УДК 539.3

© 2004 г. О. Д. Пряхина, А. В. Смирнова

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Метод определения динамических характеристик многослойных полуограниченных сред, использующий специальное представление решения для одного слоя и применимый для произвольного количества слоев [1], обобщается на случай сред с дефектами типа трещин-полостей на линиях раздела слоев. Получены функционально-матричные соотношения, позволяющие выписать систему интегральных уравнений, связывающую скачки перемещений и напряжений на берегах трещин. Для некоторых частных типов сред приведены примеры использования указанных соотношений.

При исследовании динамических режимов колебаний слоистых полуограниченных сред большое значение имеет вид функционально-матричных соотношений, являющихся основой построения интегральных уравнений и их систем, связывающих перемещения и напряжения. Основные трудности численной реализации имеющихся методов решения задач для многослойных сред обусловлены наличием растущих экспоненциальных составляющих в фундаментальных решениях соответствующих систем дифференциальных уравнений, приводящих к неустойчивости численных процедур решения краевой задачи и к плохой обусловленности линейных алгебраических систем, возникающих при удовлетворении граничных условий. Все эти подходы требуют решения систем уравнений большого порядка, и чем больше количество слоёв, тем больше возникает трудностей вычислительного характера. Для их преодоления разработан ряд приемов, обзор которых и сравнительный анализ приведены в [1–4]. Например, был предложен [2, 5] метод, устойчивость которого обеспечивается выделением экспоненциальных составляющих и вынесением их за рамки вычислительного процесса. Были построены решения для многослойных сред в задачах статики [6].

Однако нельзя считать, что этим сняты все вопросы и оптимальные алгоритмы разработаны для всего спектра изменения параметров задачи.

Использование указанных подходов существенно усложняется или становится невозможным при описании динамического поведения упругих полуограниченных неоднородных сред, содержащих дефекты типа трещин или включений. Вместе с тем актуальность исследования задач в такой постановке продиктована их практической значимостью в сейсмологии, сейсморазведке, дефектоскопии, электронике и других областях.

Ранее были приведены новые постановки такого рода задач и дана классификация неоднородностей, предложен метод решения, а также впервые установлены условия локализации вибрационного процесса системой трещин и (или) включений [7, 8].

Ниже предлагается эффективный аналитический метод построения решения динамических задач для слоистых сред при наличии разрывных условий на линиях раздела слоев. Метод основан на использовании специального представления решения для одного слоя и применим для произвольного количества слоев и расположения неоднородностей. Достоинство этого метода – возможность построения простых алгоритмов численного анализа, применимых для широкого диапазона изменения параметров задачи. В отличие от имеющихся подходов он не требует численного решения алгебраических систем большого порядка, возникающих при удовлетворении граничных условий, и не содержит в полученном представлении решения растущих экспоненциальных составляющих. При этом решение задачи для однородной полуограниченной среды (слой, полупространство), содержащей систему плоских, параллельно-ориентированных трещин-полостей получается как частный случай, если принять физико-механические параметры слоев равными.

1. Колебания пакета слоев. Пусть среда представляет собой пакет из N плоскопараллельных слоев толщины $H = 2(h_1 + h_2 + \ldots + h_N)$ с жестко защемленной нижней гранью и занимает область $-H \le z \le 0$, $-\infty \le x, y \le +\infty$ (h_k – полутолщина k-го слоя). Поверхность среды подвергается некоторому динамическому воздействию, характеризуемому вектором $\mathbf{t}_0(x, y, t)$, имеющим своими компонентами касательные t_{10}, t_{20} и нормальные t_{30} напряжения.

Введем локальную систему координат для каждого слоя

$$z_k = z + 2\sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

Тогда решение для k-го слоя в трансформантах Фурье (для гармонической задачи) или Фурье-Лапласа (для нестационарной задачи) будет определяться выражением [3, 9]

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \frac{1}{\mu_k}[\mathbf{B}_+(z_k)\mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{T}_k], \quad -h_k \le z_k \le h_k \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{T}_0 = LF\mathbf{t}_0, \quad \mathbf{T}_k = LF\mathbf{t}_k, \quad \mathbf{W}_k = LF\mathbf{w}_k$$

μ_k – модуль сдвига k-го слоя, F – оператор двумерного преобразования Фурье по переменным x, y, L – оператор Лапласа по времени t, $\mathbf{t}_k = \{t_{1k}, t_{2k}, t_{3k}\}$ – векторы напряжений, характеризующие взаимодействие между слоями, $\mathbf{w}_k = \{w_{1k}, w_{2k}, w_{3k}\}$ – вектор, компоненты которого – горизонтальные w_{1k}, w_{2k} и вертикальные w_{3k} смещения точек k-го слоя.

