

УДК 539.3

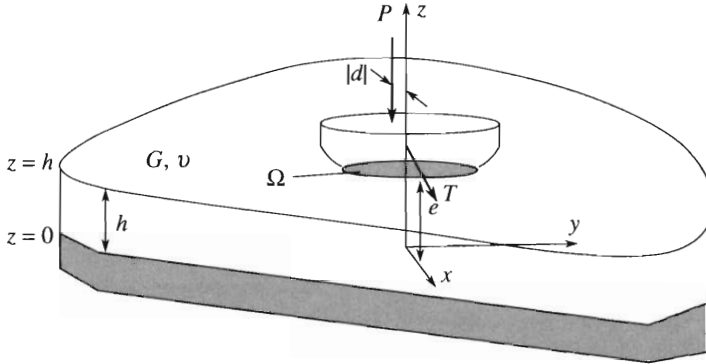
© 2004 г. В. М. Александров, Д. А. Пожарский

ТРЕХМЕРНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ УЧЕТЕ ТРЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНОЙ ШЕРОХОВАТОСТИ

Рассматриваются трехмерные контактные задачи для упругого слоя с шероховатой поверхностью при учете трения Кулона в заранее неизвестной области контакта. Принято, что деформация микровыступов упругой поверхности при контакте с жестким штампом происходит по нелинейному (например, степенному) закону [1, 2]. Решение задач сводится к исследованию нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, для которых доказывается существование и единственность решения, а также применимость метода последовательных приближений. Приводятся численные результаты, показывающие влияние шероховатости и сил трения на контактное давление, размер области контакта, связь между вдавливающей штамп силой и осадкой штампа.

Плоская контактная задача для шероховатого упругого тела, по-видимому впервые, изучалась [3] на основе линейного закона деформации микровыступов. Однако ряд экспериментальных исследований [4, 5] показал, что имеет место степенная зависимость между сближением контактирующих шероховатых тел и давлением. На основе такой зависимости исследовались [1, 2] плоские и осесимметричные контактные задачи при известной области контакта и без учета сил трения, даны ссылки на ряд предыдущих исследований. Применяемый в данной работе метод решения контактных задач с неизвестной областью контакта был предложен [6] при анализе трехмерной задачи для шероховатого упругого полупространства при общем нелинейном законе деформации микровыступов без учета сил трения. При доказательстве существования и единственности решения использовались [6] монотонность некоторого нелинейного интегрального оператора и самосопряженность линейного интегрального оператора, порожденного функцией Грина для полупространства. Соответствующие доказательства, проводимые ниже, не опираются на указанные свойства, поскольку силы трения приводят к несамосопряженности, а монотонность нарушается для случаев, когда характерный размер области контакта имеет порядок толщины слоя. Трехмерные контактные задачи без учета шероховатости в квазистатической постановке, в которой силы трения учитываются, как и в данной работе, только в направлении движения штампа, рассматривались ранее [7–9]. Метод, предложенный в работе [6], применялся [8–10] для определения неизвестных областей контакта упругих тел различной формы. Имеются попытки изучения контакта шероховатых поверхностей на основе статистического и фрактального подходов для описания неизвестного распределения микровыступов [11].

1. Формулировка и сведение к нелинейному интегральному уравнению. Рассмотрим бесконечный слой $\{-\infty < x, y < \infty, 0 \leq z \leq h\}$ с упругими параметрами G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона). Исследуется квазистатическая контактная задача о жестком штампе, который вначале внедрен в грань $z = h$ слоя, а затем начинает медленно двигаться по этой грани (без перекоса) вдоль оси x (см. фиг. 1). Нижняя грань $z = 0$ слоя фиксирована (задача А) или находится в условиях скользящей заделки (задача Б). Штамп имеет гладкое основание, описываемое функцией $f(x, y)$, такой, что неизвестная область контакта Ω вытянута вдоль оси y (в смысле отношения параллельных осей x и y сторон минимального прямоугольника, содержащего Ω).



Фиг. 1

Тогда можно пренебречь силами трения Кулона в направлении оси y и учитывать только силы трения, коллинеарные направлению движения. Вследствие гладкости основания штампа контактное давление должно обращаться в нуль на границе области контакта $\partial\bar{\Omega}$. На штамп действуют нормальная сила P , приложенная на расстоянии $|d|$ от оси z , и касательная сила $T = \mu P$, приложенная на высоте e над гранью $z = 0$ слоя; μ – коэффициент трения Кулона. Если $d < 0$, то сила P приложена на отрицательной полуоси x . Задачи симметричны по координате y . При $\mu > 0$ штамп движется в положительном направлении оси x , а при $\mu < 0$ – в противоположном направлении. Неизвестное нормальное контактное давление $\sigma_z = -q(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, связано с касательным напряжением по закону Кулона $\tau_{xz} = -\mu q(x, y)$. Поверхность слоя имеет микронеровности в результате обработки, которые при контакте со штампом дают дополнительный вклад u_z^a в нормальное перемещение границы слоя, определяемый следующим образом:

