ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 68. Вып. 3, 2004

УДК 539.3

© 2004 г. Л. М. Зубов

О БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЗГИБА ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Предложена точная нелинейная теория пространственного изгиба цилиндрических (призматических) упругих тел. При пространственном изгибе каждая материальная прямая, параллельная оси призматического бруса, после деформации превращается в винтовую линию. Все эти винтовые линии имеют общую ось, ортогональную первоначальной оси стержня. Данная пространственная задача нелинейной теории упругости сведена к двумерной краевой задаче для плоской области в форме поперечного сечения бруса. Решение полученной двумерной задачи позволяет точно удовлетворить уравнениям равновесия в объеме цилиндрического тела и граничным условиям на боковой поверхности призмы. Краевые условия на торцах бруса выполняются в интегральном смысле. Система сил, действующих в концевом сечении цилиндра, статически эквивалентна силе и моменту, которые приложены в точке оси указанных выше винтовых линий и направлены вдоль этой оси. Даны вариационные постановки нелинейной краевой задачи на сечении бруса, испытывающего пространственный изгиб.

1. Двупараметрические семейства конечных деформаций призматического бруса. Система уравнений эластостатики упругого тела при отсутствии массовых сил состоит [1] из уравнений равновесия

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \tag{1.1}$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D} = dW/d\mathbf{C} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}, \quad \mathbf{P} = 2dW/d\mathbf{G} \tag{1.2}$$

и геометрических соотношений

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T, \quad \mathbf{C} = \operatorname{grad}\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = X_k\mathbf{i}_k \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{C}$ – градиент деформации, X_k ($k = 1, 2, 3$) – декартовы координаты частиц деформированного тела (эйлеровы координаты), $\mathbf{G}$ – мера деформации Коши, $\mathbf{i}_k$ – координатные орты, $\mathbf{D}$ – несимметричный тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{P}$ – симметричный тензор напряжений Кирхгофа, $W(\mathbf{G})$ – удельная потенциальная энергия деформации упругого материала, div и grad – операторы дивергенции и градиента в лагранжевых координатах. В качестве последних в дальнейшем будем использовать декартовы координаты отсчетной конфигурации тела $x_s (s = 1, 2, 3)$. В случае изотропного материала удельная энергия W выражается через инварианты тензора $\mathbf{G}$

$$I_1 = \operatorname{tr}\mathbf{G}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2\mathbf{G} - \operatorname{tr}\mathbf{G}^2), \quad I_3 = \det\mathbf{G}$$

Система (1.1)–(1.3) легко сводится к системе трех скалярных нелинейных уравнений с неизвестными функциями X_1, X_2, X_3 и независимыми переменными x_1, x_2, x_3.

Далее приводятся частные решения системы уравнений (1.1)–(1.3), содержащие неизвестные функции только двух лагранжевых координат. Каждое из этих решений представляет собой двупараметрическое семейство деформаций, которые описываются при помощи функций

$$X_k = X_k(x_1, x_2, x_3), \quad k = 1, 2, 3$$

Предположим, что упругое тело в отсчетной конфигурации имеет форму цилиндра (призмы) произвольного поперечного сечения. Образующие цилиндра параллельны оси x_3, а координаты x_1, x_2 отсчитываются в плоскости поперечного сечения. Рассмотрим следующее двупараметрическое семейство деформаций цилиндрического тела

$$\begin{aligned} X_1 &= u_1(x_1, x_2) + lx_3 \\ X_2 &= u_2(x_1, x_2)\cos\omega x_3 - u_3(x_1, x_2)\sin\omega x_3 \\ X_3 &= u_2(x_1, x_2)\sin\omega x_3 + u_3(x_1, x_2)\cos\omega x_3 \\ \omega, l &= \mathrm{const} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Нетрудно видеть, что при деформации вида (1.4) каждая материальная прямая $x_1 = \mathrm{const}$, $x_2 = \mathrm{const}$, параллельная в отсчетной конфигурации оси цилиндра, после деформации превращается в простую винтовую линию, осью которой является прямая $X_2 = X_3 = 0$. При $l = u_3 = 0$ формулы (1.4) описывают исследованный ранее [2] чистый изгиб призматического бруса в плоскости x_2x_3. На основании соотношений (1.2)–(1.4) находим ($u_{k,\alpha} = \partial u_k/\partial x_\alpha$)