Предположим, что на линиях раздела слоев имеют место разрывные граничные условия для перемещений. Выпишем условие на нижней грани пакета слоев

$$\mathbf{W}_N(-h_N) = 0 \tag{1.2}$$

и условия стыковки слоев

$$\mathbf{W}_k(-h_k) = \mathbf{W}_{k+1}(h_{k+1}) + \mathbf{f}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{f}_k\{f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}\}$ – вектор скачка перемещений на линии раздела слоев.

Условие (1.3) при учете выражения (1.1) приводит к рекуррентному соотношению, связывающему характеристики напряженно-деформированного состояния слоев с параметрами их контактного взаимодействия

$$\begin{gathered}\mathbf{B}_+(-h_k)\mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{B}_-(-h_k)\mathbf{T}_k = g_k[\mathbf{B}_+(h_{k+1})\mathbf{T}_k + \mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{T}_{k+1}] + \mu_k\mathbf{f}_k \\ g_k = \mu_k/\mu_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1\end{gathered} \tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение векторы Λ_k и матрицы $\mathbf{F}_k$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{D}_{k+1}\mathbf{\Lambda}_{k+1} + \mu_k\mathbf{f}_k, \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{B}_-(-h_k) - g_k\mathbf{B}_+(h_{k+1}) - \mathbf{D}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1} \tag{1.5}$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$\mathbf{\Lambda}_N = 0, \quad \mathbf{F}_N = \mathbf{B}_-(-h_N)$$

Здесь

$$\mathbf{G}_k = -\mathbf{B}_+(-h_k), \quad \mathbf{D}_{k+1} = g_k\mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{F}_{k+1}^{-1}$$

Из условия (1.2) определим

$$\mathbf{F}_N\mathbf{T}_N = \mathbf{G}_N\mathbf{T}_{N-1} \tag{1.6}$$

Тогда рекуррентные соотношения (1.4) для определения векторов напряжений между слоями при учете равенства (1.6) и обозначений (1.5) запишем в виде

$$\mathbf{F}_k\mathbf{T}_k = \mathbf{G}_k\mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{\Lambda}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

Используя последние соотношения, полагая последовательно $k = 1, 2, \ldots, N$, определим усилия, действующие на k-й слой $\mathbf{T}_k$ через поверхностную нагрузку $\mathbf{T}_0$ и скачки перемещений $\mathbf{f}_k$

$$\mathbf{T}_k = \prod_{i=k}^{1}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{T}_0 + \sum_{m=1}^{k}\prod_{i=k}^{m}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{G}_m^{-1}\mathbf{\Lambda}_m, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.7}$$

Матрицы $\mathbf{\Lambda}_k$ задаются формулами (1.5).

Подставляя найденные выражения для усилий (1.7) в (1.1), определим смещения точек среды в k-м слое

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \frac{1}{\mu_k}((\mathbf{B}_+(z_k) + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{G}_k)\mathbf{\Pi}_k + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{\Lambda}_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.8}$$

где

$$\mathbf{\Pi}_k = \prod_{i=k-1}^{1}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{T}_0 + \sum_{m=1}^{k-1}\prod_{i=k-1}^{m}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{G}_m^{-1}\mathbf{\Lambda}_m$$

Если поверхность свободна от усилий, то

$$\mathbf{T}_k = \sum_{m=1}^{k}\left(\prod_{i=k}^{m}\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i\right)\mathbf{G}_m^{-1}\mathbf{\Lambda}_m$$

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \frac{1}{\mu_k}\left((\mathbf{B}_+(z_k) + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{G}_k)\sum_{m=1}^{k-1}\prod_{i=k-1}^{m}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{G}_m^{-1}\mathbf{\Lambda}_m + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{\Lambda}_k\right)$$

Соотношения (1.7) позволяют построить систему интегральных уравнений, связывающих перемещения и напряжения берегов трещин, расположенных на стыке слоев, в сечениях этих трещин.