$$u_z^a = -\Phi[q(x, y)] \quad (x, y) \in \Omega \tag{1.1}$$

где $\Phi(t)$ ($-\infty < t < \infty$) – непрерывная (нелинейная) функция, строго возрастающая при $t > 0$ и равная нулю при $t \leq 0$. При $t > 0$ для функции $\Phi(t)$ существует обратная функция $H[\Phi(t)] = t$.

Такая модель учета шероховатости поверхности в настоящее время общепринята [1–6]. Модель применяется, когда плотность фактических пятен контакта достаточно велика. В приложениях функцию $\Phi(t)$ часто аппроксимируют степенной функцией, что ниже и будет сделано. Заметим еще, что высота и плотность микронеровностей поверхности влияют также на выбор того или иного значения коэффициента трения μ . Здесь этот вопрос остается открытым и будет изучен в дальнейшем.

Условие контакта между телами можно записать в форме

$$z = h: u_z + u_z^a = -[\delta - f(x, y)] \quad (x, y) \in \Omega \tag{1.2}$$

где δ – осадка штампа. Нормальное перемещение $u_z(x, y, z)$ должно удовлетворять трехмерным уравнениям равновесия Ламе и граничным условиям

$$\begin{aligned} z = h: \sigma_z &= -q(x, y), \quad \tau_{xy} = \mu\sigma_z, \quad \tau_{yz} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega \\ z = 0: u_x &= u_y = u_z = 0 \quad (\text{задача А}) \\ z = 0: u_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (\text{задача Б}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Кроме того, напряжения должны исчезать на бесконечности.

Формулировка контактных задач следующая. При заданных функциях $f(x, y)$, $\Phi(t)$ и величинах G, ν, h, μ и δ требуется определить область контакта Ω , контактное давление $q(x, y)$, внешние силы P и T , а также их плечи d и e . Возможно также задавать силу P , считая неизвестной осадку δ .

Решая краевые задачи (1.3) при помощи двойного преобразования Фурье, получим, в частности, представление

$$u_z(x, y, h) = -\frac{1}{2\pi\theta} \int_{\Omega} K(x-\xi, y-\eta) q(\xi, \eta) d\Omega_{\xi\eta}, \quad \theta = \frac{G}{1-\nu} \quad (1.4)$$

где

$$K(t, \tau) = K_1(t, \tau) - \epsilon K_2(t, \tau), \quad \epsilon = \mu \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$$

$$K_n(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} L_n^*(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha t + \beta \tau)] d\alpha d\beta, \quad n = 1, 2 \quad (1.5)$$

$$L_1^*(\alpha, \beta) = L_1(\gamma)/\gamma, \quad L_2^*(\alpha, \beta) = i\alpha L_2(\gamma)/\gamma^2, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Функции $L_n(u)$ ($n = 1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} L_1(u) &= [2\kappa \operatorname{sh}(2uh) - 4uh]/L_0(u), \quad L_2(u) = [2\kappa \operatorname{ch}(2uh) - 4(1-2\nu)^{-1}u^2h^2 - 2\kappa]/L_0(u) \\ L_0(u) &= 2\kappa \operatorname{ch}(2uh) + 4u^2h^2 + 1 + \kappa^2, \quad \kappa = 3-4\nu \end{aligned} \quad (1.6)$$

для задачи А и

$$\begin{aligned} L_1(u) &= [\operatorname{ch}(2uh) - 1]/L_0(u), \quad L_2(u) = [\operatorname{sh}(2uh) - 2(1-2\nu)^{-1}uh]/L_0(u) \\ L_0(u) &= \operatorname{sh}(2uh) + 2uh \end{aligned} \quad (1.7)$$

для задачи Б.

Используя интеграл 8.411.2 [12]

$$\int_0^{\pi/2} \cos(a \cos \chi) \cos(b \sin \chi) d\chi = \frac{\pi}{2} J_0(\sqrt{a^2 + b^2}) \quad (1.8)$$

и соотношение $J'_0(z) = -J_1(z)$, где $J_n(u)$ ($n = 0, 1$) – функция Бесселя, сведем выражения (1.5) к виду

$$\begin{aligned} K_1(x-\xi, y-\eta) &= \int_0^{\infty} L_1(u) J_0(uR) du \\ K_2(x-\xi, y-\eta) &= \frac{x-\xi}{R} \int_0^{\infty} L_2(u) J_1(uR) du \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

