УДК 62–50

© 2004 г. А. Б. Куржанский

О СИНТЕЗЕ УПРАВЛЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассматривается детерминированная задача о построении синтезированных стратегий управления по результатам доступных наблюдений в условиях неизвестных, но априорно ограниченных помех, при жестких ограничениях на неопределенные параметры. Предлагаемые решения опираются на методы динамического программирования и многозначного анализа и сформулированы в терминах гамильтонова формализма. Показано, что рассматриваемая задача может быть разделена на две – конечномерную задачу оценивания и бесконечномерную задачу управления.

Среди задач о синтезе управлений центральное место занимает изучение систем с неполной информацией. Оно направлено на построение наилучшего или более приемлемого в некотором смысле процесса, и объяснения того, насколько уровень неопределенности в его задании, "количество информации", известной априорно, а также сообщаемой по ходу управления, могут сказаться на значениях целевых функций или иных оценках его качества. Ведущая роль среди инициаторов этой тематики принадлежит Н.Н. Красовскому, предложившему как игровые, так и стохастические подходы [1–5]. Стохастическим постановкам подобных задач посвящена обширная литература, где, в частности, был предложен принцип разделения общего решения на независимые решения задач наблюдения и управления [6–9]. Новые интерпретации решений задач управления с неполной информацией предложены в рамках так называемой теории H_∞ [10–12].

В предлагаемой работе рассматривается детерминированная задача о построении синтезированных стратегий управления по результатам доступных наблюдений в условиях неизвестных, но априорно ограниченных помех, при жестких ограничениях на неопределенные параметры. Работа продолжает исследования автора [13–15].

1. Основная задача. Предварительная постановка. Приведем вначале постановку и общий подход к решению задачи синтеза управлений по результатам измерений (наблюдений).

Рассмотрим n-мерную систему

$$dx/dt = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v) \tag{1.1}$$

где непрерывные по совокупности переменных функции $f_1(t, x, u)$, $f_2(t, x, v)$ таковы, что их сумма удовлетворяет стандартным условиям единственности и продолжаемости решения уравнения (1.1) на конечный промежуток времени $[t_0, t_1]$ при любом начальном условии $x^0 \in \mathbf{R}^n$, а также при любых допустимых управлениях $u(t)$ и возмущениях $v(t)$, стесненных геометрическими (чебышевскими) ограничениями

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t), \quad x(t_0) \in \mathcal{X}_0 \tag{1.2}$$

при всех $t \in [t_0, t_1]$ [5, 16]. Здесь $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$ – многозначные функции со значениями во множестве компактов пространств $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q$ соответственно, непрерывные в метрике Хаусдорфа, множество $\mathcal{X}_0$ – компакт. Пару $\{t_0, \mathcal{X}_0\}$ будем называть "начальной позицией" системы.

Будем также считать, что множества $\mathcal{F}_1(t, x) = f_1(t, x, \mathcal{P}(t))$, $\mathcal{F}_2(t, x) = f_2(t, x, \mathcal{Q}(t))$ – выпуклые компакты. Тогда, в силу указанных ранее свойств, многозначные функции $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ будут непрерывны по Хаусдорфу по совокупности переменных.

Текущая информация о векторе x доставляется посредством наблюдений, полученных в силу уравнения измерений

$$y(t) = g(t, x) + w \tag{1.3}$$

где $y(t) \in \mathbf{R}^r$ – доступное измерение, $w(t)$ – неизвестное возмущение, информация о котором исчерпывается заданием ограничения

$$w(t) \in \mathcal{R}(t), \quad t \in [t_0, t_1] \tag{1.4}$$

Функция $g(t, x)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных, свойства функции $\mathcal{R}(t)$ аналогичны свойствам $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$.

Зная начальную позицию $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$, функции $f_1(t, x, u, v)$, $f_2(t, x, u, v)$, $g(t, x)$, реализацию управления $u[t]$ $(t \in [t_0, \tau])$, многозначные функции $\mathcal{Q}(t)$, $\mathcal{R}(t)$ и поступившие по ходу процесса измерения $y_\tau(\sigma) = y(\tau + \sigma)$ $(\sigma \in [t_0 - \tau, 0])$, можно построить *информационное множество* $\mathcal{X}(\tau, y_\tau(\cdot)) = \mathcal{X}(\tau, \cdot)$ системы (1.1)–(1.4), совместимое с ее параметрами и с полученными измерениями. Таким образом, *текущей позицией* системы можно считать пару $\{\tau, \mathcal{X}(\tau, \cdot)\}$. Использование информационных множеств и описание их свойств является предметом *теории гарантированного оценивания* [1, 13, 14, 17, 18].

Задача о синтезе управлений, подлежащая рассмотрению, будет состоять в том, чтобы найти такую стратегию управления $u(\tau, \mathcal{X}(\tau, \cdot))$ $(\tau \in [t_0, t_1])$, построенную по результатам наблюдений, которая для любой начальной позиции $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$ приводила бы вектор $x(t_1)$ в предписанную окрестность заданного целевого множества – компакта $\mathcal{M}$, *невзирая* на неизвестные возмущения. При этом класс допустимых стратегий $\mathcal{U} = \{u(\tau, \mathcal{X}(\tau, \cdot))\}$ должен будет обеспечивать существование и продолжаемость решений уравнения (дифференциального включения) (1.1) при $u = u(\tau, \mathcal{X}(\tau, \cdot))$ $(\tau \in [t_0, t_1])$.

Поскольку позиция $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$ произвольна, полученное решение должно иметь силу и для любой текущей позиции, $\{\tau, \mathcal{X}(\tau, \cdot)\}$ $(\tau \in [t_0, t_1])$, если принять последнюю позицию за исходную.

Таким образом, решение совокупной задачи будет состоять в сочетании процессов наблюдения и управления. Пусть на промежутке $[t_0, \tau)$ реализовались управление $u^*(t)$ и наблюдение $y^*(t)$. Данную задачу можно предварительно пояснить при помощи функционала:

$$\mathcal{V}(t_0, \mathcal{X}^0 | u^*(t), y^*(t), t_0 \le t \le \tau) = \min_u \max_{\zeta(\cdot)} \left\{ -d^2(x(t_0), \mathcal{X}^0) - \right.$$

$$\left. - \int_{t_0}^{\tau} d^2(y^*(t) - g(t, x(t)), \mathcal{R}(t))dt - \int_{\tau}^{t_1} d^2(\xi(t), \mathcal{R}(t))dt + d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \right\} \tag{1.5}$$

Здесь $d^2(x, \mathcal{X}) = \min\{(x - z, x - z) | z \in \mathcal{X}\}$ – квадрат евклидова расстояния от точки x до множества $\mathcal{X}$, $x(t_0)$, $x(t_1)$ – концы траектории $x(t)$ системы (1.1), $\zeta(\cdot) = \{x(t_0), v(\cdot), \xi(\cdot)\}$, причем $v = v(t)$ рассматривается на промежутке $[t_0, t_1]$, а $u = u(t, \mathcal{X}(t, \cdot))$ и $\xi = \xi(t)$ – на $(\tau, t_1]$. Заметим, что на промежутке $[t_0, \tau]$, где наблюдение $y^*(t)$ известно, реализовавшаяся помеха наблюдения $\xi^*(t) = y^*(t) - g(t, x(t))$.

Функционал (1.5) следует промаксимизировать по $\zeta(\cdot)$ и проминимизировать по u в классе стратегий, указанном далее.

Ниже, в разделах 3–5, будет сформулирована более строгая постановка задачи и ее интерпретация. Однако отметим, что уже из предварительной постановки можно заключить, что совокупная задача (задача $E - C$) разбивается на две, а именно, на задачу E – о гарантированном оценивании (вычислении текущей позиции системы) и задачу

C – о построении самих синтезированных управлений (функционалов от текущей позиции системы), осуществляющих предписанную цель управления.

2. Гарантированное оценивание состояния системы. Задачу E рассмотрим в двух вариантах – E и E_0.

Задача E. Пусть задана система (1.1)–(1.2) и уравнение измерений (1.3)–(1.4). Пусть известны начальная позиция $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$, измеренные значения $y^*_\tau(\cdot)$, а также реализация управления $u = u^*(t)$ $(t \in [t_0, \tau))$. Требуется найти *информационное множество* $\mathcal{X}(\tau, \cdot)$ состояний $x(\tau)$ системы (1.1), совместимых со значениями $y^*(t)$ при ограничениях (1.1)–(1.4) и заданной реализацией $u^*(t)$.

