

УДК 539.3

© 2004 г. **В. П. Мясников¹**, В. М. Садовский

**ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ
РАЗНОПРОЧНЫХ СРЕД**

С помощью реологического метода, дополненного новым элементом – жестким контактом, строятся простейшие феноменологические модели материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. В рамках регуляризованной модели исследуются вопросы разрешимости статических краевых задач при малых деформациях среды. Дается обобщение статической и кинематической теорем теории предельного равновесия. В качестве примера применения этих теорем получена верхняя оценка предельной нагрузки и угла выхода линейной зоны локализации деформаций в задаче о разрыве цилиндрического образца с радиальным надрезом под действием давления на берегах надреза.

1. Математическая модель. Реологические схемы материалов, имеющих различное сопротивление растяжению и сжатию (сыпучих и пористых сред: грунтов, горных пород, бетонов, углеродитов и пр.), строятся с помощью вспомогательного элемента – жесткого контакта [1]. Для простейшей модели, учитывающей связность среды, такая схема изображена на фиг. 1. Под действием сжимающих напряжений или растягивающих напряжений, меньших коэффициента сцепления σ_0 (предела текучести пластического элемента), такая среда не деформируется. Достижение величины σ_0 отвечает предельному равновесию, в котором деформация может быть произвольной положительной величиной. Напряжения выше этого предела невозможны. При монотонном нагружении без разгрузки определяющие соотношения одноосного деформирования приводятся к системе

$$\sigma \leq \sigma_0, \quad \varepsilon \geq 0 \quad (\sigma - \sigma_0)\varepsilon = 0$$

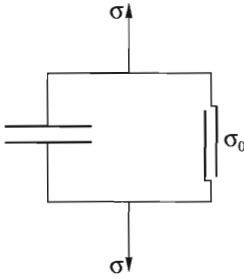
Эта система эквивалентна вариационным неравенствам

$$(\sigma - \sigma_0)(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \leq 0, \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \geq 0; \quad (\tilde{\sigma} - \sigma)\varepsilon \leq 0, \quad \sigma, \tilde{\sigma} \leq \sigma_0$$

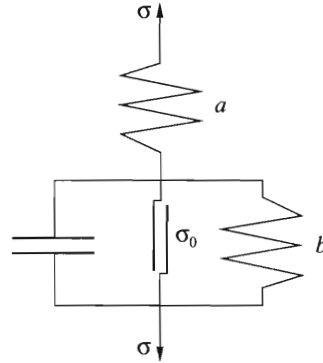
($\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\sigma}$ – варьируемые величины), каждое из которых допускает потенциальное представление

$$\sigma \in \partial\varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon \in \partial\psi(\sigma) \tag{1.1}$$

¹ **Вениамин Петрович Мясников** (1936–2004), академик, крупный ученый в области механики. Директор Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, создатель и первый заведующий кафедрой вычислительной механики механико-математического факультета МГУ, заведующий отделом вычислительной геофизики Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Разработал теорию движения газа при фильтрации через слой зернистого материала в химическом реакторе. Внес существенный вклад в развитие прямых вариационных методов в теории жесткопластичных сред. Автор строгих математических методов в теории конвективных течений и модели конвекции внутри Земли, а также модели переходных слоев, возникающих в процессе эволюции Земли. Предложил новую квазилинейную модификацию закона Гука, в которой модули упругости зависят от инвариантов тензора деформации. Автор принципиально нового подхода к теории пластичности на основе методов теории калибровочных полей. Воспитал многочисленных учеников и последователей. Под его руководством более 30 аспирантов защитили кандидатские диссертации, 5 из его учеников стали докторами наук.



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь $\varphi = \sigma_0 \varepsilon + \delta_C(\varepsilon)$ и $\psi = \delta_K(\sigma - \sigma_0)$ – потенциалы напряжений и деформаций. Символом δ обозначены индикаторные функции, равные нулю на конусах $C = \{\varepsilon \geq 0\}$ и $K = \{\sigma \leq 0\}$ и равные бесконечности вне этих конусов; d служит для обозначения субдифференциала

$$d\varphi(\varepsilon) = \{\sigma | \varphi(\tilde{\varepsilon}) - \varphi(\varepsilon) \geq \sigma(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \quad \forall \tilde{\varepsilon}\}$$

представляющего собой множество угловых коэффициентов линейных функций, графики которых проходят через точку $(\varepsilon, \varphi(\varepsilon))$ и лежат ниже графика функции φ .