Учитывая асимптотическое поведение: $L_n(u) \rightarrow 1$ при $u \rightarrow +\infty$ ($n = 1, 2$) а также интеграл 6.511.1 [12]

$$\int_0^\infty J_n(uR)du = \frac{1}{R}, \quad n = 0, 1 \tag{1.10}$$

выделим главные члены в ядрах (1.9):

$$K_1(x - \xi, y - \eta) = \frac{1}{R} + \int_0^\infty [L_1(u) - 1]J_0(uR)du \tag{1.11}$$

$$K_2(x - \xi, y - \eta) = \frac{x - \xi}{R^2} + \frac{x - \xi}{R} \int_0^\infty [L_2(u) - 1]J_1(uR)du$$

Подставляя теперь представления (1.1) и (1.4) в условие контакта (1.2), получаем следующее нелинейное интегральное уравнение относительно контактного давления $q(x, y)$:

$$\Phi[q(x, y)] + \frac{1}{2\pi\theta} \int_\Omega K(x - \xi, y - \eta)q(\xi, \eta)d\Omega_{\xi\eta} = \delta - f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \tag{1.12}$$

2. Решение уравнения (1.12). Предположим, что неизвестная область контакта Ω содержится внутри прямоугольника $S = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq b\}$ ($b \geq a$). Контактное давление должно быть положительно внутри Ω и равно нулю в дополнительной области $S \setminus \Omega$. Пусть $\bar{\Omega}$ – открытое множество. Поскольку область $S \setminus \bar{\Omega}$ свободна от контакта, в ней выполняется условие непроникания $-u_z(x, y, h) > \delta - f(x, y)$. Объединяя все эти условия и распространяя интегрирование в формуле (1.12) на прямоугольник S , сведем контактные задачи к следующим соотношениям:

$$\Phi[q(M)] + \frac{1}{2\pi\theta} \int_S K_*(M, N)q(N)dS_N = g(M) \wedge q(M) > 0, \quad M \in \Omega \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2\pi\theta} \int_S K(M, N)q(N)dS_N > g(M) \wedge q(M) = 0, \quad M \in (S \setminus \bar{\Omega})$$

где использованы обозначения

$$M = (x, y), \quad N = (\xi, \eta), \quad g(M) = \delta - f(M), \quad K_*(M, N) = K(x - \xi, y - \eta) \tag{2.2}$$

После определения функции $q(x, y)$ и области Ω из системы (2.1) величины P, d и e можно найти из трех следующих условий равновесия штампа (см. формулу (14) [7]):

$$\int_\Omega q(M)d\Omega_M = P, \quad \int_\Omega xq(M)d\Omega_M = Pd, \quad e - h = -\frac{d}{\mu} \tag{2.3}$$

Система (2.1) может быть сведена только к одному нелинейному уравнению в прямоугольнике S . Область, в которой решение этого уравнения положительно, будет зоной контакта [6].

Предположим, что существует ограниченная область $S_0 = \{M : g(M) > 0\}$ такая, что $\Omega \subset \bar{S}_0 \subset S$. Введем обозначения

$$w(M) = \Phi[q(M)], \quad q(M) = H[w(M)], \quad \lambda_* = (2\pi\theta)^{-1} \quad (2.4)$$

и (нелинейные) операторы

$$\mathcal{H}v(M) := \begin{cases} H[v(M)], & v(M) > 0 \\ 0, & v(M) \leq 0 \end{cases}, \quad \mathcal{Q}v(M) := \begin{cases} v(M), & v(M) > 0 \\ 0, & v(M) \leq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Перепишем систему (2.1) на основе формул (2.4), (2.5) в эквивалентной форме

$$w(M) + \lambda_* \int_S K_*(M, N) \mathcal{H}w(N) dS_N = g(M) \wedge w(M) > 0, \quad M \in \Omega \quad (2.6)$$

$$\lambda_* \int_S K_*(M, N) \mathcal{H}w(N) dS_N > g(M) \wedge w(M) = 0, \quad M \in (S \setminus \bar{\Omega})$$

Рассмотрим интегральное уравнение Гаммерштейна

$$v(M) + \lambda_* \int_S K_*(M, N) \mathcal{H}v(N) dS_N = g(M), \quad M \in \Omega \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) можно также записать в операторной форме

$$v + \lambda_* \mathcal{K} \mathcal{H}v = g \quad (2.8)$$

где $v = v(M)$, $g = g(M)$, а \mathcal{K} – интегральный оператор вида

$$\mathcal{K}v := \int_S K_*(M, N) v(N) dS_N \quad (2.9)$$

Далее предполагается, что $g(M) \in \mathcal{C}(S)$, где $\mathcal{C}(S)$ – банахово пространство функций, непрерывных в прямоугольнике S . В этом же пространстве будем искать решения системы (2.1) и уравнения (2.8).