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}(x_1, x_2, x_3) = C_{sk}(x_1, x_2)\mathbf{i}_s \otimes \mathbf{j}_k, \quad \mathbf{G} = C_{sm}C_{km}\mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k \\ &\mathbf{j}_1 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{j}_2 = \mathbf{i}_2\cos\omega x_3 + \mathbf{i}_3\sin\omega x_3, \quad \mathbf{j}_3 = -\mathbf{i}_2\sin\omega x_3 + \mathbf{i}_3\cos\omega x_3 \\ &C_{\alpha k} = u_{k,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3; \quad C_{31} = l, \quad C_{32} = -\omega u_3, \quad C_{33} = \omega u_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Видно, что мера деформации Коши $\mathbf{G}$ не зависит от координаты x_3. Если упругое тело однородно по координате x_3, то тензор напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}$ согласно уравнению (1.2) будет функцией только координат x_1, x_2. Однородность тела по координате x_3 означает, что удельная упругая энергия W может явно зависеть от координат x_1, x_2, но не зависит явно от x_3: $W = W(\mathbf{G}, x_1, x_2)$. При этом материал может быть анизотропным.

Из соотношений (1.2), (1.5) для тела, однородного по координате x_3, имеем

$$\mathbf{D}(x_1, x_2, x_3) = D_{sk}(x_1, x_2)\mathbf{i}_s \otimes \mathbf{j}_k \tag{1.6}$$

С учетом равенства (1.6) уравнения равновесия (1.1) запишем в виде

$$D_{11,1} + D_{21,2} = 0, \quad D_{12,1} + D_{22,2} - \omega D_{33} = 0, \quad D_{13,1} + D_{23,2} + \omega D_{32} = 0 \tag{1.7}$$

Учитывая соотношения (1.2), (1.5), видим, что уравнения (1.7) представляют собой систему трех скалярных уравнений относительно трех функций двух переменных $u_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2, 3$). Если на боковой поверхности призмы с единичной нормалью $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i}_1 + n_2\mathbf{i}_2$ задана распределенная внешняя нагрузка $\mathbf{f}$, то граничные условия на этой поверхности имеют вид

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{f} \tag{1.8}$$

Предположим, что вектор распределенной нагрузки $\mathbf{f}$ может быть представлен в форме $\mathbf{f} = \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{C}$, где вектор $\mathbf{f}^*$ не зависит от координаты x_3. Тогда краевые условия

(1.8) для деформации вида (1.4) не будут содержать переменной x_3 и вместе с уравнениями (1.7) образуют двумерную краевую задачу для плоской области в форме поперечного сечения призмы. Примером поверхностной нагрузки, для которой вектор $\mathbf{f}^*$ не зависит от x_3, может служить гидростатическое давление, равномерно распределенное по боковой поверхности.

Если $u_3 = l = 0$, то, как показано ранее [2], в случае изотропного материала выполняются равенства $D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = 0$. Поэтому третье из уравнений (1.7) удовлетворяется тождественно. Если, кроме того, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}_3 = 0$, то удовлетворяется тождественно также одно из трех краевых условий в (1.8).

Наряду с (1.4) существуют еще два семейства деформаций цилиндрического бруса, для которых исходная система уравнений эластостатики редуцируется в систему с двумя независимыми переменными x_1, x_2. Эти семейства задаются соотношениями

$$\begin{aligned} X_1 &= v_1(x_1, x_2)\cos\beta x_3 - v_3(x_1, x_2)\sin\beta x_3 \\ X_2 &= v_2(x_1, x_2) + t x_3 \\ X_3 &= v_1(x_1, x_2)\sin\beta x_3 + v_3(x_1, x_2)\cos\beta x_3 \\ \beta, t &= \mathrm{const} \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= w_1(x_1, x_2)\cos\psi x_3 - w_2(x_1, x_2)\sin\psi x_3 \\ X_2 &= w_1(x_1, x_2)\sin\psi x_3 + w_2(x_1, x_2)\cos\psi x_3 \\ X_3 &= w_3(x_1, x_2) + \lambda x_3 \\ \psi, \lambda &= \mathrm{const} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Семейство (1.9) не имеет принципиальных отличий от семейства (1.4), так как описывает пространственный изгиб бруса, при котором его ось превращается в винтовую линию. Ось этой винтовой линии параллельна орту $\mathbf{i}_2$, в то время как для семейства (1.4) она параллельна орту $\mathbf{i}_1$. При $v_3 = t = 0$ семейство (1.9) описывает чистый изгиб призматического стержня в плоскости x_1x_3.