"Информационное множество" $\mathcal{X}[\tau] = \mathcal{X}(\tau, \cdot)$ является *гарантированной оценкой* вектора $x(\tau)$. Оно содержит неизвестный истинный вектор $x(\tau)$ системы. В связи с этим, за *текущее состояние* совокупной системы с неполными измерениями уместно, при $t \geq t_0$, принять пару $\{t, \mathcal{X}[t]\}$. (Эквивалентным определением текущего состояния системы может также служить пара $\{t, y_t(\cdot)\}$ $(y_t(\cdot) = y(t + \sigma), \sigma \in [t_0 - t, 0])$.)

Для решения рассматриваемых здесь основных задач E и C данной статьи следует получить описание эволюции множества $\mathcal{X}[\tau] = \mathcal{X}(\tau, \cdot)$ во времени. Сделаем это путем решения следующей альтернативной задачи.

Задача E_0. Пусть известны начальная позиция $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$, измеренные значения $y^*_\tau(\cdot)$, а также реализация управления $u^*(t)$ при $t \in [t_0, \tau)$. Требуется найти

$$-V(\tau, x) = \max_{\upsilon}\Bigg\{-d^2(x[t_0], \mathcal{X}^0) - \\ - \int_{t_0}^{\tau} d^2(y^*(t) - g(t, x), \mathcal{R}(t))dt \,|\, x[t_0] \in \mathbf{R}^n, \quad \upsilon(t) \in \mathcal{Q}(t), \quad t \in [t_0, \tau]\Bigg\} \tag{2.1}$$

при условии $x[\tau] = x$, в силу системы (1.1).

Начальное условие для вычисления функции $V(t, x)$ будет задаваться равенством $V(t_0, x) = d^2(x, \mathcal{M})$.

Здесь символ $x[t] = x\,(t, \tau, x)$ $(t \leq \tau)$ означает попятную траекторию, выпущенную из точки $\{\tau, x\}$ в силу системы (1.1).

Замечание 2.1. Если функционал (1.5) разбить на сумму двух частей: первую – заданную на $[t_0, \tau]$, и вторую, заданную на $(\tau, t_1]$, то функционал (2.1) будет представлять как раз первую часть, отражающую задачу оценивания (вычисление текущего состояния системы).

Функцию $V(\tau, x)$ будем называть "информационным состоянием" системы (1.1)–(1.4).

Лемма 2.1. Информационное множество $\mathcal{X}[\tau]$ является множеством уровня информационного состояния – функции $V(\tau, x)$:

$$\mathcal{X}[\tau] = \{x : V(\tau, x) \leq 0\}) \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что в качестве позиции системы можно выбирать не только одну из пар $\{\tau, \mathcal{X}[\tau]\}$, $\{\tau, y_\tau(\cdot)\}$, как указывалось ранее, но и пару $\{\tau, V(\tau, \cdot)\}$. Далее будем в основном пользоваться последним из этих вариантов, не отказываясь порой, с целью содержательного пояснения решения, от перехода к первым двум. Сказанное объясняется тем, что эволюцию позиции $\{\tau, V(\tau, \cdot)\}$ удается описать в более известных терминах теории уравнений в частных производных.

Для функции $V(\tau, x)$ введем дополнительное обозначение $V(\tau, x) = V(\tau, x | V(t_0, \cdot))$, подчеркивая зависимость этой функции от начального условия $V(t_0, \cdot)$.

Лемма 2.2. Справедливо свойство

$$V(\tau, x | V(t_0, \cdot)) = V(\tau, x | V(t, \cdot | V(t_0, \cdot))), \quad t_0 \leq t \leq \tau \tag{2.3}$$

Замечание 2.2. Формула (2.3) выражает "принцип оптимальности" для задачи гарантированного оценивания, взятой в форме E_0. Она отражает *полугрупповое свойство* отображения $V(\tau, x|V(t_0, \cdot))$.

Из формулы 2.3 вытекает "прямое" уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана (ГЯБ) в частных производных для функции $V(t, x)$. Формальный вывод этого уравнения следует стандартным схемам теории динамического программирования [8, 21].

Приведем упомянутое уравнение. Имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\max_{\upsilon}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}, f_1(t, x, u^*(t)) + f_2(t, x, \upsilon)\right) - \right.$$

$$\left. - d^2(y^*(t) - g(t, x), \mathcal{R}(t)) \,|\, \upsilon(t) \in \mathcal{Q}(t)\right\}, \quad t \in [t_0, \tau] \tag{2.4}$$

при граничном условии

$$V(t_0, x) = d^2(x, \mathcal{X}^0) \tag{2.5}$$

Уравнение (2.4) при условии (2.5) может не иметь классического решения вследствие негладкости функции $V(t, x)$. Тогда решение этого уравнения следует понимать в обобщенном смысле, например, как "вязкостное" [19–22] "минимаксное" [23]. В общем случае его можно определять через обобщенные производные, субдифференциалы Дини или эквивалентные понятия [24].

Теорема 2.1. Если, при $u = u^*(t)$, $y = y^*(t)$ ($t \in [t_0, \tau]$), уравнение (2.4) при условии (2.5) имеет обобщенное (вязкостное) решение $V(t, x)$, то справедливо равенство

$$\mathcal{X}[\tau] = \{x : V(\tau, x) \le 0\} \tag{2.6}$$

Естественно, что классическое решение уравнения (2.4) при условии (2.5) совпадает, если оно существует, с обобщенным решением.

Существование обобщенного решения уравнения (2.4) при условии (2.5) необходимо и достаточно для существования решения задачи E_0. В этом случае отображение $V[t] = V(t, \cdot) = V(t, \cdot|V(t_0, \cdot))$ удовлетворяет эволюционному уравнению вида

$$\frac{\partial V(t, \cdot)}{\partial t} = \Phi(t, V_x(t, \cdot), \cdot|u^*(t), y^*(t)) \tag{2.7}$$

которое есть не что иное как уравнение (2.4), а именно, его правая часть совпадает с правой частью уравнения (2.4).

Вместо решения уравнения ГЯБ вида (2.4) при условии (2.5), определяющего, согласно лемме 2.1, информационное множество $\mathcal{X}[\tau]$, возможно другое описание этого множества.

Приведем вывод альтернативного уравнения ГЯБ при дополнительном предположении о гладкости и выпуклости ограничений. Пусть заданы собственные непрерывно дифференцируемые функции $\varphi_0(x)$, $\varphi(t, x)$, выпуклые по x. Тогда начальное множество и ограничение, налагаемое на помеху ξ в уравнении измерений (1.3), могут быть представлены в виде

$$\mathcal{X}^0 = \{x : \varphi_0(x) \le 1\}, \quad \mathcal{R}(t) = \{x : \varphi(t, y(t) - g(t, x(t))) \le 1\}$$

Второе из неравенств задает ограничение, налагаемое на фазовые координаты системы (1.1).

Функции φ_0, φ могут быть, в частности, заданы равенствами

$$\varphi_0(x^0) = d^2(x^0, \mathcal{X}^0) + 1, \quad \varphi(t, x(t)) = d^2(g(t, x(t)), Y(t)) + 1$$

где многозначное отображение $Y(t) = y(t) - \mathcal{R}(t)$, причем отображение $\mathcal{R}(t)$ непрерывно по Хаусдорфу и функция $y(t)$ непрерывна справа. Подобные ограничения нередко встречаются как для линейных, так и для нелинейных систем. Их использование в данном тексте позволяет представить искомое уравнение в более прозрачном виде.

Пусть на промежутке $[t_0, t]$ известны реализации $u^*(\cdot)$, $y^*(\cdot)$ управления u и наблюдения y.