Обобщение на случай пространственного напряженно-деформированного состояния строится на основе включений (1.1). Для этого задается симметричный тензор сцепления σ_0 , выпуклый и замкнутый конус C с вершиной в нуле в шестимерном пространстве тензоров деформаций или аналогичный конус K в пространстве тензоров напряжений. Если один из конусов известен, то второй находится как сопряженный:

$$K = \{\sigma | \varepsilon \leq 0 \quad \forall \varepsilon \in C\}, \quad C = \{\varepsilon | \sigma : \varepsilon \leq 0 \quad \forall \sigma \in K\}$$

(двоеточие означает операцию свертки). Конус K и тензор σ_0 должны подчиняться условию $-\sigma_0 \in K$, которое означает допустимость естественного, ненапряженного состояния среды. Потенциалы $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\sigma)$ автоматически получаются путем замены скалярных величин тензорными, а произведения – сверткой. Эти потенциалы являются двойственными выпуклыми функциями, т.е. выражаются друг через друга с помощью преобразования Юнга

$$\varphi(\varepsilon) = \sup_{\sigma} \{\sigma : \varepsilon - \psi(\sigma)\}, \quad \psi(\sigma) = \sup_{\varepsilon} \{\sigma : \varepsilon - \varphi(\varepsilon)\}$$

Определяющие соотношения (1.1), описывающие поведение связной сыпучей среды с жесткими гранулами, в известной степени некорректны: по заданным напряжениям они не позволяют однозначно найти деформированное состояние, а по заданным деформациям – напряженное. Регуляризацией служит модель сыпучей среды с упругими гранулами, реологическая схема которой представлена на фиг. 2.

Пусть a и b – симметричные положительно определенные тензоры четвертого ранга, составленные из модулей упругости регулирующих элементов, d – произвольный пока тензор с такими же свойствами. Если нагружение монотонно, то определяющие соотношения могут быть представлены в виде включений (1.1) с помощью выпуклых и дифференцируемых потенциалов, которые формулируются в терминах проекций тензоров деформаций и напряжений на соответствующие конусы.

Известно [2], что проекция $\pi_d(\varepsilon)$ тензора ε на конус C по норме $|\varepsilon|_d = \sqrt{\varepsilon : d : \varepsilon}$ является единственным решением вариационного неравенства

$$(\varepsilon - \pi_d(\varepsilon)) : d : (\tilde{\varepsilon} - \pi_d(\varepsilon)) \leq 0, \quad \pi_d(\varepsilon), \tilde{\varepsilon} \in C$$

или эквивалентной системы

$$(\varepsilon - \pi_d(\varepsilon)) : d : \pi_d(\varepsilon) = 0 \quad (\varepsilon - \pi_d(\varepsilon)) : d : \tilde{\varepsilon} \leq 0 \quad (1.2)$$

Оказывается, подобно случаю ортогональных подпространств, всякий тензор можно представить в виде суммы его проекций на сопряженные конусы:

$$\varepsilon = \pi_d(\varepsilon) + d^{-1} : \Pi_{d^{-1}}(d : \varepsilon) \quad (1.3)$$

где $\Pi_{d^{-1}}(\sigma)$ – проекция σ на K по норме $|\sigma|_{d^{-1}}$, ассоциированной с обратным тензором d^{-1} .

Действительно, входящее в систему (1.2) неравенство в точности означает, что тензор $\sigma = d : (\varepsilon - \pi_d(\varepsilon))$ принадлежит конусу K , сопряженному к C . Кроме того, в силу системы (1.2) справедливо уравнение

$$\sigma : d^{-1} : (d : \varepsilon - \sigma) = 0$$

а так как $\pi_d(\varepsilon) \in C$, то по определению сопряженного конуса выполняется неравенство

$$\tilde{\sigma} : d^{-1} : (d : \varepsilon - \sigma) \leq 0, \quad \tilde{\sigma} \in K$$

Таким образом, $\sigma = \Pi_{d^{-1}}(d : \varepsilon)$, что согласуется с соотношением (1.3).