Семейство (1.10), представленное ранее [3] в другой форме, существенно отличается от (1.4) и (1.9), так как описывает осевое растяжение–сжатие и кручение призматического бруса. Постановка и решение двумерной краевой задачи на сечении бруса, возникающей в нелинейной теории кручения, содержится в [3, 4].

2. Формулировка двумерной краевой задачи на сечении бруса. Рассмотрим более подробно формулировку двумерной краевой задачи для плоской области σ в форме поперечного сечения призматического бруса, испытывающего пространственный изгиб, т.е. деформацию вида (1.4). Боковую поверхность бруса будем предполагать свободной от нагрузки. Краевая задача на сечении бруса состоит из граничных условий (1.8), в которых $\mathbf{f} = 0$, и из уравнений равновесия (1.7), в которых величины D_{sk} предполагаются выраженными через неизвестные функции двух переменных $u_k(x_1, x_2)$ $(k = 1, 2, 3)$ при помощи определяющих уравнений (1.2) и кинематических соотношений (1.5). Постоянные ω и l считаются заданными параметрами.

Пусть $u_k^\circ(x_1, x_2)$ – некоторое решение указанной краевой задачи. Тогда, как легко проверить, функции

$$u_1 = u_1^\circ + L, \quad u_2 = u_2^\circ\cos K - u_3^\circ\sin K, \quad u_3 = u_2^\circ\sin K + u_3^\circ\cos K \tag{2.1}$$

где K и L – произвольные действительные постоянные, также удовлетворяют уравнениям (1.7) и граничным условиям (1.8). Это означает, что положение упругого тела после деформации определяется с точностью до поворота вокруг оси X_1 и поступательного смещения вдоль той же оси. Отмеченную неоднозначность решения можно устранить, наложив на неизвестные функции дополнительные условия, исключающие возможность произвольного поворота вокруг орта $\mathbf{i}_1$ и произвольного смещения вдоль этого орта. В качестве таких условий можно использовать, например, следующие интегральные соотношения:

$$\iint_\sigma (u_1 - x_1)d\sigma = 0 \tag{2.2}$$

$$\iint_\sigma (\cos\theta - 1)d\sigma = 0, \quad \cos\theta = \frac{u_{2,1} + u_{3,2}}{\sqrt{(u_{2,1} + u_{3,2})^2 + (u_{3,1} - u_{2,2})^2}} \tag{2.3}$$

Краевую задачу (1.7), (1,8), (2.2), (2.3) на сечении призмы можно преобразовать, исключив функции u_k и приняв за основные неизвестные другие величины. В результате исключения функций u_k из выражений для C_{sk} (1.5) получим уравнения совместности относительно компонент градиента деформации

$$C_{11,2} = C_{21,1}, \quad C_{33,\alpha} = \omega C_{\alpha 2}, \quad C_{32,\alpha} = -\omega C_{\alpha 3}; \quad \alpha = 1, 2 \tag{2.4}$$

Нетрудно проверить, что в односвязной области σ функции u_1, u_2, u_3 определяются однозначно заданными функциями $C_{\alpha k}$, C_{32}, C_{33} ($\alpha = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$), удовлетворяющими уравнениям (2.4), при условии, что задано значение функции u_1 в некоторой точке области σ.

Так как согласно уравнению (1.2) компоненты тензора напряжений Пиолы D_{sk} выражаются через величины C_{mn}, уравнения равновесия (1.7) вместе с уравнениями совместности (2.4) образуют систему восьми уравнений с восемью неизвестными. Число неизвестных функций $C_{sk}(x_1, x_2)$ ($s, k = 1, 2, 3$) равно восьми по той причине, что компонента C_{31} согласно (1.5) является известной постоянной. Краевые условия на контуре $\partial\sigma$ поперечного сечения бруса

$$n_1 D_{1k} + n_2 D_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \tag{2.5}$$

представляют собой нелинейные ограничения на значения функций $C_{sk}(x_1, x_2)$.