Рассмотрим новую функцию цены

$$V^{(1)}[\tau, x] = V^{(1)}(\tau, x; u^*(\cdot), y^*(\cdot)) =$$
$$= \min_u \{\varphi_0(x[t_0]) | x[\tau] = x, \varphi(t, y(t) - g(t, x[t])) \le 1, t \in [t_0, \tau]\} \tag{2.8}$$

Обозначив

$$\frac{dV(t,x)}{dt} = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, f(t,x,u^*,\upsilon)\right) = V_t + \mathcal{H}(t,x,V_x,u^*,\upsilon)$$

рассмотрим уравнение

$$V_t^{(1)} + \max_\upsilon \{\mathcal{H}(t, x, V_x^{(1)}, u^*, \upsilon) \big| \upsilon \in \mathcal{Q}_\varphi(t)\} = 0, \quad V^{(1)}(t_0, x) = \varphi_0(x)$$

$$\mathcal{Q}_\varphi(t) = \begin{cases} \mathcal{Q}(t), & \theta(t) < 1 \\ \mathcal{Q}(t) \cap \{\upsilon : d\theta(t)/dt \le 0 | u = u^*(t)\}, & \theta(t) = 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\theta(t) = \varphi(t, y^*(t) - g(t, x(t)))$$

Вывод уравнения (2.9) проводится по схемам динамического программирования, см. [25]. Его решение следует рассматривать в обобщенном смысле, упомянутом выше.

Теорема 2.2. Если при $u = u^*(t)$, $y = y^*(t)$ $(t \in [t_0, \tau])$ уравнение (2.9) имеет обобщенное (вязкостное) решение $V^{(1)}(t, x)$, то справедливо равенство

$$\mathcal{X}(\tau, \cdot) = \{x : V^{(1)}(\tau, x) \le 1\} \tag{2.10}$$

Был приведен [26, 27] ответ на вопрос о том, какому эволюционному уравнению могло бы удовлетворять многозначное отображение $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, \cdot) = \mathcal{X}(t, \cdot | \mathcal{X}(t_0, \cdot))$, причем в качестве такового предлагалось рассматривать уравнение интегральной воронки дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in f_1(t, x, u^*(t)) + f_2(t, x, \mathcal{Q}(t)) \tag{2.11}$$

при фазовом ограничении

$$x(t) \in \mathcal{X}_Y(t) = \{x : g(t, x) \in Y^*(t) = y^*(t) - \mathcal{R}(t)\} \tag{2.12}$$

Приведем одно из таких уравнений [17] (см. также [27])

$$\lim_{\sigma \to +0} \frac{1}{\sigma} h_+(\mathfrak{X}[t+\sigma], \cup\{x + \sigma(f_1(t, x, u^*(t)) +$$
$$+ f_2(t, x, \mathcal{Q}(t))) | x \in \mathfrak{X}(t) \cap \mathcal{X}_Y(t)\}) = 0, \quad \mathfrak{X}(t_0) = \mathcal{X}^0 \tag{2.13}$$

Здесь h_+ – хаусдорфово полурасстояние:

$$h_+(\mathcal{X}', \mathcal{X}'') = \min\{\varepsilon : \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}'' + \varepsilon\mathcal{B}(0)\}$$

$\mathcal{B}(0)$ – единичный шар в $\mathbf{R}^n$. Решение $\mathfrak{X}[t]$ уравнения (2.12) – многозначная функция, причем $\mathfrak{X}[t_0] = \mathcal{X}^0$. Данное уравнение, как правило, имеет неединственное решение.

Искомое решение $\mathcal{X}[t]$, совпадающее с реализацией функции $\mathcal{X}(t, \cdot)$, есть максимальное по включению решение уравнения (2.12), а именно, $\mathcal{X}[t] \supset \mathcal{Z}[t]$, где $\mathcal{Z}[t]$ – любое решение этого уравнения, выпущенное из $\mathcal{Z}(t_0) = \mathcal{X}^0$ [17]. Заметим, что уравнение (2.12) имеет смысл при кусочно-непрерывных функциях $y^*(t)$. Ниже будем считать, как уже сказано выше, что эти функции непрерывны справа.

Далее всюду предполагается, что функции $V(\tau, x)$ непрерывны по совокупности переменных, с непустыми компактными множествами нулевого уровня

$$\mathcal{X}[\tau] = \{x : V(\tau, x) \le 0\} \ne \varnothing$$

полученными в силу равенства (2.6). Таковыми заведомо являются решения задачи с линейными уравнениями (1.1)–(1.3) при непрерывных коэффициентах и непрерывных по времени выпуклых ограничениях. Указанный класс функций $V(\tau, \cdot)$ обозначим $\mathcal{K}_V$.

Замечание 2.3. Множество $\mathcal{K}_V$ можно рассматривать как метрическое пространство с хаусдорфовой метрикой:

$$d(V'(\tau, \cdot), V''(\tau, \cdot)) = h(\mathcal{X}', \mathcal{X}'')$$

где $\mathcal{X}'$, $\mathcal{X}''$ – множества нулевого уровня функций V', V'', и хаусдорфово расстояние

$$h(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) = \max\{h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Z}), h_+(\mathcal{Z}, \mathcal{X})\}$$

где $h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ – хаусдорфово полурасстояние.

На $\mathcal{K}_V$ можно рассматривать и другую метрику, вводя $d(V'(\tau, \cdot), V''(\tau, \cdot))$ как расстояние в пространстве $C_r[t_0, \tau]$ (r-мерных непрерывных функций) между соответствующими функциями $y'(t)$, $y''(t)$ $(t \in [t_0, \tau])$, породившими $V'(\tau, \cdot)$, $V''(\tau, \cdot)$ в силу уравнений (2.4), (2.5). Такое определение распространено лишь на функции $y(\cdot) \in Y(\cdot)$. (Если применять эту метрику к произвольным кусочно-непрерывным функциям, то в случае, когда не каждой из y', y'' соответствует элемент $V \in \mathcal{K}_V$, расстояние $d(y', y'')$ можно принять равным $+\infty$.)

Аналогичные метрики можно рассматривать и на множестве функций $V^{(1)}(\tau, x)$. Подробное обсуждение возможных метрик для пространств функций, аналогичных функциям цены, рассматриваемым в данной работе, приведены в монографии [12] (гл. 4, приложение с. 5).

Перейдем к задаче о синтезе управлений для системы, описываемой уравнением (2.7) или (2.9).

3. Синтез управлений для системы с многозначными решениями. Итак, рассмотрим уравнения (2.4), (2.5), описывающие динамику функций цены $V(t, x)$, множества уровня которых являются оценками $\mathcal{X}[t]$ текущего состояния совокупной системы (1.1), (1.2).

Задача С. Найти функционал цены

$$\mathcal{V}(\tau, V(\tau, \cdot)) = \min_u \max_y \max_x \left\{ -\int_\tau^{t_1} d^2(y(t) - g(t, x(t)), \mathcal{R}(t))dt + \right.$$

$$\left. + d^2(x[t_1], \mathcal{M}) \,\middle|\, u \in \mathcal{U},\ y(\cdot) \in \mathcal{Y}(\cdot),\ V(\tau, x) \le 0 \right\} \tag{3.1}$$

при заданном элементе $V(\tau, \cdot) \in \mathcal{K}_V$.

Здесь минимум берется в классе $\mathcal{U}$ позиционных стратегий, $u = u(t, V)$, указанном ниже. Максимум берется по всем $x \in \mathcal{X}[\tau] = \{x\colon V(\tau, x) \le 0\}$ и всем $y \in \mathcal{Y}(t)$, где $\mathcal{Y}(t)$ – множество всех возможных будущих реализаций измерения $y(t)$ на промежутке $(\tau, t_1]$. Многозначная функция

$$\mathcal{Y}(t) = gt, X\_(t, \tau, \mathcal{X}[\tau] | u[\cdot])) + \mathcal{R}(t)$$

причем $X\_(t, \tau, \mathcal{X}[\tau] \mid u[\cdot])$ – область достижимости системы (1.1) по переменной υ при фиксированной реализации $u[\cdot]$; $x[t] = x(t, \tau, x)$ $(\tau \le t \le t_1)$, – траектория системы (1.1), выпущенная *вперед* из точки $\{\tau, x\}$.

Замечание 3.1. Функционал (3.1) отвечает второй части функционала (1.5), соответствующей промежутку $(\tau, t_1]$ (см. замечание 2.1).

Функция $V(\tau, \cdot)$ (информационное состояние системы) эволюционирует в силу уравнения (2.4), (2.5), при известных на промежутке $t \in [t_0, \tau)$ реализациях $u^*(t)$, $y^*(t)$.