С учетом соотношений (1.2) и (1.3) доказывается тождество

$$|\varepsilon|_d^2 = |\pi_d(\varepsilon)|_d^2 + |\varepsilon - \pi_d(\varepsilon)|_d^2 = |\pi_d(\varepsilon)|_d^2 + |\Pi_{d^{-1}}(d : \varepsilon)|_{d^{-1}}^2 \quad (1.4)$$

Заметим, что в более общем случае, когда C – произвольное выпуклое множество, слагаемое

$$|\varepsilon - \pi_d(\varepsilon)|_d^2 = \inf_{\xi \in C} |\varepsilon - \xi|_d^2$$

представляет собой дифференцируемую выпуклую функцию [3], производная которой равна $2d : (\varepsilon - \pi_d(\varepsilon))$. Поэтому функция $|\pi_d(\varepsilon)|_d^2$ также дифференцируема, причем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} |\pi_d(\varepsilon)|_d^2 = 2d : \pi_d(\varepsilon) \quad (1.5)$$

Заметим еще, что проектор на конус положительно однороден, т.е.

$$\pi_d(\lambda \varepsilon) = \lambda \pi_d(\varepsilon), \quad \lambda \geq 0$$

Это вытекает из системы (1.2).

Формулы (1.3), (1.4) позволяют рассматривать только один из конусов, не вычисляя сопряженного к нему в явном виде. В соответствии с реологической схемой (фиг. 2), среда, обладающая упругими свойствами, характеризуется системой

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_b, \quad \sigma = a : \varepsilon_a \quad (\sigma - \sigma_0 - b : \varepsilon_b) : (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_b) \leq 0, \quad \varepsilon_b, \tilde{\varepsilon} \in C$$

Из этой системы следует, что

$$\varepsilon = a^{-1} : \sigma + \pi_b(b^{-1} : (\sigma - \sigma_0)) \quad (1.6)$$

Используя равенство (1.5), можно получить потенциал деформаций

$$\Psi = \frac{1}{2} (|\sigma|_{a^{-1}}^2 + |\pi_b(b^{-1} : (\sigma - \sigma_0))|_b^2) = \frac{1}{2} (|\sigma|_{a^{-1}}^2 + |\sigma - \sigma_0|_{b^{-1}}^2 - |\Pi_{b^{-1}}(\sigma - \sigma_0)|_{b^{-1}}^2) \quad (1.7)$$

В силу тождества (1.4) совпадение нормы тензора и нормы его проекции на конус имеет место только для элементов конуса. Следовательно, потенциал (1.7) равен энергии деформации упругого элемента с тензором коэффициентов a в том и только том случае, когда $\sigma - \sigma_0 \in K$. В пределе при $b \rightarrow 0$ этот потенциал стремится к

$$\Psi_a = |\sigma|_{a^{-1}}^2/2 + \delta_K(\sigma - \sigma_0)$$

а при $a \rightarrow \infty$ он стремится к

$$\Psi_b = |\pi_b(b^{-1} : (\sigma - \sigma_0))|_b^2/2$$

Двойственный потенциал напряжений – преобразование Юнга функции $\psi(\sigma)$ – равен

$$\Phi = \frac{1}{2} \sup_{\sigma} \inf_{\xi \in C} \left\{ 2\sigma : \varepsilon - |\sigma|_{a^{-1}}^2 - |\sigma - \sigma_0|_{b^{-1}}^2 + |\sigma - \sigma_0 - b : \xi|_{b^{-1}}^2 \right\}$$

После перестановки \sup и \inf можно вычислить точную верхнюю грань. Для фиксированного ξ она достигается на тензоре $\sigma = a : (\varepsilon - \xi)$, поэтому

$$\Phi = \frac{1}{2} \inf_{\xi \in C} \{ |\varepsilon - \xi|_a^2 + |\xi|_b^2 + 2\sigma_0 : \xi \}$$

Выделение полного квадрата относительно тензора ξ приводит к равенству

$$\Phi = \frac{1}{2} (|\varepsilon|_a^2 - |a : \varepsilon - \sigma_0|_{a^{-1}}^2) + \frac{1}{2} \inf_{\xi \in C} |d^{-1} : (a : \varepsilon - \sigma_0) - \xi|_d^2$$