Краевая задача (1.7), (2.4), (2.5), описывающая пространственный изгиб упругого бруса и сформулированная через компоненты тензора $\mathbf{C}$, как легко проверить, нечувствительна к следующей замене неизвестных функций ($K = \text{const}$):

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C} \cdot [(\mathbf{E} - \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1)\cos K + \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \times \mathbf{E} \sin K]$$

где $\mathbf{E}$ – единичный тензор. Указанная неоднозначность решения устраняется при помощи ограничения (2.3), в котором теперь $\cos\theta$ должен быть выражен в терминах C_{sk}:

$$\cos\theta = \frac{C_{12} + C_{23}}{\sqrt{(C_{12} + C_{23})^2 + (C_{13} - C_{22})^2}} \tag{2.6}$$

Надобность в условии (2.2), очевидно, пропадает, если за неизвестные принять компоненты тензора $\mathbf{C}$.

Вместо компонент градиента деформации $\mathbf{C}$ за неизвестные функции можно принять компоненты D_{mn} тензора напряжений Пиолы. Чтобы записать уравнения совместности (2.4) через напряжения, необходимо выразить градиент деформации $\mathbf{C}$ через тензор $\mathbf{D}$. Решение этой задачи в частном случае чистого изгиба бруса, когда $C_{\alpha 3} = C_{3\alpha} = D_{\alpha 3} = D_{3\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, 2$), изложено ранее [2]. Здесь рассмотрим проблему обращения зависимости $\mathbf{D}(\mathbf{C})$ в более общей ситуации пространственного изгиба призматического тела. Считая материал изотропным и следуя описанному ранее методу [5], сначала выражаем положительно определенный тензор растяжения $\mathbf{U} = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T)^{1/2}$ через симметричный тензор напряжений Яуманна $\mathbf{S} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{A}^T$, где $\mathbf{A} = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T)^{-1/2}\cdot\mathbf{C}$ – собственно ортогональный тензор, определяющий повороты материальных волокон при деформации упругого тела. После этого задача построения зависимости $\mathbf{C}(\mathbf{D})$ сводится к представлению тензора поворота $\mathbf{A}$ через тензор Пиолы: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{D})$, так как справедливы равенства

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{A} = \varphi(\mathbf{S})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{D}) = \varphi[\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}^T(\mathbf{D})]\cdot\mathbf{A}(\mathbf{D}) \tag{2.7}$$

Здесь $\varphi(\mathbf{S})$ – тензорная функция, обратная к функции $\mathbf{S} = f(\mathbf{U})$. Зависимость $\mathbf{A}(\mathbf{D})$ находится как решение уравнения

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\cdot\mathbf{D}^T \tag{2.8}$$

В рассматриваемой здесь задаче изгиба бруса уравнение (2.8) в соответствии с (1.5), (1.6) эквивалентно следующему:

$$\begin{gathered}\mathbf{D}_0\cdot\mathbf{A}_0^T = \mathbf{A}_0\cdot\mathbf{D}_0^T\\ \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}|_{x_s=0} = D_{sk}(x_1, x_2)\mathbf{i}_s\otimes\mathbf{i}_k, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}|_{x_s=0}\end{gathered} \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.9) неединственно и имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_0 = \mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{D}_0\\ \mathbf{K} = \pm\sqrt{L_1}\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_1 \pm \sqrt{L_2}\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_2 \pm \sqrt{L_3}\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{a}_3\end{gathered} \tag{2.10}$$

где L_m и $\mathbf{a}_m$ – собственные значения и собственные единичные векторы тензора $\mathbf{D}_0\cdot\mathbf{D}_0^T$.