Теорема 1. Если $v_* = v_*(M) \in \mathcal{C}(S)$ – решение уравнения (2.8), то $w = \mathcal{Q}v_*$, $\Omega = \{M : v_*(M) > 0\}$ – решение системы (2.6), и $\Omega \neq \emptyset$ при $S_0 \neq \emptyset$; наоборот, если $w = w(M) \in \mathcal{C}(S)$ удовлетворяет системе (2.6), то

$$v_* = g - \lambda_* \mathcal{K} \mathcal{H}w, \quad M \in S \quad (2.10)$$

есть решение уравнения (2.8).

Доказательство. Сперва покажем, что $\Omega \neq \emptyset$, если $S_0 \neq \emptyset$. Допустим противное. Тогда из уравнения (2.8) следует неравенство $g \leq 0$, противоречащее существованию $S_0 \neq \emptyset$. Здесь использовано первое определение (2.5).

Пусть v_* – решение уравнения (2.8). Заметим, что $\mathcal{H}v_* = \mathcal{H}w$, где $w = \mathcal{Q}v_*$ (см. формулу (2.5)). При $M \in \Omega$ имеем $w = v_* > 0$ и $w + \lambda_* \mathcal{K} \mathcal{H}w = g$. Если $M \in (S \setminus \bar{\Omega})$, тогда $v_* = g - \lambda_* \mathcal{K} \mathcal{H}v_* < 0$, $\lambda_* \mathcal{K} \mathcal{H}w > g$, $w = 0$ и это доказывает прямое утверждение теоремы.

Пусть теперь $w = w(M)$ – решение системы (2.6). Для $M \in \Omega$ равенство $v_* = w$ следует из первого уравнения (2.6) и из соотношения (2.10). Если $M \in (S \setminus \bar{\Omega})$, то имеем

$v_* = g - \lambda_* \mathcal{H} \mathcal{H} w < 0$, откуда получим $\mathcal{H} v_* = \mathcal{H} w$ в прямоугольнике S . Теперь можно переписать формулу (2.10) в виде

$$v_* = g - \lambda_* \mathcal{H} \mathcal{H} v_*, \quad M \in S \tag{2.11}$$

т.е. v_* – решение уравнения (2.8).

Лемма 1. Будучи несамосопряженным, интегральный оператор \mathcal{H} (2.9) строго положителен в $\mathcal{L}_2(S)$, т.е.

$$(\mathcal{H}q, q)_{\mathcal{L}_2(S)} > 0 \tag{2.12}$$

для $q \neq 0$.

Доказательство. В соответствии с формулами (1.5) имеем

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{L_1(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos(\alpha t) \cos(\beta \tau) d\alpha d\beta - \\ &- \epsilon \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha L_2(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\alpha t) \cos(\beta \tau) d\alpha d\beta \end{aligned} \tag{2.13}$$

Обозначим

$$\int_S q(x, y) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) dS_{xy} = C_c(\alpha, \beta)$$

$$\int_S q(x, y) \sin(\alpha x) \cos(\beta y) dS_{xy} = C_s(\alpha, \beta)$$

$$\int_S q(x, y) \cos(\alpha x) \sin(\beta y) dS_{xy} = S_c(\alpha, \beta)$$

$$\int_S q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dS_{xy} = S_s(\alpha, \beta)$$

(2.14)

Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\alpha L_2(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha^2 + \beta^2} [C_s(\alpha, \beta) C_c(\alpha, \beta) - C_c(\alpha, \beta) C_s(\alpha, \beta) + \\ + S_s(\alpha, \beta) S_c(\alpha, \beta) - S_c(\alpha, \beta) S_s(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta = 0 \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}q, q)_{\mathcal{L}_2(S)} = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{L_1(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} [C_c^2(\alpha, \beta) + C_s^2(\alpha, \beta) + S_c^2(\alpha, \beta) + S_s^2(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta > 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

при $q(x, y) \neq 0$, так как функция $L_1(u)$ положительна при $u \in (0, \infty)$ и $v \in [0, 1/2]$ для обеих контактных задач А и Б.

Теорема 2. Если уравнение (2.8) имеет решение в $\mathcal{C}(S)$, то оно единственно.