Смысл функционала $\mathcal{V}$ состоит в том, что при $\tau = t_1$ он обеспечивает условие (см. выражение (3.1))

$$\mathcal{V}(t_1, V(t_1, \cdot)) = \max\{d^2(x, \mathcal{M}) \mid V(t_1, x) \le 0\}$$

(Число $\gamma = \mathcal{V}(t_1, V(t_1, \cdot))$ – величина окрестности $\mathcal{M}_\gamma = \mathcal{M} + \gamma\mathcal{B}(0)$, в которую в момент t_1 целиком попадает множество $\mathcal{X}[t_1]$, так что $\mathcal{X}[t_1] \subseteq \mathcal{M}_\gamma$.)

Отсюда видно, что граничное условие для задачи C берется на правом конце интервала $[\tau, t_1]$. Оно имеет вид:

$$\mathcal{V}(t_1, V(t_1, \cdot)) = \max_x\{d^2(x, \mathcal{M}) \mid V(t_1, x) \le 0\} \tag{3.2}$$

причем $V(t_1, \cdot) \in \mathcal{K}_V$.

Замечание 3.2. Для компакта $\mathcal{X}$ справедливо равенство

$$\max\{d^2(x, \mathcal{M}) \mid x \in \mathcal{X}\} = h_+^2(\mathcal{X}, \mathcal{M})$$

Функционал $\mathcal{V}(\tau, V(\tau, \cdot))$ задан на произведении пространств $\mathbf{R}_+ \times \mathcal{K}_V$, где $\mathbf{R}_+ = [t_0, \infty)$. Для этого функционала примем дополнительное обозначение

$$\mathcal{V}(\tau, V(\tau, \cdot)) = \mathcal{V}(\tau, V(\tau, \cdot) \mid t_1, \mathcal{V}(t_1, \cdot)) \tag{3.3}$$

подчеркивая его зависимость от граничного значения $\mathcal{V}(t_1, \cdot)$.

Напомним, что под состоянием системы здесь понимаем как раз пару $\{t, V(t, \cdot)\}$. Уравнением дальнейшего "движения", при $t \in [\tau, t_1]$, теперь будет эволюционное уравнение

$$\frac{\partial V(t, \cdot)}{\partial t} = \Phi(t, V_x(t, \cdot), \cdot \mid u, y) \tag{3.4}$$

где, начиная с момента $t = \tau$ и далее, синтезированная стратегия управления $u = u(t, V(t, \cdot))$ будет выбираться по ходу процесса по известной реализации состояния системы $\{t, V(t, \cdot)\}$, а измерение $y(t)$ – поступать по ходу процесса. (Вследствие сказанного, в отличие от уравнения (2.7), здесь u, y проставлены без звездочек.) Заметим, что нелинейная стратегия управления $u = u(t, V(t, \cdot))$ должна быть выбрана в классе функционалов, обеспечивающих существование в каком-либо разумном смысле решения уравнения (22) при подстановке в него указанного управления.

Итак, уравнение динамики совокупной системы с неполными измерениями имеет вид (3.4), причем здесь управляющий параметр u остался неизменным, а множество неопределенных параметров, определяемых тройкой $\zeta_\tau = \{x \in \mathcal{X}[\tau],\ v(t) \in \mathcal{Q}(t),\ \xi(t) \in \mathcal{R}(t);\ t \in [\tau, t_1]\}$, представлено парой $\{\mathcal{X}[\tau], y(t);\ t \in [\tau, t_1]\}$, вобравшей всю доступную текущую информацию об этих параметрах.

Лемма 3.1. Справедливо соотношение – принцип оптимальности в классе состояний $\{t, V(t, \cdot)\}$, $\tau \le t \le t_1$:

$$\mathcal{V}(\tau, V(\tau, \cdot) \mid t_1, \mathcal{V}(t_1, \cdot)) = \mathcal{V}(\tau, V(\tau, \cdot) \mid t, \mathcal{V}(t, \cdot \mid t_1, \mathcal{V}(t_1, \cdot)))$$

Значение $\mathcal{V}(t_1, \cdot)$ определяется граничным условием, например, соотношением (3.2).

Из последнего условия вытекает, если следовать схемам динамического программирования, обобщенное уравнение типа Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса, хорошо известное для игровых систем с полной информацией [5, 10, 28, 29]. Это уравнение формально запишем в виде

$$\min_u \max_y \left\{ \frac{d\mathcal{V}(\tau, V(\tau, \cdot))}{d\tau} \middle| u \in \mathcal{P}(\tau), y \in \mathcal{Y}(\tau) \right\} = 0 \qquad (3.5)$$

Здесь $d\mathcal{V}(\tau, V(\tau, \cdot))/d\tau$ – обобщенная полная производная функционала $\mathcal{V}(t, V(t, \cdot))$ в силу эволюционного уравнения (3.4).

Уравнение (3.5) может иметь гладкое решение, когда возникающие здесь функциональные частные производные понимаются в сильном или слабом смысле и уравнение выполняется всюду. (Такие ситуации возникают в линейных системах, рассматриваемых в следующем разделе.) Однако в отсутствие гладкости имеет смысл рассматривать, например, обобщенные производные в смысле Кларка функционала $\mathcal{V}(\tau, V)$ по направлениям $\eta\{u(\cdot), y(\cdot)\}$, $t \in [\tau, \tau + \sigma]$. Эти производные определяют приращения

$$\eta(\cdot) = V(t+\sigma, \cdot \mid u(\cdot), y(\cdot)) - V(t, \cdot), \quad \sigma > 0$$

(см. [24]) в предельном соотношении

$$\partial_+ \mathcal{V}[\tau, \cdot \mid \eta] = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\delta} \sup_{V' \to V} (\mathcal{V}(\tau+\delta, V'(\tau+\delta, \cdot) + (\tau+\delta)\eta(\cdot)) - \mathcal{V}(\tau, V'(\tau, \cdot)))$$

где сходимость функций V', V рассматривается в смысле расстояний $d(V, V')$ введенных выше (см. замечание 2.3).

Замечание 3.3. Отметим, что здесь возможна интерпретация обобщенного "вязкостного" решения и в указанном ранее смысле [20, 21], (см. также [23]). Однако, ввиду особенностей структуры рассматриваемой бесконечномерной задачи C, соответствующие определения требуют специальной модификации, описание которой выходит за рамки настоящей публикации. С описанием теории обобщенных решений уравнений ГЯБ в бесконечномерном пространстве можно ознакомиться по книгам [12, 24].

Стратегия $u^0(t, V(t, \cdot))$, найденная из условия минимизации в соотношении (3.5), имеет вид

$$u^0 = u^0(t, V(t, \cdot)) \subseteq \mathcal{P}(t)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.7), получим формальную запись

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\upsilon} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}, f_1(t, x, u^0(t, V(t, \cdot))) + f_2(t, x, \upsilon) \right) \middle| \upsilon(t) \in \mathcal{Q}(t) \right\} -$$

$$- d^2(y(t) - g(t, x), \mathcal{R}(t)) = 0 \qquad (3.6)$$

Данное уравнение можно рассматривать как эволюционное уравнение в метрическом пространстве $\mathcal{K}_V$ функций $\{V(t, \cdot)\}$.

Решения этого уравнения, "траектории" $V[t] = V(t, \cdot)$, выпущенные в момент t_0 при $V(t_0, \cdot) = d^2(x, \mathcal{X}^0)$, можно тогда интерпретировать как конструктивные движения $V(t, \cdot; u^0(t, \cdot))$, полученные путем предельного перехода от бесконечномерных аналогов прямых Эйлера, построенных при всевозможных разбиениях промежутка $[t_0, t_1]$, путем выбора кусочно-постоянных реализаций $u[t] \in \mathcal{P}(t)$ (см. [5], с. 11). Таков, в общем случае, предлагаемый класс стратегий управления $\mathcal{U}$. Заметим, что стратегии $u(t, V(t, \cdot)) \in \mathcal{U}$ не обеспечивают, вообще говоря, единственности решения системы (3.6).

Теорема 3.1. Стратегия управления $u = u^0(t, V(t,\cdot)) \in \mathcal{U}$ будет гарантировать условия

$$\max_y \max_V \left\{ \max_x \{ d^2(x, \mathcal{M}) \mid V(t_1, x | V(\tau,\cdot)) \le 0 \} \Big| u = u^0(t, V(t,\cdot)),\ y(\cdot) \in \mathcal{Y}(\cdot) \right\} \le$$

$$\le \max_y \max_V \left\{ \max_x \{ d^2(x, \mathcal{M}) \mid V(t_1, x | V(\tau,\cdot)) \le 0 \} \Big| u = \mathcal{U};\ y(\cdot) \in \mathcal{Y}(\cdot) \right\} \tag{3.7}$$

по сравнению с любой другой стратегией управления $u = u(t, V(t,\cdot)) \in \mathcal{U}$.