Хотя в сечениях бруса $x_3 = \mathrm{const}$, достаточно удаленных от сечения $x_3 = 0$, повороты материальных волокон могут быть очень большими, можно утверждать, что если параметры ω и l не слишком велики, то углы поворота материальных волокон в каждой точке сечения бруса $x_3 = 0$ не будут превышать 90°. Тогда, как было показано [5], единственное решение уравнения (2.9) относительно $\mathbf{A}_0$ выделяется из совокупности (2.10) при помощи неравенств

$$\det\mathbf{A}_0 > 0, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_0 > 1 \tag{2.11}$$

В частном случае чистого изгиба соотношения (2.10), (2.11) приводят [2] к явному выражению тензора $\mathbf{A}_0$ через тензор $\mathbf{D}_0$. В общем случае нахождение тензора поворота $\mathbf{A}_0$ по формулам (2.10), (2.11) требует применения численных методов.

Итак, при учете условий (2.11) существует единственное представление компонент градиента деформации C_{sk} через напряжения Пиолы D_{mn}, что позволяет сформулировать двумерную краевую задачу (1.7), (2.3), (2.4)–(2.6) в напряжениях D_{mn}.

Следующий шаг преобразования двумерной краевой задачи на сечении бруса заключается в тождественном удовлетворении уравнений равновесия (1.7) при помощи функций напряжений.

Выразим неизвестные напряжения D_{mn} через пять новых неизвестных по формулам

$$\begin{gathered}D_{11} = \Phi_{,2}, \quad D_{21} = -\Phi_{,1}, \quad D_{\alpha\beta} = \omega\Phi_{\alpha\beta}; \quad \alpha = 1, 2; \quad \beta = 2, 3\\ D_{32} = -\Phi_{13,1} - \Phi_{23,2}, \quad D_{33} = \Phi_{12,1} + \Phi_{22,2}\end{gathered} \tag{2.12}$$

Выражения (2.12) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (1.7) и представляют собой общее решение этих уравнений. Последнее вытекает из того, что функции Φ_{12}, Φ_{22}, Φ_{13}, Φ_{23} определяются по заданным в односвязной области σ напряжениям однозначно, а функция Φ – с точностью до произвольной аддитивной постоянной, не влияющей на напряженное состояние тела. Величины Φ, Φ_{12}, Φ_{22}, Φ_{13}, Φ_{23}, называемые функциями напряжений, остается подчинить уравнениям совместности (2.4), соотношениям (2.3), (2.6) и краевым условиям (2.5). Последние записываются через функции напряжений следующим образом (s – текущая длина дуги граничного контура):

$$\partial\Phi/\partial s = 0, \quad n_1\Phi_{12} + n_2\Phi_{22} = 0, \quad n_1\Phi_{13} + n_2\Phi_{23} = 0 \tag{2.13}$$

Если поперечное сечение бруса σ представляет собой многосвязную область, то ее граница $\partial\sigma$ состоит из внешнего контура γ_0 и контуров отверстий γ_t ($t = 1, 2, \ldots, N$). В силу первого равенства (2.13) функция напряжений Φ принимает постоянные значения B_0, B_t на каждой из замкнутых кривых γ_0, γ_t. Так как добавление произвольной постоянной к функции Φ не влияет на напряженное состояние бруса, без ограничения общности можно положить $B_0 = 0$. Дополнительными условиями для определения неизвестных постоянных B_t служат интегральные соотношения, выражающие требование однозначности функции $u_1(x_1, x_2)$ в многосвязной области

$$\oint_{\gamma_t} C_{11}dx_1 + C_{21}dx_2 = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, N \tag{2.14}$$

Линейность граничных условий (2.13) – важное достоинство формулировки краевой задачи на сечении бруса при помощи функций напряжений.

3. Краевые условия на торцах бруса. Решение двумерной краевой задачи на сечении бруса, сформулированной в разд. 2, позволяет точно удовлетворить уравнениям равновесия и совместности в объеме бруса и граничным условиям на его боковой поверхности. Этого нельзя сказать о граничных условиях на торцевых поверхностях цилиндра $x_3 = \text{const}$, которые могут быть выполнены лишь приближенно, за счет подбора постоянных ω и l.