Доказательство. Пусть имеются два решения: v_1 и v_2 , причем $v_1 \neq v_2$. Вычитая уравнение (2.8) при $v = v_1$ из этого же уравнения при $v = v_2$, получаем

$$d_0 + \lambda_* \mathcal{H} d = 0; \quad d_0 = v_2 - v_1, \quad d = \mathcal{H} v_2 - \mathcal{H} v_1 \tag{2.16}$$

Умножим уравнение (2.16) на d и проинтегрируем результат по прямоугольнику S . Получим соотношение

$$(d_0, d)_{\mathcal{L}_2(S)} + (\lambda_* \mathcal{K}d, d)_{\mathcal{L}_2(S)} = 0$$

второй член в котором положителен при $d \neq 0$ вследствие леммы 1, а первый член также положителен, поскольку из неравенства $v_2(M) > v_1(M)$ вытекает неравенство $\mathcal{H}v_2(M) \geq \mathcal{H}v_1(M)$, так как \mathcal{H} – монотонный оператор. Следовательно, $d = 0$, откуда имеем $d_0 = 0$ (см. уравнение (2.16)).

Уравнение (2.8) можно еще записать в форме

$$v = \mathcal{U}v; \quad \mathcal{U}v := g - \lambda_* \mathcal{K}\mathcal{H}v \quad (2.17)$$

Чтобы доказать существование решения уравнения (2.8) или (2.17) на основе принципа Шаудера [13], достаточно показать, что оператор \mathcal{U} , вполне непрерывный в $\mathcal{C}(S)$, переводит некоторое выпуклое множество банахова пространства $\mathcal{C}(S)$ в компактное подмножество этого множества. Это было показано [6] (замечание 5) для случая контактной задачи для полупространства ($h \rightarrow +\infty$) без учета сил трения с использованием монотонности оператора \mathcal{K} (2.9), обеспеченной положительностью его ядра $K_* = 1/R$ (2.2) в прямоугольнике S . Однако положительность K_* и монотонность \mathcal{K} , как показывают два следующих примера, в случае слоя сохраняются только для достаточно больших значений h/b при достаточно малых значениях μ . Отметим, что коэффициент трения μ для металлических поверхностей обычно удовлетворяет условию $|\mu| \leq 0.2$.

Пример 1. Рассмотрим осесимметричные задачи A_0 и B_0 для слоя, нагруженного сосредоточенной силой p в точке $x = y = 0$, $z = h$. Граничные условия при $z = 0$ такие же, как для задач А и Б соответственно (см. формулы (1.3)). Для безразмерного нормального перемещения

$$u(\rho) = -u_z(x, y, h) \frac{2\pi\theta h}{p}, \quad \rho = \frac{r}{h}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

используя формулы (1.4), (1.5) при $\epsilon = 0$ и первую формулу (1.11), получим выражение

$$u(\rho) = \frac{1}{\rho} + \int_0^{\infty} [L(t) - 1] J_0(t\rho) dt, \quad L(t) = L_1\left(\frac{u}{h}\right) \quad (2.18)$$

Функция $L_1(u)$ определена первой формулой (1.6) или (1.7). Ясно, что ядро K_* для контактных задач А и Б (без трения) будет положительно для тех значений R , для которых положительна соответствующая функция $u(R/h)$. Первый член $1/\rho$ в формуле (2.18) – перемещение для упругого полупространства. Функции $u(\rho)$ для некоторых ρ при $\nu = 0.3$ представлены ниже:

ρ	0.5	1	1.24	1.52	2	
$u(\rho)$	0.765	0.0583	0	-0.0161	-0.0107	(задача A_0)
$u(\rho)$	0.924	0.129	0.0388	0	-0.0106	(задача B_0)

Видно, что ядро K_* в уравнении (2.8) для обеих задач при $\mu = 0$ и $\nu = 0.3$ будет отрицательно, например при $R = 2h$. Поверхность слоя деформируется как в положительном, так и в отрицательном направлениях оси z . Этот эффект обусловлен влиянием дна $z = 0$ слоя конечной толщины.

Пример 2. Для предельного случая $h \rightarrow \infty$, соответствующего упругому полупространству, ядро K_* (2.2) принимает вид

$$K_*(M, N) = \frac{1}{R} - \epsilon \frac{x - \xi}{R^2} \tag{2.19}$$

Функция K_* (2.19) положительна в прямоугольнике S , если $|\epsilon| < 1$. При $\nu = 0.3$ последнее условие принимает вид $|\mu| < 3.5$.

Лемма 2. Пусть ядро $K_*(M, N)$ положительно при $M, N \in S$. Тогда оператор \mathcal{U} (2.17) отображает множество $B = \{\chi : \mathcal{U}g \leq \chi \leq g\} \subset \mathcal{C}(S)$ на себя, и существует решение $v_* \in B$ уравнения (2.17) или (2.8).