Полагая в соотношениях (1.7), (1.8) $\mathbf{f}_k = 0$, приходим к случаю идеального контакта между слоями

$$\mathbf{T}_k = \prod_{i=k}^{1}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)\mathbf{T}_0, \quad \mathbf{W}_k(z_k) = \frac{1}{\mu_k}\mathbf{K}(z_k)T_0$$

Матрица-функция

$$\mathbf{K}(z_k) = (\mathbf{B}_+(z_k) + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{G}_k)\prod_{i=k-1}^{1}(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i)$$

является матрицей-символом Грина соответствующей динамической задачи.

Матрицы-функции $\mathbf{B}_{\pm}(z)$ для разных типов сред (упругих, электроупругих, анизотропных, термоупругих, термоэлектроупругих) имеют различную структуру и приведены ранее [3]. Например, для анизотропного слоя в случае гармонической задачи

$$\mathbf{B}_{\pm}(z) = \begin{Vmatrix} \alpha^2 m_1^{\pm} + \beta^2 n^{\pm} & \alpha\beta(m_1^{\pm} - n^{\pm}) & \pm i\alpha m_2^{\pm} \\ \alpha\beta(m_1^{\pm} - n^{\pm}) & \beta^2 m_1^{\pm} + \alpha^2 n^{\pm} & \pm i\beta m_2^{\pm} \\ -i\alpha k_1^{\pm} & -i\beta k_1^{\pm} & \pm k_2^{\pm} \end{Vmatrix} \tag{1.9}$$

$$m_i^{\pm} = M_i^- \pm M_i^+, \quad n^{\pm} = N^- \pm N^+, \quad k_i^{\pm} = K_i^- \pm K_i^+; \quad i = 1, 2$$

Элементы K_i^-, M_i^-, N^-, Δ^- отвечают кососимметричной задаче для одного слоя и получаются из соответствующих элементов K_i^+, M_i^+, N^+, Δ^+ симметричной задачи заменой sh $\leftrightarrow$ ch.

В частном случае изотропной среды

$$M_1^+ = \sigma_2[\gamma c_2(z) - \lambda^2 c_1(z)]/(\lambda^2\Delta^+), \quad M_2^+ = [\sigma_1\sigma_2 t_1 c_2(z) - \gamma t_2 c_1(z)]/\Delta^+$$

$$K_1^+ = [\sigma_1\sigma_2 s_1(z) - \gamma s_2(z)]/\Delta^+, \quad N^+ = \operatorname{ch}\sigma_2 z/(2\lambda^2\sigma_2 \operatorname{sh}\sigma_2 h)$$

$$\begin{aligned} &K_2^+ = \sigma_1[\gamma s_1(z) t_2 - \lambda^2 t_1 s_2(z)]/\Delta^+, \quad \Delta^+ = 4(\gamma^2 t_2 - \lambda^2\sigma_1\sigma_2 t_1) \\ &s_i(z) = \operatorname{sh}\sigma_i z/\operatorname{ch}\sigma_i h, \quad c_i(z) = \operatorname{ch}\sigma_i z/\operatorname{ch}\sigma_i h, \quad t_i = \operatorname{th}\sigma_i h; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\gamma = \lambda^2 - \Omega^2/2, \quad \Omega^2 = \rho\omega^2 a^2/\mu, \quad \lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\sigma_2^2 = \lambda^2 - \Omega^2, \quad \sigma_1^2 = \lambda^2 - \varepsilon\Omega^2, \quad \varepsilon = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$$

где σ_j – корни характеристического уравнения задачи для одного слоя, Ω – приведенная частота колебаний, a – характерный линейный размер (например, области действия поверхностной нагрузки), ρ – плотность, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона для конкретного слоя, занимающего область ($|z| \le h$, $-\infty < x, y, < \infty$), α, β – параметры преобразования Фурье.

Отметим, что при вычислении элементов матриц $\mathbf{B}_{\pm}(z_k)$ в формулах (1.10) необходимо брать соответствующие параметры k-го слоя (μ_k, ρ_k, ν_k, h_k).