где $d = a + b$. Таким образом,

$$\Phi = \frac{1}{2} (|\varepsilon|_a^2 - |\pi_a(d^{-1} : (a : \varepsilon - \sigma_0))|_d^2) = \frac{1}{2} (|\varepsilon|_a^2 - |a : \varepsilon - \sigma_0|_{a^{-1}}^2 + |\Pi_{a^{-1}}(a : \varepsilon - \sigma_0)|_{a^{-1}}^2) \quad (1.8)$$

Согласно равенству (1.8), потенциал напряжений является дифференцируемой функцией. В силу соотношения (1.5)

$$\sigma = a : \{ \varepsilon - \pi_d(d^{-1} : (a : \varepsilon - \sigma_0)) \} \quad (1.9)$$

Предельным переходом по b при $b \rightarrow 0$ можно получить двойственный к $\psi_a(\sigma)$ потенциал напряжений для среды, реологическая схема которой содержит один упругий элемент:

$$\Phi_a = \frac{1}{2} (|\varepsilon|_a^2 - |\pi_a(\varepsilon - a^{-1} : \sigma_0)|_a^2)$$

Аналогично, при $a \rightarrow \infty$ находится двойственный к $\psi_b(\sigma)$ потенциал

$$\Phi_b = |\varepsilon|_b^2/2 + \sigma_0 : \varepsilon + \delta_C(\varepsilon)$$

Замкнутую математическую модель для описания равновесия среды с потенциалами $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\sigma)$ при малых деформациях образуют определяющие уравнения в форме (1.6) или (1.9), дополненные условиями равновесия и геометрическими связями

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad 2\varepsilon(u) = \nabla u + (\nabla u)^* \quad (1.10)$$

Здесь u – вектор перемещений, f – вектор объемных сил. Звездочка означает транспонирование тензора, используются общепринятые обозначения тензорного анализа.

2. Существование решений. Пусть Ω – занятая средой пространственная или плоская область с границей Γ , состоящей из двух непересекающихся частей Γ_u и Γ_σ , на первой из которых отсутствуют перемещения, а на второй задана распределенная нагрузка (v – вектор нормали):

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_u, \quad \sigma \cdot v = q \text{ на } \Gamma_\sigma \quad (2.1)$$

Задача состоит в определении векторного поля $u(x)$ и тензорного поля $\sigma(x)$, удовлетворяющих уравнениям (1.9), (1.10) с граничными условиями (2.1). Предположим, Ω и Γ_σ таковы, что выполняется второе неравенство Корна, например, Ω – ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, а Γ_σ – открытое в Γ множество [2, 4]. Принимая для простоты однотипные обозначения для соответствующих пространств скалярных, векторных и тензорных функций, будем считать, что

$$\sigma_0 \in L_2(\Omega), \quad \nabla \sigma_0, f \in L_2(\Omega), \quad q \in L_2(\Gamma_\sigma), \quad a, b \in L_\infty(\Omega)$$

причем тензорные функции a и b положительно определены равномерно в Ω , т.е. существуют постоянные $a_0 > 0$ и $b_0 > 0$, для которых $|\varepsilon|_a^2 \geq a_0 \varepsilon : \varepsilon$ и $|\varepsilon|_b^2 \geq b_0 \varepsilon : \varepsilon$ почти всюду в области Ω и при любом ε .

В этом случае равномерно положительно определена тензорная функция $a - a : d^{-1} : a \in L_\infty(\Omega)$. Действительно, заданные почти всюду в Ω тензоры коэффициентов a и b образуют линейные преобразования над шестимерным пространством тензоров второго ранга. Матрицы этих преобразований в каждом базисе пространства симметричны и положительно определены. В специальном базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6$ из собственных тензоров вида

$$b : \varepsilon_k = \beta_k a : \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k : a : \varepsilon_k = 1, \quad \varepsilon_j : a : \varepsilon_k = 0 \quad (j \neq k)$$

матрица преобразования a – единичная, а b – диагональная, с положительными собственными числами β_1, \dots, β_6 по главной диагонали. Справедливы легко проверяемые равенства

$$(a - a : d^{-1} : a) : \varepsilon_k = \frac{\beta_k}{1 + \beta_k} a : \varepsilon_k$$

с помощью которых путем разложения произвольного тензора ε по базису доказывается неравенство

$$\varepsilon : (a - a : d^{-1} : a) : \varepsilon \geq \beta_0 |\varepsilon|_a^2 / (1 + \beta_0) \quad (\beta_0 = \min_k \beta_k)$$