Здесь, в силу неединственности решения уравнения (3.6), максимум по V берется по всем решениям $V(t,\cdot)$ системы (3.6), при каждой заданной стратегии $u^0(t, V(t,\cdot)) \in \mathcal{U}$.

Замечание 3.4. Приведенный подход к решению задач E и C, основанный на переходе к функциям цены задач динамического программирования, по сути дела указывает на то, что совокупная задача E–C о синтезе управлений по результатам измерений допускает некоторый "принцип разделения" – независимое решение задач E и C. При этом задача E (оценивания) является конечномерной, а задача C (управления) – бесконечномерной. В связи со сказанным представляет интерес выделение частных случаев, когда задача C может быть также сведена к конечномерной.

Детальная процедура вычислений управления по данной схеме в общем случае требует более подробного освещения. Схема становится проще, когда система линейна.

В линейном варианте ($f_1 = Ax + Bu, f_2 = Cv$, $g(t, x) = Hx$), рассматриваемом ниже, класс $\mathcal{U}$ используемых синтезированных стратегий будет состоять из многозначных функционалов $u^0(t, V)$ или $u^0(t, \mathcal{X})$, полунепрерывных сверху по включению в соответствующей метрике. Уравнение синтезированной системы (3.6) тогда превратится в функционально-дифференциальное включение вида

$$\frac{\partial V}{\partial t} \in -\max_v \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}, f_1(t, x, u^0(t, V(t,\cdot)) + f_2(t, x, v) \right) \Big| v(t) \in \mathcal{Q}(t) \right\} -$$

$$- d^2(y^*(t) - g(t, x), \mathcal{R}(t)) \tag{3.8}$$

Перейдем к более подробному рассмотрению задач E и C для линейной системы.

4. Линейные системы. Пусть исходная система имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v \tag{4.1}$$

и уравнение наблюдений также линейно:

$$y(t) = H(t)x + \xi(t) \tag{4.2}$$

причем ограничения, налагаемые на u, v, ξ, заданы при помощи непрерывных многозначных функций $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$, $\mathcal{R}(t)$, со значениями в невырожденных эллипсоидах $\mathcal{E}(p(t), P(t))$, $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$, $\mathcal{E}(r(t), R(t))$ размерностей p, q, r соответственно. Матрица H размерности $r \times n$, неособые "матрицы конфигурации" $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ заданных эллипсоидов и векторы центров $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ предполагаются непрерывными.

Здесь принято обозначение

$$\mathcal{E}(p, P) = \{ u : (u - p, P^{-1}(u - p)) \le 1 \}$$

Начальное $\mathcal{X}^0$ и целевое $\mathcal{M}$ множества также взяты в виде невырожденных эллипсоидов : $\mathcal{E}(x_0, X_0)$, $\mathcal{E}(m, M)$.

В рассматриваемом случае вычисление соответствующих функций цены может быть реализовано при помощи методов выпуклого анализа [14, 30, 31]. Обсудим соответствующие решения.

Рассмотрим задачу E_0. Начнем с решения уравнения вида (3.6) – "прямого" уравнения ГЯБ, записанного для линейного случая. Имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{v}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}, A(t)x + B(t)u^* + C(t)v\right) + d^2(y^*(t) - H(t)x, \mathcal{R}(t)) \mid v(t) \in \mathcal{Q}(t)\right\} = 0 \quad (4.3)$$

при условии (2.5). С этой целью, фиксируя известные реализации измерения $y^*(t)$ и управления $u = u^*(t)$, $t \in [t_0, \tau]$, рассмотрим выражение

$$V(\tau, x) = \min_{v}\left\{d^2(x(t_0), X^0) + \int_{t_0}^{\tau} d^2(y^*(t) - H(t)x(t), \mathcal{R}(t))dt \mid v(t) \in \mathcal{Q}(t), x(\tau) = x\right\} \quad (4.4)$$

Тогда информационное множество $\mathcal{X}[\tau]$ представимо в виде множества уровня (2.2). Его можно искать посредством решения задачи оптимизации – нахождения функции $V(\tau, x)$, причем эту функцию можно вычислить методами выпуклого анализа.

Пусть $\rho(l|\mathcal{X}) = \max\{(l, x) | x \in \mathcal{X}\}$ означает опорную функцию компакта $\mathcal{X}$ по направлению l. Воспользуемся соотношением

$$d^2(x(t_0), X^0) = \max\left\{(l, x(t_0)) - \rho(l | X^0) - \frac{1}{4}(l, l) \,\middle|\, l \in \mathbf{R}^n\right\} \quad (4.5)$$

а также

$$\int_{t_0}^{\tau} d^2(y^*(t) - H(t)x(t), \mathcal{R}(t))d\alpha(t) =$$

$$= \max\left\{\int_{t_0}^{\tau}\left((\lambda(t), y^*(t) - H(t)x(t)) - \rho(\lambda(t)|\mathcal{R}(t)) - \frac{1}{4}(\lambda(t), \lambda(t))\right)d\alpha(t) \,\middle|\, \lambda(\cdot) \in C_r[t_0, \tau]\right\}$$

при любом $\alpha(\cdot) \in \mathrm{Var}_+[t_0, \tau]$, где, согласно работе [31], $C_r[t_0, \tau]$ – пространство r-мерных непрерывных функций, $\mathrm{Var}_+[t_0, \tau]$ – множество неубывающих функций единичной вариации. Получим

$$V(\tau, x) = \max\left\{(s(\tau), x) - \int_{t_0}^{\tau} \rho(s(t)|C(t)\mathcal{Q}(t))dt + \int_{t_0}^{\tau}((\lambda(t), y^*(t)) - (s(t), B(t)u^*(t)) - \right.$$

$$\left. - \rho(\lambda(t)|\mathcal{R}(t)))d\alpha(t) - \rho(l|\mathcal{X}^0) - \frac{1}{4}(l, l) - \frac{1}{4}\int_{t_0}^{\tau}(\lambda(t), \lambda(t))d\alpha(t)\right\} \quad (4.6)$$

где $s(t)$ – решение сопряженной системы задачи E_0 – уравнения

$$ds = -sA(t)dt + \lambda'(t)H(t)d\alpha(t), \quad s(t_0) = l$$

Заметим, что здесь и далее функции $y^*(t)$ предполагаются непрерывными слева, а функции $\alpha(t)$ – справа.

В задаче (4.6) максимумы достигаются и единственны. Обозначим соответствующие максимизаторы как $\{l^0, \lambda^0(\cdot), \alpha^0(t)\}$, а решение $s(t)$ сопряженного уравнения, полученного при подстановке этих максимизаторов – как $s^0(t)$. Подставляя $\{l^0, \lambda^0(\cdot),$

$\alpha^0(t)$, $s^0(t)\}$ в равенство (4.6) и пользуясь правилами дифференцирования функций максимума (см. [32]), получим

$$V_\tau(\tau, x) = (\dot{s}^0(\tau), x) + (\lambda^0(\tau), y^*(\tau)) -$$
$$-\rho(s^0(\tau)C(\tau)|\mathcal{Q}(\tau)) - (s^0(\tau), B(\tau)u^*(\tau)) - \rho(\lambda^0(\tau)|\mathcal{R}(\tau)) - \frac{1}{4}(\lambda^0(\tau), \lambda^0(\tau))$$
$$V_x(\tau, x) = s^0(\tau)$$

Здесь предполагалось, что функция $\alpha^0(t)$ не имеет скачка в точке τ. При подстановке полученных выражений в уравнение (4.3) видим, что $V(t, x)$ всюду удовлетворяет этому уравнению.

При $t = t_0$ функция $V(t, x)$ (4.6) приводит к выражению, совпадающему с граничным условием (2.5).

Прямой подстановкой можно проверить, что данный результат остается справедливым и при наличии у функции $\alpha^0(t)$ скачка в точке τ.

Таким образом, имеет место

Лемма 4.1. Функция $V(t, x)$ (4.6) удовлетворяет всюду уравнению (4.3), а также краевому условию (2.5).

