1). Для этого положим $k = 0$ в соотношении (5.3). Чтобы получить решение для этого случая, совершим предельный переход при $k \to 0$ в полученных соотношениях. Положим $z = k\zeta$, где ζ – новая переменная. Из асимптотики (5.20) получим при $k \to 0$

$$\zeta = 2(T-t_0)\xi[b + (T-t_0)^3/3]^{-1} \tag{5.28}$$

Принимая во внимание равенства $z = k\zeta$, (5.18) и (5.28), получим из выражений (5.16), (5.22) и (5.25) при $k \to 0$

$$\eta = \frac{x_1^0 + (T-t_0)x_2^0}{1 + (T-t_0)^3(3b)^{-1}}$$

$$u(t) = \frac{\eta(t-T)}{b} = \frac{[x_1^0 + (T-t_0)x_2^0](t-T)}{b + (T-t_0)^3/3} \tag{5.29}$$

$$J^* = \frac{b\zeta^2}{4(T-t_0)^2}\left[b + \frac{(T-t_0)^2}{3}\right] = \frac{[x_1^0 + (T-t_0)x_2^0]^2}{1 + (T-t_0)^3(2b)^{-1}}$$

Нетрудно проверить, что соотношения (5.29) определяют оптимальное программное управление $u(t)$ и минимальное значение функционала для задачи оптимального управления (5.1)–(5.4) при отсутствии возмущений. Оптимальное управление в форме синтеза получим, заменяя t_0, x_0 на t, x в (5.29).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00201) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1627.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* Минимаксное управление для одного класса систем, подверженных возмущениям // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 4. С. 468–471.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

Москва
e-mail: chern@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
29.XII.2003