Приведем примеры использования рекуррентных соотношений для некоторых частных случаев

1°. При $N = 1$ из выражений (1.7), (1.8) следует

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0, \quad \mathbf{W}_1(z_1) = \frac{1}{\mu_1}(\mathbf{B}_+(z_1) + \mathbf{B}_-(z_1)\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1)\mathbf{T}_0, \quad z_1 = z + h_1$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{B}_-(-h_1), \quad \mathbf{\Lambda}_1 = 0$$

что соответствует задаче о колебаниях слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием.

2°. При $N = 2$ из равенства (1.7) получим выражения для напряжений

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{\Lambda}_1), \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{G}_2\mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{\Lambda}_1) \tag{1.11}$$

а из равенства (1.8) – для перемещений в верхнем слое

$$\mathbf{W}_1(z_1) = \frac{1}{\mu_1}((\mathbf{B}_+(z_1) + \mathbf{B}_-(z_1)\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1)\mathbf{T}_0 + \mathbf{B}_-(z_1)\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{\Lambda}_1), \quad z_1 = z + h_1 \tag{1.12}$$

и в нижнем слое

$$\mathbf{W}_2(z_2) = \frac{1}{\mu_2}(\mathbf{B}_+(z_2) + \mathbf{B}_-(z_2)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{G}_2)\mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{\Lambda}_1), \quad z_2 = z + 2h_1 + h_2 \tag{1.13}$$

В этом случае

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{B}_-(-h_1) - g_1\mathbf{B}_+(h_2) - g_1\mathbf{B}_-(h_2)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{G}_2, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{B}_-(-h_2), \quad \mathbf{\Lambda}_1 = \mu_1\mathbf{f}_1$$

3°. При $N = 3$ для трехслойного основания приведем формулы для перемещений. Перемещения точек верхнего слоя описываются формулой (1.12), перемещения точек второго слоя – формулой (1.13) с добавлением к правой ее части слагаемого $\mathbf{B}_-(z_2)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{\Lambda}_2$, а перемещения точек третьего слоя описываются соотношением

$$\mathbf{W}_3(z_3) = \frac{1}{\mu_3}((\mathbf{B}_+(z_3) + \mathbf{B}_-(z_3)\mathbf{F}_3^{-1}\mathbf{G}_3)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{G}_2\mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{\Lambda}_1) +$$

$$+ (\mathbf{B}_+(z_3) + \mathbf{B}_-(z_3)\mathbf{F}_3^{-1}\mathbf{G}_3)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{\Lambda}_2), \quad z_3 = z + 2h_1 + 2h_2 + h_3$$

При этом общий вид матрицы $\mathbf{F}_1$ совпадает с видом аналогичной матрицы, приведенной для случая 2°, а

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{B}_-(-h_2) - g_2\mathbf{B}_+(h_3) - g_2\mathbf{B}_-(h_3)\mathbf{F}_3^{-1}\mathbf{G}_3, \quad \mathbf{F}_3 = \mathbf{B}_-(-h_3)$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \mu_1\mathbf{f}_1 + \mathbf{D}_2\mu_2\mathbf{f}_2, \quad \Lambda_2 = \mu_2\mathbf{f}_2$$

2. Колебания слоистого полупространства. Решение задачи о многослойной среде, жестко сцепленной с упругим полупространством, легко получить, устремив толщину нижнего слоя ($k = N$) к бесконечности, заменив при этом систему координат: $z^* = z_N - h_N$. В результате предельного перехода получим

$$\mathbf{F}_{N-1} = \mathbf{B}_-(-h_{N-1}) - g_{N-1}\mathbf{B}_+^{\infty}(0)$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{B}_-(-h_k) - g_k\mathbf{B}_+(h_{k+1}) - \mathbf{D}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-2$$

Напряжения, действующие на стыке слоев, получим в виде (1.7), где $k = 1, 2, \ldots, N-1$, а $\mathbf{T}_N = 0$. Для расчета перемещений произвольной точки среды имеем

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \frac{1}{\mu_k}((\mathbf{B}_+(z_k) + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{G}_k)\mathbf{\Pi}_k + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{\Lambda}_k) \tag{2.1}$$

$$z_k = z + 2\sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$\mathbf{W}_N(z^*) = \frac{1}{\mu_N}\mathbf{B}_+^{\infty}(z^*)\mathbf{\Pi}_N, \quad z^* = z + 2\sum_{i=1}^{N-1} h_i$$

Вид Π_k приведен выше.