Зная $V(\tau, x)$, можем вычислить

$$\rho(l|\mathcal{X}[\tau]) = \max\{(l, x)|V(\tau, x) \le 0\}$$

(Эта функция может быть вычислена и прямым счетом согласно указанному ранее [14], с. 94.)

Именно,

$$\rho(l|\mathcal{X}[\tau]) =$$
$$= \min_\Lambda\left\{\rho(\psi(t_0)|\mathcal{X}^0) + \int_{t_0}^{\tau}(\rho(\psi(t)|C(t)\mathcal{Q}(t)) + B(t)u(t))d\Lambda(s) + \int_{t_0}^{\tau}\rho(d\Lambda(s)| - Y(s))\right\} \quad (4.7)$$

где $Y(t) = y(t) - \mathcal{R}(t)$, $\Lambda(t) \in \mathrm{Var}_r[t_0, \tau]$ – r-мерная функция ограниченной на $[t_0, \tau]$ вариации. Здесь $\psi(t)$ – решение сопряженного уравнения во второй форме

$$d\psi = -\psi A(t)dt - d\Lambda(t)H(t), \quad \psi(\tau) = l'$$

Перейдем к задаче C о синтезе управлений. А именно, будем искать решение следующей задачи: найти

$$\mathcal{V}(\tau, \mathcal{X}[\tau]) = \min_u\max_y\left\{\max_x\{d^2(x, \mathcal{M})|x \in \mathcal{X}[t_1]\}\middle|u \in \mathcal{U}_V, y(\cdot) \in \mathcal{Y}(\cdot)\right\} \quad (4.8)$$

или, что то же самое,

$$\mathcal{V}(t, V) = \min_u\max_y\left\{\max_x\{d^2(x, \mathcal{M})|\mathcal{V}(t_1, x) \in 0\}\middle|u \in \mathcal{U}_V, y(\cdot) \in \mathcal{Y}(\cdot)\right\}$$

поскольку $\mathcal{V}(t, \mathcal{X}[\tau]) = \mathcal{V}(t, V(t, \cdot))$.

Здесь

$$\mathcal{X}[t_1] = \mathcal{X}(t_1, \tau, \mathcal{X}[\tau]), \quad \mathcal{X}[t_1] = \{x : V(t_1, x) \le 0\}$$

$\mathcal{U}_V$ – класс стратегий позиционного управления вида $\mathcal{U}(t, V) \in \mathcal{P}(t)$ со значениями во множестве выпуклых компактов пространства $\mathbf{R}^p$. Функционалы $\mathcal{U}(t, V)$ определены при каждом t на множестве $\mathcal{K}_V$ выпуклых функций $V(x)$ с непустыми, компактными множествами уровня

$$\mathcal{X}_V = \{x : V(x) \le 0\} \ne \varnothing$$

Множества $\mathcal{X}_V$ компактны и выпуклы. Будем рассматривать эти множества как элементы соответствующего метрического пространства $\mathcal{K}_X$, с хаусдорфовой метрикой. Класс $\mathcal{U}_V$ состоит из стратегий вида $\mathcal{U}(t, V)$ полунепрерывных сверху по $V \in \mathcal{K}_V$ в силу введенной метрики, и непрерывных по t. Функции $V(t, x)$, а следовательно, и множества $\mathcal{X}[t]$ эволюционирует в силу уравнения (4.3), где теперь, при вычислении правых производных функционала $\mathcal{V}(\tau, \mathcal{X}[\tau])$ следует подставлять значения $u(\tau) = u(\tau + 0)$, $y(\tau) = y(\tau + 0)$, подлежащие реализации.

Ввиду дифференцируемости функционала $\mathcal{V}(t, V)$ по направлениям уравнение (3.5) примет вид

$$\min_u \max_y \max_V \left\{ \frac{d\mathcal{V}(\tau, V(\tau, \cdot))}{d\tau} \middle| u \in \mathcal{P}(\tau), y \in \mathcal{Y}(\tau) = H(\tau)\mathcal{X}[\tau] + \mathcal{R}(\tau) \right\} = 0 \qquad (4.9)$$

Максимум по V взят вследствие неединственности решения линейного варианта дифференциального включения (3.8). Граничное условие задается равенством (3.3).

Здесь $d\mathcal{V}(\tau, V)/d\tau$ – полная производная функционала $\mathcal{V}(\tau, V)$ в силу системы (4.3).

Приведенное “попятное" уравнение ГЯБ (4.9) аналогично выглядит и в пространстве состояний $\{\tau, \mathcal{X}[\tau]\}$. Заметим сразу, что в силу линейности исходной системы операции min и max в соотношении (4.9) переставимы.

Итак, решение задачи C можно получить, решая уравнение (4.6). Однако поиск этого решения можно в рассматриваемом случае обойти при помощи приемов “прицеливания", аналогичных введенным Н.Н. Красовским [4, 5, 33]. С этой целью в соответствующем бесконечномерном метрическом пространстве $\mathcal{K}_V$ или $\mathcal{K}_X$ следует построить аналог стабильного "моста Красовского". Проделаем это.

Рассмотрим равномерное разбиение $\Sigma(N)$ промежутка $[\tau, t_1]$ на N интервалов, точками $\tau + \sigma_N, \ldots, t_1 - \sigma_N, t_1$; $\sigma_N = (t_1 - \tau)/N$. Обозначим

$$\tau_N^{(k)} = \tau + k\sigma_N, \quad k = 1, \ldots, N-1$$

Для этого разбиения решим последовательность задач программного управления. При $k = 1$ имеем

$$\max_y \min_u \{(\max\{d^2(x, \mathcal{M}) | V(t_1, x | t_1 - \sigma_N, V(\cdot)) \le 0\} \big| u(\cdot) \in \mathcal{P}(\cdot), y(\cdot) \in \mathcal{Y}(\cdot),$$

$$V(\cdot) = V(t_1 - \sigma_N, \cdot)\} = \mathcal{V}_N^{(1)}(t_1 - \sigma_N, V(t_1 - \sigma_N, \cdot))$$

или, полагая

$$\mathcal{V}(t_1, V(t_1, \cdot)) = \max\{d^2(x, \mathcal{M}) | V(t_1, x) \le 0\}$$

в операторной форме получим

$$T_N^{(1)} \mathcal{V}(t_1, V(t_1, \cdot)) = \mathcal{V}_N^{(1)}(t_1 - \sigma_N, V(t_1 - \sigma_N, \cdot))$$

Далее, при $k = 2$, имеем

$$\max_y \min_u \{\mathcal{V}(t_1 - \sigma_N, V(\cdot) | u(\cdot), y(\cdot), V(\cdot) = V(t_1 - 2\sigma_N, \cdot))\} =$$

$$= \mathcal{V}_N^{(2)}(t_1 - 2\sigma_N, V(t_1 - 2\sigma_N, \cdot)), \ldots$$

или в операторной форме

$$T_N^{(2)}\mathcal{V}_N^{(1)}(t_1-\sigma_N, V(t_1-\sigma_N,\cdot)) = \mathcal{V}_N^{(2)}(t_1-2\sigma_N, V(t_1-2\sigma_N,\cdot))$$

Продолжая подобный процесс при $k = 3$ и т.д., вплоть до $k = N$, будем иметь

$$\max_y\min_u\{\mathcal{V}(\tau+\sigma_N, V(\cdot)|u(\cdot), y(\cdot), V(\cdot) = V(\tau,\cdot)\} =$$

$$= T_N^{(N)}\mathcal{V}_N^{(N-1)}(\tau+\sigma_N, V(\tau+\sigma_N,\cdot)) = \mathcal{V}_N^{(N)}(\tau, V(\tau,\cdot))$$

или

$$\mathcal{V}_N^{(N)}(\tau, V(\tau,\cdot)) = T_N^{(N)}\cdot T_N^{(N-1)}, \ldots, T_N^{(2)}\cdot T_N^{(1)}\mathcal{V}(t_1, V(t_1,\cdot)) = \mathcal{T}_N\mathcal{V}(t_1, V(t_1,\cdot)) \quad (4.10)$$

Аналогичные конструкции будем допускать и при неравномерном разбиении отрезка $[\tau, t_1]$.

Последовательность разбиений $\Sigma(N)$, возникающую при возрастании N, будем называть *монотонной*, если новые разбиения $\Sigma(N_1)$, полученные при $N_1 > N$, получаются добавлением новых точек в прежнее разбиение.