позволяющее установить необходимые оценки для потенциалов $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\sigma)$. Так как в силу соотношения (1.8)

$$2\varphi \geq |\varepsilon|_a^2 - |a : \varepsilon - \sigma_0|_{d^{-1}}^2 = |\varepsilon|_a^2 - |a : \varepsilon|_{d^{-1}}^2 + 2\varepsilon : a : d^{-1} : \sigma_0 - |\sigma_0|_{d^{-1}}^2$$

то, применяя очевидное неравенство

$$2\varepsilon : a : d^{-1} : \sigma_0 \geq -\beta |\varepsilon|_a^2 - |d^{-1} : \sigma_0|_a^2 / \beta \quad (\beta > 0)$$

можно показать, что

$$|\varepsilon|_a^2 \geq 2\varphi(\varepsilon) \geq (1/(1 + \beta_0) - \beta)|\varepsilon|_a^2 - |d^{-1} : \sigma_0|_a^2/\beta - |\sigma_0|_{d^{-1}}^2 \quad (2.2)$$

Для функции $\psi(\sigma)$, определенной выражением (1.7), выполняется цепочка неравенств

$$|\sigma|_{a^{-1}}^2 \leq 2\psi(\sigma) \leq |\sigma|_{a^{-1}}^2 + |\sigma - \sigma_0|_{b^{-1}}^2 \quad (2.3)$$

Вообще говоря, в неоднородных средах от точки $x \in \Omega$ зависят не только тензоры коэффициентов упругости, но и конусы C и K . Далее будем полагать, что в этом случае функции

$$x \mapsto \varphi(x, \varepsilon), \quad x \mapsto \psi(x, \sigma)$$

принадлежат пространству $L_\infty(\Omega)$ при любых ε и σ .

Сделанные предположения позволяют установить разрешимость рассматриваемой задачи, приводящей к двум независимым вариационным проблемам. Искомое поле перемещений получается в результате минимизации интеграла

$$I(u) = \int_{\Omega} (\varphi(\varepsilon(u)) - f \cdot u) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} q \cdot u d\Gamma \quad (2.4)$$

на линейном пространстве U обобщенных функций $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющих граничному условию (2.1) на Γ_u . При определении поля напряжений минимизируется интеграл

$$J(\sigma) = \int_{\Omega} \psi(\sigma) d\Omega \quad (2.5)$$

на аффинном пространстве Σ тензорных функций $\sigma \in L_2(\Omega)$, для которых выполняются уравнения равновесия (1.10) и граничные условия (2.1) на Γ_σ . Оба интеграла представляют собой строго выпуклые и слабо полунепрерывные снизу функционалы. Оценки (2.2) и (2.3) гарантируют коэрцитивность этих функционалов. Пространства U и Σ замкнуты. На основании известной теоремы (см. [2, 4–6]) можно сделать вывод о существовании и единственности решений. Классическая теория двойственности [4] устанавливает связь между полученными полями перемещений и напряжений, согласованную с определяющими соотношениями (1.1).

В важном случае $\Gamma_u = \emptyset$, когда на всей границе заданы статические граничные условия, поле перемещений заведомо неединственно и определяется с точностью до жестких смещений

$$H = \{u | u(x) = w + \omega \cdot x\}$$

где w – произвольный вектор, ω – кососимметричный тензор второго ранга. Пространство $H^1(\Omega)$ разлагается в прямую сумму H и ортогонального подпространства

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} u d\Omega = \int_{\Omega} x \times u d\Omega = 0 \right\}$$

Если Ω – липшицева область, то выполняется третье неравенство Корна, которое в силу оценки (2.2) при $\beta < 1/(1 + \beta_0)$ означает коэрцитивность функционала $I(u)$ на данном подпространстве и гарантирует существование решения при условии равенства нулю главного вектора и главного момента сил:

$$\int_{\Omega} f d\Omega + \int_{\Gamma} q d\Gamma = \int_{\Omega} x \times f d\Omega + \int_{\Gamma} x \times q d\Gamma = 0 \quad (2.6)$$

Утверждение о существовании и единственности решений остается в силе в случае неоднородных граничных условий в перемещениях: $u = u_0$ на Γ_u , если $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma_u)$.