Поскольку при $h_N \to \infty$ имеем

$$m_i^- = n^- = k_i^- = 0, \quad m_i^+ = 2M_i^+ = m_i^0, \quad n^+ = 2N^+ = n^0, \quad k_i^+ = 2K_i^+ = k_i^0$$

то

$$\mathbf{B}_-^\infty(z^*) \equiv 0, \quad \mathbf{B}_+^\infty(z^*) = \lim_{h_N \to \infty} \mathbf{B}_+(z_N) = \lim_{h_N \to \infty} \mathbf{B}_+(z^* + h_N) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \alpha^2 m_1^0 + \beta^2 n^0 & \alpha\beta(m_1^0 - n^0) & \pm i\alpha m_2^0 \\ \alpha\beta(m_1^0 - n^0) & \beta^2 m_1^0 + \alpha^2 n^0 & \pm i\beta m_2^0 \\ -i\alpha k_1^0 & -i\beta k_1^0 & \pm k_2^0 \end{matrix} \right\|$$

Если подстилающее полупространство изотропно, величины, фигурирующие в матрице $\mathbf{B}_+^\infty(z)$, имеют вид

$$m_1^0 = 2\sigma_2(-\lambda^2 e^{\sigma_1 z} + \gamma e^{\sigma_2 z})/(\lambda^2 \Delta), \quad n^0 = e^{\sigma_2 z}/(\lambda^2 \sigma_2)$$

$$m_2^0 = 2(-\gamma \mathbf{e}^{\sigma_1 z} + \sigma_1 \sigma_2 e^{\sigma_2 z})/\Delta$$

$$k_1^0 = 2(-\gamma e^{\sigma_2 z} + \sigma_1 \sigma_2 e^{\sigma_1 z})/\Delta, \quad k_2^0 = 2\sigma_1(-\lambda^2 e^{\sigma_2 z} + \gamma e^{\sigma_1 z})/\Delta$$

$$\Delta = 4(\gamma^2 - \lambda^2 \sigma_1 \sigma_2), \quad \sigma_i^2 = \lambda^2 - \Omega_i^2, \quad i = 1, 2, \ \gamma = \lambda^2 - \Omega_2^2/2$$

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^2(1 - 2\nu_N)/(2 - 2\nu_N), \quad \Omega_2^2 = \rho_N \omega^2 a^2/\mu_N$$

(ρ_N, μ_N, ν_N – плотность, модуль сдвига и коэффициент Пуассона полупространства).

Из приведенных выше формул видно, что в случае слоистого полупространства выполняется условие $\mathbf{W}(z) \to 0$, $z \to -\infty$.

В частности, для однородного полупространства получаем простую формулу

$$\mathbf{W}(z) = \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_+^\infty(z) \mathbf{T}_0 \quad (z \le 0)$$

Для слоя, жестко сцепленного с полупространством, напряжения $\mathbf{T}_1$ на линии раздела слоя и полупространства имеют вид (1.11), а перемещения в слое ($-2h_1 \le z \le 0$) – вид (1.12), однако в данном случае

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{B}_-(-h_1) - g_1 \mathbf{B}_+^\infty(0)$$

Перемещения в полупространстве ($z \le -2h_1$) будут описываться выражением

$$\mathbf{W}_2(z) = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_+^\infty(z + 2h_1) \mathbf{F}_1^{-1}(-\mathbf{B}_+(-h_1)\mathbf{T}_0 + \mu_1 \mathbf{f}_1)$$

Применив обратное преобразование Фурье к соотношению (1.8), получим интегральное представление решения для гармонической задачи (множитель $e^{-i\omega t}$ опущен)

$$\mathbf{w}(x, y, z, \omega) \equiv \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(z) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \tag{2.2}$$

$$\mathbf{W}(z) \equiv \mathbf{W}(\alpha, \beta, z_k, \omega), \quad z = z_k - 2\sum_{i=1}^{k-1} h_i - h_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

Для нестационарной задачи необходимо в равенстве (2.2) положить $\omega = ip$ (p – параметр преобразования Лапласа) и применить обратное преобразование Лапласа. Было показано [3, 10], что решение нестационарной задачи также можно представить в виде

$$\mathbf{w}(x, y, z, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\mathbf{w}(x, y, z, \omega)]\cos(\omega t)d\omega$$

Замечание. Предположим, что необходимо определить смещения точек среды на глубине $z = z_0$. Тогда, если

$$2\sum_{i=1}^{s-1} h_i < |z_0| \le 2\sum_{i=1}^{s} h_i$$

то при численных расчетах в выражениях (1.8) или (2.1) следует полагать $k = s$ ($s \le N$).