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{U}g < g$ в S ($g \neq 0$). Пусть $\mathcal{U}g \leq \chi \leq g$. Тогда в любой точке M

$$\chi = t\mathcal{U}g + (1-t)g, \quad t = t(M) \in [0; 1]$$

откуда

$$\chi = g - t\lambda_* \mathcal{H}\mathcal{H}g, \quad \mathcal{U}\chi = g - \lambda_* \mathcal{H}\mathcal{H}(g - t\lambda_* \mathcal{H}\mathcal{H}g)$$

Двойное неравенство

$$\mathcal{U}g \leq \mathcal{U}\chi \leq g \tag{2.20}$$

может быть переписано в виде неравенства

$$\lambda_* \mathcal{H}\mathcal{H}g \geq \lambda_* \mathcal{H}\mathcal{H}(g - t\lambda_* \mathcal{H}\mathcal{H}g) \geq 0$$

которое выполняется ввиду монотонности операторов \mathcal{H} и \mathcal{H} , поскольку $K_* > 0$. Следовательно, двойное неравенство (2.20) также удовлетворено. Уравнение (2.17) или (2.8) имеет решение в силу принципа Шаудера.

Для обеих контактных задач A и B условие $K_* > 0$ в области S выполняется, например, при $h/b > 2.3$ и $\mu = 0$. Если же функция K_* меняет знак в S , то существование решения уравнения (2.17) может быть установлено при помощи следующей леммы.

Лемма 3. Пусть функция g принадлежит открытому шару $B_\rho \subset \mathcal{C}(S)$ радиуса ρ центром 0 , $\|g\| < \rho$. Пусть T – граница \bar{B}_ρ . Тогда $\mathcal{U}T \subset \bar{B}_\rho$ для достаточно малых значений λ_* , и уравнение (2.17) или (2.8) имеет решение $v_* \in B_\rho$.

Для доказательства достаточно использовать другую формулировку принципа Шаудера [14] и то, что \mathcal{U} – вполне непрерывный оператор.

Далее для перемещения шероховатостей примем степенной закон [2]

$$\Phi[q(M)] = Aq^\beta(M) \quad (0 < \beta \leq 1)$$

и последнюю формулу (2.4) заменим на

$$\lambda_* = (2\pi\theta A^\gamma)^{-1} \quad (\gamma = 1/\beta \geq 1) \tag{2.21}$$

Тогда в качестве функции $H[v(M)]$ в первой формуле (2.5) следует взять

$$H[v(M)] = v^\gamma(M) \tag{2.22}$$

Малость параметра λ_* в формулировке леммы 3 может быть достигнута за счет достаточно больших значений параметра A , характеризующего грубость обработки упругой поверхности слоя.

Уравнение (2.17) будем решать, используя последовательные приближения. Исследуем сходимость этого процесса на основе условия Липшица для нелинейного оператора \mathcal{U} [15], оценивая постоянную в условии Липшица при помощи производной Фреше.

Лемма 4. Нелинейный оператор \mathcal{Q} в любом замкнутом шаре $B_\rho \subset \mathcal{C}(S)$ радиуса ρ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $q_0 = \lambda_* \|\mathcal{H}\| \gamma \rho^{\gamma-1}$.

Доказательство. Функцию H (2.22) можно рассматривать как нелинейный оператор, определенный на неотрицательных функциях, с производной Фреше $H'(v)h = \gamma v^{\gamma-1} h$. Ясно, что $\mathcal{H} = H\mathcal{Q}$. Оператор H (2.22) удовлетворяет условию Липшица на множестве неотрицательных ограниченных функций $\{\chi \in \mathcal{C}(S) : 0 \leq \chi \leq \rho\}$ с постоянной $q_1 = \gamma \rho^{\gamma-1}$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}u - \mathcal{Q}v\| &= \lambda_* \|\mathcal{H}(\mathcal{H}u - \mathcal{H}v)\| \leq \lambda_* \|\mathcal{H}\| \|\mathcal{H}u - \mathcal{H}v\| \leq \\ &\leq \lambda_* \|\mathcal{H}\| q_1 \|\mathcal{Q}u - \mathcal{Q}v\| \leq \lambda_* \|\mathcal{H}\| q_1 \|u - v\| = q_0 \|u - v\| \end{aligned} \quad (2.23)$$

для любых $u, v \in B_\rho$.

Теорема 3. Пусть оператор \mathcal{Q} отображает замкнутый шар $B_\rho \subset \mathcal{C}(S)$ радиуса ρ в себя и предположим, что $q_0 = \lambda_* \|\mathcal{H}\| \gamma \rho^{\gamma-1} < 1$. Тогда для любого начального элемента $v_0 \in B_\rho$ последовательные приближения

$$v_n = \mathcal{Q}v_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

сходятся к единственному (по теореме 2) решению уравнения (2.17)

Доказательство. Оператор \mathcal{Q} является сжимающим по лемме 4. Остальное повторяет доказательства теорем 1.1 и 1.2 [15].