Лемма 4.2. Если при возрастании N последовательность $\Sigma(N)$ монотонна и натуральные $N \le M$, то справедливы неравенства

$$\mathcal{V}_N(\tau, V(\tau,\cdot)) \le \mathcal{V}_M(\tau, V(\tau,\cdot))$$

Рассматривая множества $\mathcal{W}_N^{(k)}$ выпуклых компактных подмножеств $W \in \mathcal{K}_X$, удовлетворяющих условию

$$\{W : \mathcal{V}_N^{(k)}(\tau - k\sigma_N, W) \le 0\} = \mathcal{W}_N^{(k)}[\tau - k\sigma_N]$$

будем далее обозначать

$$\mathcal{V}_N^{(N)}(\tau,\cdot) = \mathcal{V}_N, \quad \mathcal{W}_N^{(N)}(\tau) = \mathcal{W}_N$$

Из леммы 4.2 вытекает следующее условие.

Лемма 4.3. Если при возрастании N последовательность $\Sigma(N)$ монотонна и натуральные $N \le M$, то справедливы включения: $\mathcal{W}_M[\tau] \subseteq \mathcal{W}_N[\tau]$.

Напомним, что диаметром (непустого) компакта $\mathcal{Z}$ называется число

$$D(\mathcal{Z}) = \max_l\{\rho(l|\mathcal{Z}) + \rho(-l|\mathcal{Z})|(l, l) = 1\}$$

Предположение 4.1. Какова бы ни была функция $y(t) \in \mathcal{Y}(t)$ $(t \in [\tau, t_1])$, существуют такие числа N_0, $\varepsilon > 0$, и непрерывная многозначная функция $\mathcal{Z}(t)$ со значениями в $\mathcal{K}_X$, диаметра $D(\mathcal{Z}) \le \varepsilon$, что справедливы включения $\mathcal{Z}(\tau_N^k) \subseteq \mathcal{W}_N^{(k)}$, каковы бы ни были числа $N \ge N_0$, $k \in [1, \ldots, N-1]$ и соответствующие им множества $\mathcal{W}_N^{(k)}$, построенные при указанной функции $y(t)$.

Предположение 4.1 далее будем считать выполненным. Тогда, измельчая разбиение $\Sigma(N)$ и переходя к пределу при $N \to \infty$ ($\sigma_N \to +0$), получаем, в силу предыдущей леммы, неубывающую последовательность $\mathcal{V}_N(\tau, V(\tau,\cdot))$, ограниченную сверху при каждом $V(\tau,\cdot)$ (см. аналогичный случай в [34]) и, следовательно, сходящуюся "поточечно" к некоторому функционалу $\mathcal{V}(\tau, V(\tau,\cdot))$. Этот функционал непрерывен по совокупности переменных t и V (в рассматриваемой метрике).

Иными словами, при $N \to \infty$ ($\sigma \to +0$) имеет место "поточечная" сходимость

$$\lim\mathcal{T}_N\mathcal{V}(t_1, V(t_1,\cdot)) = \mathcal{T}\mathcal{V}(t_1, V(t_1,\cdot)) = \mathcal{V}(\tau, V(\tau,\cdot))$$

Здесь операторы $\mathcal{T}_N$ порождают аналоги альтернированных интегральных сумм, а оператор $\mathcal{T}$ – некоторый многозначный интеграл, который является аналогом *аль-*

тернированного интеграла Л.С. Понтрягина [35], построенным в бесконечномерном пространстве. Он не зависит от способа разбиения интервала $[\tau, t_1]$ при формировании интегральных сумм.

Введем множество подмножеств W пространства $\mathcal{K}_X$

$$\mathcal{W}[\tau] = \{W : \mathcal{V}(\tau, W) \leq 0 | W \in \mathcal{K}_X\} \tag{4.11}$$

Заметим, что объединение

$$\mathbf{W}[\tau] = \cup\{x : x \in W | W \in \mathcal{W}[\tau]\}$$

выпукло и компактно в $\boldsymbol{R}^n$. Последнее проверяется прямым рассуждением.

Многозначная функция $\mathcal{W}[t]$ (со значениями во множестве подмножеств $\mathcal{K}_X$) будет далее использована для построения искомой синтезирующей стратегии управления $\mathcal{U}(t, V)$. Эта функция является аналогом “моста Красовского" в пространстве $\mathcal{K}[\mathcal{W}]$ множеств $\mathcal{W}$ выпуклых компактных подмножеств W пространства $\mathcal{K}_X$.

Найдем стратегию управления $\mathcal{U}(t, V(t, \cdot))$, решающую задачу C. Рассмотрим задачу: найти полурасстояние

$$h_+(\mathcal{X}[\tau], \mathcal{W}[\tau]) = \min\{h_+(\mathcal{X}[\tau], W) | W \in \mathcal{W}[\tau]\} = \varepsilon(\tau, \mathcal{X}[\tau])$$

Вычисляя его, будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau, \mathcal{X}[\tau]) &= \max\{\rho(l|\mathcal{X}[\tau]) - \rho_W(l, \tau) | (l, l) \leq 1\} \\ \rho_W(l, \tau) &= \max\{\rho(l|W) | W \in \mathcal{W}[\tau]\} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Проверив, что справедливо равенство $\rho_W(l, \tau) = \rho(l|\mathbf{W}[\tau])$, замечаем, что $l^0 = l^0(\tau, \mathcal{X}[\tau])$ – максимизатор в задаче (4.12) – единственен. Пусть $W^0[\tau] \in \mathcal{W}[\tau]$ – максимальное по включению среди тех подмножеств $W \in \mathcal{W}[\tau]$, на которых достигается равенство

$$\rho(l^0 | W^0[\tau]) = \rho_W(l^0, \tau) = \rho(l^0 | \mathbf{W}[\tau])$$

Вычислим полную производную функционала $\varepsilon(\tau, \mathcal{X}[\tau])$ вдоль “траекторий" системы (4.3), (2.5) с учетом правил дифференцирования функции максимума, при единственности вектора l^0, вдоль направления

$$u = u', \quad y = y'(\tau + 0) = H(\tau)x'[\tau] + \xi'[\tau]$$

Далее будем предполагать $\varepsilon(\tau, \mathcal{X}[\tau]) > 0$.

Получим

$$\left.\frac{d\varepsilon(\tau, \mathcal{X}[\tau])}{d\tau}\right|_{u, y} = \left.\frac{\partial\rho(l^0|\mathcal{X}[\tau])}{\partial\tau}\right|_{u, y} - \frac{\partial\rho(l^0|W^0[\tau])}{\partial\tau} \tag{4.13}$$

где

$$\left.\frac{\partial\rho(l^0|\mathcal{X}[\tau])}{\partial\tau}\right|_{u, y} =$$

$$= \rho(l^0(\tau)|C(\tau)(\mathcal{Q}(\tau) - v'(\tau)) + \rho(\lambda^0[\tau]|\mathcal{R}(\tau + 0) - \xi'(\tau + 0)) + (l^0, B(\tau)u)$$

причем $\lambda^0[\tau]$ – скачок в момент $\tau + 0$ единственного экстремального элемента задачи (4.7) – меры Λ^0 (использована эллипсоидальность ограничений $\mathcal{X}^0$, $\mathcal{R}(t)$).

Опираясь на представление соотношений (4.10), (4.11) в терминах, аналогичных формулам (4.7), (4.6), и опуская подробные вычисления имеем

$$\frac{\partial\rho(l^0|W^0[\tau + 0])}{\partial\tau} = -\rho(l^0|B(\tau)\mathcal{P}(\tau))$$

Найденные производные следует далее подставить в равенство (4.13), после чего промаксимизировать полученное выражение по $\zeta[\tau]$, перебирая все "тройки"

$$\zeta[\tau] = \{x' \in \mathcal{X}[\tau], v'(\tau+0) \in \mathcal{Q}(\tau), \xi'(\tau+0) \in \mathcal{R}(\tau)\}$$

(Поскольку перебор всех $\zeta(t)$, $t \in [\tau, \tau+\sigma]$ означает перебор всех $y(t)$ на том же интервале и всех $x' \in \mathcal{X}[\tau]$, то здесь операция дифференцирования по направлению $y(t+0)$ и дальнейшая максимизация по $y(t+0)$ заменяется такими же операциями по ζ.)