Определим главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\mathbf{M}$ сил, действующих в произвольном поперечном сечении цилиндрического бруса, испытывающего деформацию вида (1.4) при отсутствии нагрузки на боковой поверхности. На основании равенства (1.6) имеем (всюду далее интегрирование ведется по области σ)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_3) &= \iint \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D}d\sigma = F_1\mathbf{i}_1 + F_2\mathbf{j}_2 + F_3\mathbf{j}_3 \\ F_k &= \iint D_{3k}d\sigma, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где F_k – постоянные величины. Необходимое условие равновесия $\mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(b)$ части цилиндра, ограниченной боковой поверхностью и сечениями $x_3 = a$, $x_3 = b$, где a и b – произвольные действительные числа, согласно соотношениям (1.5), (3.1) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} &s_2F_2 - s_3F_3 = 0, \quad s_3F_2 + s_2F_3 = 0 \\ &s_2 = \cos\omega b - \cos\omega a, \quad s_3 = \sin\omega b - \sin\omega a \end{aligned} \tag{3.2}$$

Определитель системы (3.2) относительно F_2, F_3 отличен от нуля, следовательно $F_2 = F_3 = 0$. Таким образом, главный вектор сил в сечении стержня при деформации вида (1.4) одинаков для всех сечений $x_3 = \text{const}$ и направлен по оси X_3. Теперь вычислим главный момент $\mathbf{M}$ сил в сечении $x_3 = \text{const}$ относительно некоторой точки на прямой $X_2 = X_3 = 0$. Так как главный вектор параллелен указанной прямой, момент не зависит от выбора точки приведения на оси X_1, что позволяет вычислять момент относительно точки $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Учитывая, что $F_2 = F_3 = 0$, при помощи соотношений (1,4), (1.5) находим

$$\mathbf{M}(x_3) = -\iint[\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D} \times (u_2\mathbf{j}_2 + u_3\mathbf{j}_3 + u_1\mathbf{i}_1 + lx_3\mathbf{i}_1)]d\sigma = M_1\mathbf{i}_1 + M_2\mathbf{j}_2 + M_3\mathbf{j}_3 \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \iint(D_{33}u_2 - D_{32}u_3)d\sigma, \quad M_2 = \iint(D_{31}u_3 - D_{33}u_1)d\sigma, \\ M_3 &= \iint(D_{32}u_1 - D_{31}u_2)d\sigma \end{aligned} \tag{3.4}$$

Согласно выражениям (3.4) величины $M_k (k = 1, 2, 3)$ постоянны. Из условия баланса моментов всех сил, приложенных к участку цилиндра, заключенному между плоскостями $x_3 = a$ и $x_3 = b$, получим

$$s_2M_2 - s_3M_3 = 0, \quad s_3M_2 + s_2M_3 = 0,$$

откуда вытекает, что $M_2 = M_3 = 0$.

Итак, доказано, что реализация деформации (1.4) требует приложения к торцам цилиндра системы сил, статически эквивалентной силе F_1 и моменту M_1, действующим в точке оси винтовой линии, в которую превращается после деформации образующая цилиндра, и направленным вдоль этой оси. После решения двумерной краевой задачи на сечении, сформулированной в разд. 2, сила и момент становятся известными функциями параметров ω и l:

$$F_1 = F(\omega, l), \quad M_1 = M(\omega, l) \tag{3.5}$$

Обращение функций F и M позволяет определить параметры ω и l по заданным значениям силы F_1 и момента M_1. Функции (3.5) обладают следующим свойством:

$$\partial F/\partial\omega = \partial M/\partial l \tag{3.6}$$

для доказательства которого рассмотрим функционал П погонной (т.е. рассчитанной на единицу длины) потенциальной энергии деформации упругого бруса, вычисленный из решения $u_k(x_1, x_2, \omega, l)$ двумерной краевой задачи (1.7), (2.2), (2.3), (2.5)

$$\Pi(\omega, l) = \iint W[u_k(x_1, x_2, \omega, l); \omega, l]d\sigma \tag{3.7}$$

Учитывая формулы

$$\partial\mathbf{j}_2/\partial\omega = x_3\mathbf{j}_3, \quad \partial\mathbf{j}_3/\partial\omega = -x_3\mathbf{j}_2, \quad \partial\mathbf{j}_2/\partial l = \partial\mathbf{j}_3/\partial l = 0$$