Постоянная q_0 в условии Липшица зависит от параметров λ_* (2.21), γ , ρ , так же как и от нормы линейного оператора \mathcal{H} . Чем меньше норма $\|\mathcal{H}\|$, тем меньшее значение ρ может быть взято при одних и тех же больших значениях A .

Пример 3. Норма $\|\mathcal{H}\|$ может быть легко подсчитана для предельного случая полупространства, $h/b \rightarrow \infty$, для которого

$$\mathcal{H}v = \int_S \left(\frac{1}{R} - \epsilon \frac{x - \xi}{R^2} \right) v dS_{\xi\eta} \quad (2.25)$$

согласно формуле (2.19). Пусть $|\epsilon| < 1$, тогда ядро оператора (2.25) положительно в области S , следовательно

$$\|\mathcal{H}\| = \max_{(x,y) \in S} \int_S \left(\frac{1}{R} - \epsilon \frac{x - \xi}{R^2} \right) dS_{\xi\eta} \quad (2.26)$$

Этот интеграл легко вычисляется при помощи формул 1.6.8.14 и 1.6.7.3 [16]

$$F(s) := - \int \frac{\ln(s + \sqrt{s^2 + 1})}{s^2} ds = \frac{\ln(s + \sqrt{s^2 + 1})}{s} + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{s^2 + 1}}{s^2} \right| \quad (2.27)$$

$$G(s, a) := \int \ln(s^2 + a^2) ds = s \ln(s^2 + a^2) - 2s + 2a \operatorname{arctg} \frac{s}{a}$$

В итоге получим

$$\|\mathcal{H}\| = \max_{(x,y) \in S} (N_1 - \epsilon N_2) \quad (2.28)$$

где

$$N_1 = N_1^+ + N_1^-, \quad N_1^\pm = (b \pm y) \left[F\left(\frac{b \pm y}{a - x}\right) + F\left(\frac{b \pm y}{a + x}\right) \right]$$

$$N_2 = N_2^+ + N_2^-, \quad N_2^\pm = \pm \frac{1}{2} [G(b - y, a \pm x) + G(b + y, a \pm x)]$$

При отсутствии трения, $\mu = \epsilon = 0$, максимум достигается в (2.28) при $x = y = 0$, давая $\|\mathcal{H}\| = 4bF(b/a)$. Отсюда, в частности, найдем, что $\|\mathcal{H}\| = 8b \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 7.05b$ при $a = b$ и $\|\mathcal{H}\| \approx 2.64b$ при $a = 0.2b$. При наличии трения, $\epsilon \neq 0$, максимум в (2.28) достигается в точке $(x_m, 0)$, значение x_m определяется из трансцендентного уравнения

$$\ln(x_- + \sqrt{x_-^2 + 1}) + \ln(x_+ + \sqrt{x_+^2 + 1}) + \epsilon(\arctg x_- - \arctg x_+) = 0$$

где обозначено

$$x_- = \frac{b}{x-a}, \quad x_+ = \frac{b}{x+a}$$

В частности, при $a = b$, $\mu = 0.2$ и $\nu = 0.3$ получим $x_m \approx -0.06b$ и $\|\mathcal{H}\| \approx 7.06b$.

3. Численный анализ. Пусть основание штампа имеет форму эллиптического параболоида

$$f(x, y) = x^2/(2R_1) + y^2/(2R_2), \quad R_1 \leq R_2$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$x_* = \frac{x}{b}, \quad y_* = \frac{y}{b}, \quad \lambda = \frac{h}{b}, \quad \delta_* = \frac{\delta}{b}, \quad \epsilon = \frac{a}{b}, \quad A_0 = \frac{b}{2R_1}, \quad B_0 = \frac{b}{2R_2}$$

$$A_* = \frac{A(2\pi\theta)^\beta}{b}, \quad P_* = \frac{P}{2\pi\theta b^2}, \quad q_*(x_*, y_*) = \frac{q(x, y)}{2\pi\theta} \tag{3.1}$$

$$g_*(x_*, y_*) = \delta_* - A_0 x_*^2 - B_0 y_*^2$$

и т.д. В обозначениях (3.1) области S и Ω также изменятся. Звездочки далее опускаем. Параметр λ характеризует относительную толщину слоя. Вместо (2.17) получим безразмерное нелинейное уравнение вида

$$v = g - A^{-2} \mathcal{H} \mathcal{H} v \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) решалось методом последовательных приближений, сходящимся при достаточно больших значениях A (в зависимости от $\|g\|$, $\|\mathcal{H}\|$ и γ).