Вопрос о разрешимости граничных задач в рамках предельных моделей оказывается более сложным. При $b \rightarrow 0$ корректно поставлена задача в напряжениях, приводящая к минимизации квадратичного функционала

$$J_a(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\sigma|_a^2 d\Omega$$

на выпуклом и замкнутом множестве

$$\Sigma_K = \{ \sigma \in \Sigma \mid \sigma - \sigma_0 \in K \text{ почти всюду в } \Omega \}$$

Если множество Σ_K не пусто, то точка минимума существует и единственна.

Доказательство существования поля перемещений требует специальных построений, поскольку функционал $I_a(u)$, определяемый по формуле (2.4) через $\varphi_a(\varepsilon)$, не является коэрцитивным в $H^1(\Omega)$ (см. [4]). Теорема единственности не справедлива.

При $a \rightarrow \infty$ корректно поставлена задача в перемещениях. Она сводится к определению точки минимума квадратичного функционала

$$I_b(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\varepsilon(u)|_b^2 + \sigma_0 : \varepsilon(u) - f \cdot u \right) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} q \cdot u d\Gamma \quad (2.7)$$

на выпуклом и замкнутом конусе

$$U_C = \{ u \in U \mid \varepsilon(u) \in C \text{ почти всюду в } \Omega \}$$

Если $\Gamma_u = \emptyset$, то конус U_C необходимо рассматривать как подмножество $H^1(\Omega)$, требуя дополнительно выполнения условий (2.6). Решение задачи о минимуме существует и единственно (с точностью до жестких смещений). Построение напряжений связано с минимизацией на Σ некоэрцитивного функционала $J_b(\sigma)$, который получается из (2.5) заменой $\psi(\sigma)$ на $\psi_b(\sigma)$. В случае $\Sigma_K \neq \emptyset$, когда, как будет показано ниже, среда находится в абсолютно жестком состоянии, каждое тензорное поле $\sigma \in \Sigma_K$ удовлетворяет уравнению $J_b(\sigma) = 0$ и является искомой точкой минимума. Таким образом, поле напряжений, вообще говоря, не единственно. Доказательство существования решения задачи в напряжениях в общем случае не представляет практического интереса из-за очевидной механической некорректности модели.

3. Предельные состояния. В соответствии с данной моделью при равновесии среды область Ω разбивается на две части – жесткую зону, в которой материал не деформируется, и зону ненулевой деформации. Приложенная внешняя нагрузка (f, q) называется безопасной, если зона деформации отсутствует [7]. При этом почти всюду в Ω равен нулю вектор перемещений или его проекция на $H^1(\Omega)$.

Пусть Σ_K – непустое множество. Тогда по формуле Грина для любых $\tilde{\sigma} \in \Sigma_K$ и $\tilde{u} \in U_C$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \tilde{\sigma} + f) \cdot \tilde{u} d\Omega = \int_{\Omega} (f \cdot \tilde{u} - \tilde{\sigma} : \varepsilon(\tilde{u})) d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} q \cdot \tilde{u} d\Gamma = 0$$

Отсюда, принимая во внимание, что $(\tilde{\sigma} - \sigma_0) : \varepsilon(\tilde{u}) \leq 0$, получим

$$W(\tilde{u}) = \int_{\Omega} (f \cdot \tilde{u} - \sigma_0 : \varepsilon(\tilde{u})) d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} q \cdot \tilde{u} d\Gamma \leq 0 \quad (3.1)$$

Действительное поле перемещений находится как решение задачи минимизации функционала $I_b(u)$ на конусе U_C . Вершиной этого конуса служит точка $0 \in U_C$, поэтому

$$I_b(u) = \min_{\tilde{u} \in U_C} I_b(\tilde{u}) = \min_{\tilde{u} \in U_C} \min_{\lambda \geq 0} I_b(\lambda \tilde{u})$$

Непосредственное вычисление минимума по λ с учетом выражения (2.7) приводит к задаче максимизации

$$I_b(u) = -\max_{\tilde{u} \in U_C} \frac{W_+^2(\tilde{u})}{\int_{\Omega} |\varepsilon(\tilde{u})|_b^2 d\Omega} \quad (3.2)$$

где $W_+ = (W + |W|)/2$ – положительная часть выражения.