и соотношения, вытекающие из симметричности тензора напряжений Кирхгофа

$$C_{ks}D_{kn} = C_{kn}D_{ks}$$

на основании соотношений (1.2), (1.5), (1.6), (3.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial\omega} &= \iint D_{mn}\frac{\partial C_{mn}}{\partial\omega}d\sigma = \iint(D_{33}u_2 - D_{32}u_3)d\sigma + \\ &+ \iint\left[D_{1k}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial\omega}\right) + D_{2k}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial\omega}\right) - \omega D_{32}\frac{\partial u_3}{\partial\omega} + \omega D_{33}\frac{\partial u_2}{\partial\omega}\right]d\sigma \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial l} &= \iint D_{mn}\frac{\partial C_{mn}}{\partial l}d\sigma = \iint D_{31}d\sigma + \\ &+ \iint\left[D_{1k}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial l}\right) + D_{2k}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial l}\right) - \omega D_{32}\frac{\partial u_3}{\partial l} + \omega D_{33}\frac{\partial u_2}{\partial l}\right]d\sigma \end{aligned} \tag{3.9}$$

Интегрируя по частям и применяя формулу Грина, нетрудно проверить, что второй интеграл в правой части равенства (3.8) и второй интеграл в правой части равенства (3.9) обращаются в нуль в силу уравнений равновесия (1.7) и граничных условий (2.5). Сославшись на формулы (3.1), (3.4), получаем

$$F_1 = \partial\Pi(\omega, l)/\partial l, \quad M_1 = \partial\Pi(\omega, l)/\partial\omega \tag{3.10}$$

откуда вытекают соотношения (3.6).

4. Вариационные постановки двумерной задачи. Сформулированная в разд. 2 двумерная нелинейная краевая задача для области в форме поперечного сечения бруса допускает различные вариационные постановки, вытекающие из вариационных принципов нелинейной теории упругости [6]. Ниже приводятся выражения нескольких функционалов, условия стационарности которых эквивалентны двумерной краевой задаче, описывающей пространственный изгиб призматических тел. Отметим, что эти функционалы по сравнению с аналогичными функционалами общей трехмерной теории [6] имеют особенности, обусловленные специальным видом деформации пространственного изгиба (1.4).

Функционал типа Лагранжа

$$\Pi_1[u_k] = \iint W(u_k)d\sigma \tag{4.1}$$

Функционал Π_1 определен на множестве дважды дифференцируемых в области σ функций двух переменных $u_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2, 3$), задающих согласно соотношениям (1.4) поле перемещений упругого цилиндра. Удельная энергия деформации $W(\mathbf{G})$ предполагается выраженной через функции u_k при помощи соотношений (1.5). Условие стационарности функционала (4.1): $\delta\Pi_1 = 0$ эквивалентно уравнениям равновесия (1.7) и граничным условиям (2.5), в которых напряжения D_{sk} выражены через функции u_k.

Функционал типа Ху–Васидзу

$$\begin{aligned}&\Pi_2[C_{\alpha k}, C_{32}, C_{33}, D_{\alpha k}, D_{32}, D_{33}, u_k] = \\ &= \iint[W(C_{\alpha k}, C_{32}, C_{33}) - D_{\alpha k}(C_{\alpha k} - u_{k,\alpha}) - D_{32}(C_{32} + \omega u_3) - D_{33}(C_{33} - \omega u_2)]d\sigma\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь и ниже $\alpha = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$.

В функционале Π_2 независимо варьируются непрерывно дифференцируемые компоненты градиента деформации, компоненты напряжений Пиолы и функции u_k. Уравнения Эйлера вариационной задачи $\delta\Pi_2 = 0$ состоят из уравнений равновесия (1.7), геометрических соотношений (1.5) и определяющих соотношений материала в форме

$$D_{\alpha k} = \partial W/\partial C_{\alpha k}, \quad D_{32} = \partial W/\partial C_{32}, \quad D_{33} = \partial W/\partial C_{33} \tag{4.3}$$

Условия (2.5) служат естественными краевыми условиями для функционала (4.2).