Расчеты сделаны для задачи A при $\nu = 0.3$ и $\beta = 0.4$ (данное значение β заимствовано из [2], где также брали $A \sim 1$). Зависимости $P(\lambda)$ при разных значениях A (чем меньше A , тем лучше обработана поверхность слоя) для случая

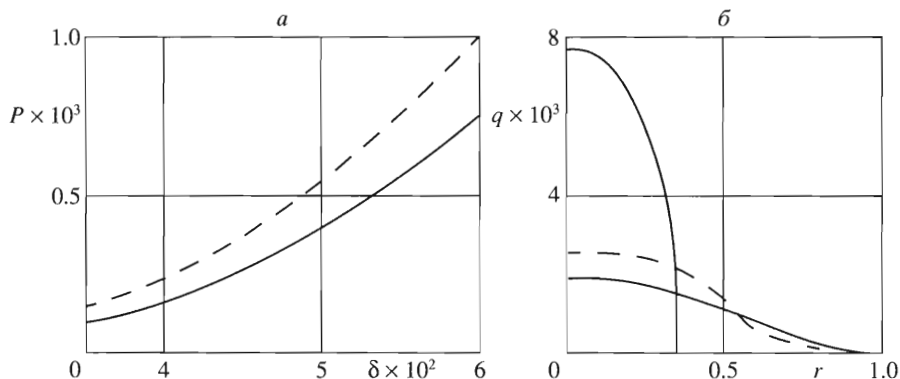
$$\delta = 0.05, \quad A_0 = 0.2, \quad B_0 = 0.05, \quad \epsilon = 0.5, \quad \forall \mu \in [0, 0.2] \tag{3.3}$$

приведены ниже:

λ	2.5	2	1.5	1	0.5	0.25	
$P \times 10^3$	0.405	0.407	0.409	0.413	0.421	0.429	(при $A = 0.8$)
$P \times 10^3$	1.13	1.14	1.16	1.19	1.26	1.33	(при $A = 0.5$)

Подобная независимость P (первых нескольких значащих цифр) от коэффициента трения μ (в указанном диапазоне μ) отмечалась также [8] при исследовании контактной задачи для полупространства без учета шероховатости ($A = 0$).

Контактное давление при трении становится асимметричным, но его интегральная характеристика сохраняется, что может быть объяснено так же, как ранее [8],



Фиг. 2

путем разложения давления по малому параметру ϵ (см. вторую формулу (1.5)). Сила не зависит от знака μ , поэтому влияние трения будет описываться малыми членами порядка ϵ^2 . При заданной точности число итераций падает с уменьшением λ , что связано с уменьшением нормы $\|\mathcal{K}\|$. На фиг. 2, *a* даны зависимости $P(\delta)$ при $A = 0.8$ (сплошная кривая) и $A = 0.7$ (штриховая кривая), при этом $\lambda = 1$, а значения остальных параметров даны равенствами (3.3). При одном и том же значении силы осадка больше для менее отшлифованной поверхности, для которой больше значение A . Область контакта также увеличивается с ростом A , а давление в центре этой области уменьшается. Это показано на фиг. 2, *б* для случая

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad \mu = 0, \quad P = 0.00199, \quad A_0 = B_0 = 0.05$$

когда ввиду осевой симметрии давление зависит только от радиальной координаты r (она отнесена к *b*). Тонкая линия соответствует точному решению задачи при $A = 0$ [10] ($\delta = 0.0130$, радиус ρ области Ω равен 0.36), штриховая линия соответствует значению $A = 0.3$ ($\delta = 0.0370$, $\rho = 0.82$), жирная линия – значению $A = 0.5$ ($\delta = 0.0500$, $\rho = 0.96$).

Влияние шероховатости, в смысле отличия от соответствующего решения при $A = 0$, особенно возрастает для зон контакта, характерный размер которых значительно превышает величину осадки штампа.

Работа выполнена при поддержке Фонда Гумбольдта (Германия) и Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00346).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Кудиш И.И. Асимптотический анализ плоской и осесимметричной контактных задач при учете поверхностной структуры взаимодействующих тел // Изв. АН СССР. МТГ. 1979. № 1. С. 58–70.
2. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 99–105.
3. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
4. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 228 с.
5. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
6. Галанов Б.А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.

7. *Галин Л.А., Горячева И.Г.* Пространственная контактная задача о движении штампа с трением // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 1016–1022.
8. *Пожарский Д.А.* О трехмерной контактной задаче для упругого клина при учете сил трения // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 151–159.
9. *Чебаков М.И.* Пространственная контактная задача для слоя с учетом сил трения в неизвестной области контакта // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 1. С. 67–70.
10. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
11. *Barber J.R.* Statistical and fractal aspects of the contact of rough surfaces // Abstrs 227th Heraeus Seminar on Contact and Fracture Problems. Bad Honnef, Germany, 2002. P. 8.
12. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
14. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.
15. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
16. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.XII.2002