В результате, получаем

$$\max_{\zeta}\left\{\left.\frac{\partial\rho(l^0, \mathcal{X}[\tau])}{\partial\tau}\right|_{u,\zeta} - \frac{\partial\rho(l^0|W^0[\tau+0])}{\partial\tau}\right\} = -(-l^0, B(\tau)u) + \rho(l^0|-B(\tau)\mathcal{P}(\tau)) \quad (4.14)$$

откуда следует утверждение

Теорема 4.1. Неравенство

$$\frac{d\varepsilon(\tau, \mathcal{X}[\tau])}{d\tau} \le 0$$

выполняется, невзирая на реализацию $y(t)$ ($t \in [\tau, t_1]$), в том и только том случае, когда стратегия $u = \mathcal{U}^0(\tau, \mathcal{X}[\tau])$, или, что то же, $u = \mathcal{U}^0(\tau, V(\tau, \cdot))$ выбрана из условия максимума:

$$\mathcal{U}^0(\tau, \mathcal{X}[\tau]) = \arg\max\{(-l^0, B(\tau)u) | u \in \mathcal{P}(\tau)\}$$

Интегрируя при $u = \mathcal{U}^0(t, \mathcal{X}[t])$ производную $d\varepsilon(t, \mathcal{X}[t])/dt$ по t от τ до t_1, находим

$$\varepsilon(t_1, V(t_1, \cdot)) = \varepsilon(t_1, \mathcal{X}[t_1]) \le \varepsilon(\tau, \mathcal{X}[t]) = \varepsilon(\tau, V(t, \cdot))$$

какой бы ни была реализация $y(t)$, $t \in [\tau, t_1]$.

Здесь были использованы равенства

$$\varepsilon(t_1, \mathcal{X}[t_1]) = \max_x\{d(x, \mathcal{M}) | V(t_1, x) \le 0\}, \quad \mathcal{X}[\tau] = \{x : V(\tau, x) \le 0\}$$

В результате, заключаем, что справедлива следующая

Теорема 4.2. Если процесс управления начинается от момента τ, то стратегия

$$u = \mathcal{U}^0(t, \mathcal{X}[t]) = \mathcal{U}^0(t, V(t, \cdot)), \quad t \ge \tau$$

гарантирует неравенство

$$\varepsilon(t_1, V(t_1, \cdot)) = \max_x\{d(x, \mathcal{M}) | V(t_1, x) \le 0\} \le \varepsilon(\tau, V(\tau, \cdot))$$

невзирая на возмущения и неполноту измерений.

В качестве момента τ может быть, разумеется, взят и момент t_0.

Сказанное завершает схему совместного решения задач E и C, разделенных, как было показано, на две задачи – позиционного гарантированного оценивания (наблюдения) и позиционного гарантированного управления (синтеза по принципу обратной связи). А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.3. Искомая стратегия $u = \mathcal{U}^0(t, \mathcal{X}[t])$ для задачи E–C может быть найдена путем решения задачи C вдоль "траекторий" $V(t, \cdot)$ уравнения (4.3), дающего решение задачи E. Эта стратегия гарантирует попадание траектории системы (1.1) в $\varepsilon(t_1, V(t_1, \cdot))$-окрестность целевого множества $\mathcal{M}$, невзирая на неопределенные возмущения и неполноту измерений в системе.

Заключительное замечание. Наряду с разработкой и обоснованием теоретических деталей изложенного подхода актуальный вопрос – вычисление решений, что в нелинейном случае сводится к разработке методов по возможности быстрого вычисления решений уравнений ГЯБ. Здесь обещающими представляются подходы работ [36, 37]. В линейном варианте решение можно искать, опираясь на соотношения выпуклого анализа. Численную же реализация таких подходов можно осуществлять при помощи методов эллипсоидального исчисления и примыкающих разработок [17, 38–41].

Автор благодарит рецензента за замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00663), в рамках программ “Государственной поддержки ведущих научных школ" (1889.2003.1) и "Университеты России – фундаментальные исследования" (УР.03.03.036).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 3–14.
2. *Красовский Н.Н.* Теория оптимальных управляемых систем // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука. 1968. Т. 1. С. 179–244.
3. *Красовский Н.Н.* Управление и стабилизация при недостатке информации // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 148–151.
4. *Krasovski A.N., Krasovski N.N.* Control Under Lack of Information. Basel: Birkhäuser, 1994. 320 p.
5. *Krasovski N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. N.Y. ect.: Springer, 1998. 517 p.
6. *Åström K.J.* Introduction to Stochastic Control Theory. N.Y.; L.: Acad. Press, 1970 = *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 321 с.
7. *Fleming W.H., Rishel R.W.* Deterministic and Stochastic Optimal Control. N.Y.: Springer, 1975. 222 p.
8. *Bertsekas D.P.* Dynamic Programming and Stochastic Control. N.Y., L.: Acad. Press., 1975. 397 p.
9. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
10. *Basar T., Bernhard P.* H^∞ – Optimal Control and Related Minmax Design Problems. Basel: Birkhäuser, 1995. 441 p.
11. *James M.R., Baras J.S.* Partially observed differential games, infinite-dimensional Hamilton – Jacobi – Isaacs equations and nonlinear H_∞ control // SIAM Jounal Control and Optimiz. 1996. V. 34. № 4. P. 1342–1364.
12. *Helton J.W., James M.R.* Extending H^∞ Control to Nonlinear Systems. Philadelphia: SIAM, 1999. 333 p.
13. *Куржанский А.Б.* Дифференциальные игры наблюдения // Докл. СССР. 1972. Т. 207. № 3. С. 527–530.
14. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
15. *Kurzhanski A.B.* The principle of optimality in measurement feedback control for linear systems // Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization / Eds. A.Rantzer and Ch.Byrnes. Berlin: Springer, 2003. P. 193–202.
16. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 331 с.
17. *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
18. *Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E.* Bounding Approach to System Identification. N.Y., L.: Plenum Press, 1995. 565 p.
19. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. Мат. сб. 1966. Т. 70(112). Вып. 3. С. 394–415.

20. *Crandall M.G., Evans L.C., Lions P-J.* Some properties of viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282. № 2. P. 487–502.
21. *Fleming W.H., Soner H.M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. N.Y.: Springer, 1993. 428 p.
22. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton – Jacobi – Bellman Equations. Boston: Birkhäuser, 1997. 570 p.
23. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-order PDE's. The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
24. *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. N.Y., etc.: Springer, 1998. 278 p.
25. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* On some nonstandard dynamic programming problems of control theory // Variational Methods and Applications / Eds. F. Giannessi and A.Maugeri. N.Y.: Kluwer Acad. Pub. 2004. P. 613–627.
26. *Куржанский А.Б., Никонов О.И.* Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 5. С. 578–581.
27. *Kurzhanski A.B., Filippova T.F.* On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control. Ser. PSCT 17. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 122–188.
28. *Isaacs R.* Differential Games. N.Y.: Wiley, 1965. 384 p.
29. *Basar T., Olsder J.* Dynamic Noncooperative Game Theory. L., N.Y.: Acad. Press, 1982. 430 p.
30. *Rockafellar R.T., Wets R.J.* Variational Analysis. Berlin: Springer, 1998. 733 p.
31. *Гусев М.И., Куржанский А.Б.* К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений. I, II // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. Вып. 9. Ч. 1. С. 1591–1602; Вып. 10. Ч. 2. С. 1789–1800.
32. *Демьянов В.Ф.* Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
33. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
34. *Куржанский А.Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Т. Мат. Ин-та им. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 234–248.
35. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112(154):3(7). С. 307–330.
36. *Sethian J.A.* Level Set Methods and Fast Marching Methods. Cambridge: Univ. Press, 1999. 378 p.
37. *Osher S., Fedkiw R.* Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. N.Y.: Springer, 2003. 273 p.
38. *Chernousko F.L.* State Estimation for Dynamic Systems. Boka Raton ect.: CRC Press, 1994. 304 p.
39. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis: P.I. External approximations. P.II. Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization. Methods and Software. 2002. V. 17. № 2. P. 177–237.
40. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Reachability Analysis for uncertain systems – the ellipsoidal technique // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Ser. B. 2002. V. 9. № 3. P. 347–367.
41. *Kostousova E.K.* Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimization. Methods and Software. 2001. V. 14. P. 267–310.

Москва
e-mail: kurznans@mail.ru

Поступила в редакцию
6.IV.2004