Функционал типа Тонти

$$\begin{aligned}&\Pi_3[C_{\alpha k}, C_{32}, C_{33}, \Phi, \Phi_{12}, \Phi_{22}, \Phi_{13}, \Phi_{23}, B_1, B_2, \ldots, B_N] = \\ &= \iint[\Phi_{,2}C_{11} + \omega\Phi_{12}C_{12} + \omega\Phi_{13}C_{13} - \Phi_{,1}C_{21} + \omega\Phi_{22}C_{22} + \omega\Phi_{23}C_{23} - \\ &- (\Phi_{13,1} + \Phi_{23,2})C_{32} + (\Phi_{12,1} + \Phi_{22,2})C_{33} - W(C_{\alpha k}, C_{32}, C_{33})]d\sigma\end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь к сравнению допускаются дифференцируемые компоненты тензора $\mathbf{C}$ и дифференцируемые функции напряжений, удовлетворяющие условиям ($t = 1, 2, \ldots, N$)

$$\Phi|_{\gamma_0} = 0, \quad \Phi|_{\gamma_t} = B_t, \quad n_\alpha\Phi_{\alpha 2}|_{\partial\sigma} = n_\alpha\Phi_{\alpha 3}|_{\partial\sigma} = 0 \tag{4.5}$$

Постоянные B_t заранее не заданы и подлежат варьированию. Следствиями стационарности функционала Π_3 являются уравнения совместности (2.4), определяющие соотношения (4.3), в которых напряжения выражены по формулам (2.12), и интегральные соотношения (2.14).

Функционал типа Кастильяно

$$\begin{aligned}&\Pi_4[D_{31}, \Phi, \Phi_{12}, \Phi_{22}, \Phi_{13}, \Phi_{23}, B_1, B_2, \ldots, B_N] = \\ &= \iint[V(D_{31}, \Phi, \Phi_{12}, \Phi_{22}, \Phi_{13}, \Phi_{23}) - lD_{31}]d\sigma\end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь V – удельная дополнительная энергия упругого материала, являющаяся функцией тензора напряжений Пиолы и связанная с удельной потенциальной энергией деформации W преобразованием Лежандра

$$V(\mathbf{D}) = \operatorname{tr}[\mathbf{C}^T(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}] - W(\mathbf{D}), \quad \mathbf{C}(\mathbf{D}) = dV/d\mathbf{D}$$

Способ определения зависимости $\mathbf{C}(\mathbf{D})$, необходимой для построения функции $V(\mathbf{D})$, описан выше, в разд. 2.

В соотношении (4.6) использовано представление (2.12) тензора Пиолы через функции напряжений, тождественно удовлетворяющее уравнениям равновесия (1.7). Допустимые функции напряжений должны быть дифференцируемыми и удовлетворять условиям (4.5). Условия стационарности функционала Π_4 состоят из уравнений совместности (2.4), выраженных через функции напряжений, соотношения $l = \partial V/\partial D_{31}$ и интегральных соотношений (2.14).

Функционал типа Рейсснера

$$\Pi_5[u_k, D_{mn}] = \iint[D_{\alpha k}u_{k,\alpha} + lD_{31} - \omega D_{32}u_3 + \omega D_{33}u_2 - V(D_{mn})]d\sigma \tag{4.7}$$

Функционал (4.7) определен на множестве дифференцируемых в области σ функций $u_k(x_1, x_2)$, $D_{mn}(x_1, x_2)$. Из условия стационарности $\delta\Pi_5 = 0$ вытекают уравнения равновесия (1.7), граничные условия (2.5) и определяющие соотношения упругого материала в следующей форме:

$$u_{k,\alpha} = \partial V/\partial D_{\alpha k}, \quad l = \partial V/\partial D_{31}, \quad \omega u_3 = -\partial V/\partial D_{32}, \quad \omega u_2 = \partial V/\partial D_{33}$$

Приведенные вариационные постановки можно использовать при решении нелинейной двумерной задачи на сечении призмы, испытывающей пространственный изгиб, методами Ритца или конечных элементов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00529).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Зеленина А.А., Зубов Л.М.* Нелинейная теория чистого изгиба призматических упругих тел // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 416–423.
3. *Зубов Л.М.* Теория кручения призматических стержней при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 827–831.
4. *Zubov L.M., Bogachkova L.U.* The theory of torsion of elastic noncircular cylinders under large deformations // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62. № 2. P. 373–379.
5. *Зубов Л.М.* О представлении градиента перемещения изотропного упругого тела через тензор напряжений Пиола // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1070–1077.
6. *Зубов Л.М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 406–410.

Ростов-на-Дону
e-mail: zubov@math.rsu.ru

Поступила в редакцию
24.XII.2002