3. Колебания слоя, полупространства с дефектами. Решение задачи для однородной полуограниченной среды (слоя или полупространства), содержащей $N - 1$ плоских, параллельно-ориентированных полостей или трещин, описывается функционально-матричными соотношениями для напряжений (1.7) и перемещений (1.8), (2.1), в которых следует полагать физико-механические параметры равными для всех k ($k = 1, 2, \ldots, N$).

Так, полагая $\mu_{1,2} = \mu$, $\rho_{1,2} = \rho$, $\nu_{1,2} = \nu$, $h_{1,2} = h$, получим из соотношений (1.7) при $\mathbf{T}_0 = 0$ и $N = 2$ решение гармонической пространственной задачи для одной трещины, расположенной в однородном слое толщины $H = 4h$ на одинаковом расстоянии $2h$ от его границ,

$$\mathbf{T}_1 = \mu\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{f}_1 \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{B}_-(-h) - \mathbf{B}_+(h) + \mathbf{B}_-(h)\mathbf{B}_-^{-1}(-h)\mathbf{B}_+(-h)$$

$$\mathbf{f}_1(\alpha, \beta, \Omega) = \Delta\mathbf{W}(\alpha, \beta, \Omega)$$

$$\Delta\mathbf{W} = \mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-, \quad \mathbf{W}^+ = \mathbf{W}_1(-h_1) = \mathbf{W}(-h), \quad \mathbf{W}^- = \mathbf{W}_2(h_2) = \mathbf{W}(h)$$

При этом предполагается, что берега трещин не взаимодействуют и напряжения на этих берегах равны $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}^+ = \mathbf{T}^-$ (т.е. имеются статические напряжения, “распирающие” берега трещины).

Функционально-матричное соотношение (3.1) позволяет выписать систему интегральных уравнений относительно скачка перемещений $\Delta\mathbf{w}(x, y)$ на берегах трещины

$$\iint_S \mathbf{k}(x-\xi, y-\eta)\Delta\mathbf{w}(\xi, \eta)d\xi d\eta = \frac{\mathbf{t}_1}{\mu} \quad (x, y) \in S$$

$$\mathbf{k}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\delta_1}\int_{\delta_2}\mathbf{F}_1^{-1}(\alpha, \beta, \Omega)e^{-i(\alpha x + \beta y)}d\alpha d\beta$$

где δ_1, δ_2 – контуры интегрирования, правила выбора которых приведены ранее [11], S – область, занимаемая трещиной.

Дальнейшее решение этой системы предполагает использование метода фиктивного поглощения, метода факторизации или численных методов [2, 3, 11].

Таким образом, предлагаемый подход позволяет моделировать любое сочетание непрерывных и разрывных условий на границах раздела слоев. Кроме того, преимуществом использования такого представления для каждого слоя является возможность исследовать среды с произвольным количеством слоев, каждый из которых может обладать сложными физико-механическими свойствами.

Авторы благодарят В.А. Бабешко, инициировавшего данную работу, за обсуждение и помощь при ее выполнении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00694, 03-01-96537, 03-01-96645), Минобразования России (Е-02-4.0-191) и Федеральной целевой программы “Интеграция” (Б0121), гранта Президента Российской Федерации (НШ-2107.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aki K., Richards P., Quantitative Seismology.* Theory and Methods. V. 1. San Francisco: Freeman, 1980 = *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 632 с.
2. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
3. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
4. *Молотков Л.А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.
5. *Бабешко В.А., Сыромятников П.В.* Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 35–47.
6. *Приварников А.К.* Пространственная деформация многослойного основания // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1973. С. 27–45.
7. *Бабешко В.А.* Среды с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
8. *Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Доклады РАН, 2002. Т. 382, № 5. С. 625–628.
9. *Пряхина О.Д., Фрейгейт М.Р.* О методе расчета динамики массивного штампа на многослойном основании // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 114–122.
10. *Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А.* Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наукова Думка, 1990. 224 с.
11. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.

Краснодар
e-mail: donna@kubsu.ru

Поступила в редакцию
12.V.2003