Судя по (3.2), значение функционала $I_b(u)$ отлично от нуля (строго отрицательно), если условие (3.1) нарушается для некоторого элемента $\tilde{u} \in U_C$. При выполнении этого условия для всех элементов $I_b(u) = 0$; следовательно, единственное решение задачи минимизации (2.7) тождественно равно нулю. Таким образом, в случае $\Sigma_K \neq \emptyset$ нагрузка (f, q) безопасна.

Используя вариант теоремы двойственности, приведенный, например, в [8], можно доказать обратное утверждение в следующей ослабленной форме: если действующая нагрузка безопасна, то существует последовательность тензорных функций $\sigma_n \in \Sigma$, для которой $\sigma_n - \sigma_0$ стремится к конусу K при $n \rightarrow \infty$. Это значит, что почти всюду в области Ω последовательность проекций на сопряженный конус C , образованная первыми слагаемыми разложений

$$\sigma_n - \sigma_0 = b : \pi_b(b^{-1} : (\sigma_n - \sigma_0)) + \Pi_{b^{-1}}(\sigma_n - \sigma_0)$$

вытекающих из формулы (1.3), стремится к нулю. Если σ_n – сходящаяся последовательность в $L_2(\Omega)$, то множество Σ_K содержит ее предел и, следовательно, не пусто. Однако, вообще говоря, предела может не существовать, но даже в этом случае наличие такой последовательности гарантирует выполнение условия (3.1).

Действительно, задача определения точной нижней грани функционала

$$J_b(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\pi_b(b^{-1} : (\sigma - \sigma_0))|_b^2 d\Omega$$

на аффинном пространстве Σ за счет сдвига легко приводится к аналогичной задаче для линейного подпространства $\Sigma_0 = \Sigma - \Sigma \subset L_2(\Omega)$. Рассматриваемый функционал ограничен снизу на Σ_0 и непрерывен, например, в точке $0 \in \Sigma_0$. Как было показано в более общей постановке [4], двойственной задачей является задача минимизации (2.7). Таким образом, выполнены все условия теоремы двойственности и, по ее утверждению, имеет место равенство

$$\inf_{\tilde{\sigma} \in \Sigma} J_b(\tilde{\sigma}) = -I_b(u) \quad (3.3)$$

в котором \inf может не достигаться на элементах из Σ , а правая часть оказывается равной нулю в силу безопасности нагрузки.

Пусть σ_n – минимизирующая последовательность, т.е. $J_b(\sigma_n) \rightarrow 0$. Тогда $\pi_b(b^{-1} : (\sigma_n - \sigma_0)) \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$. Как известно, из последовательности, сходящейся в $L_2(\Omega)$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Эта подпоследо-

вательность, очевидно, удовлетворяет требуемому свойству. То, что ее предел, если он существует, принадлежит множеству Σ_K доказывается с учетом разложения (1.3).

Для доказательства утверждения о выполнении условия (3.1) предположим, что $\sigma_n \in \Sigma$ – последовательность, для которой $\sigma_n - \sigma_0$ стремится к конусу K . Тогда, поскольку из сходимости почти всюду следует сходимость по норме $L_2(\Omega)$, числовая последовательность $J_b(\sigma_n)$ стремится к нулю и является минимизирующей, причем точная нижняя грань в (3.3) равна нулю. Отсюда $I_b(u) = 0$ и $u = 0$.

Итак, для безопасности нагрузки (f, q) необходимо и достаточно выполнения двух взаимно эквивалентных условий: условия $\Sigma_K \neq \emptyset$ в описанной выше слабой форме и условия (3.1). Полученный критерий составляет содержание статической и кинематической теорем теории предельного равновесия, хорошо разработанной для моделей жесткопластических сред [7, 8].

В декартовом произведении пространств $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma_\sigma)$ безопасные нагрузки образуют выпуклое и замкнутое множество S . Выпуклость проверяется, исходя из определения: если (f, q) и (\tilde{f}, \tilde{q}) – элементы S , то для них выполняется условие (3.1). Это условие, очевидно, справедливо и для выпуклой комбинации нагрузок $\lambda(f, q) + (1 - \lambda)(\tilde{f}, \tilde{q})$ с параметром $\lambda \in (0, 1)$. Замкнутость S – следствие непрерывной зависимости решения задачи минимизации (2.7) от f и q . Известно [2], что такая задача эквивалентна вариационному неравенству ($u, \tilde{u} \in U_C$)

$$\int_{\Omega} \left\{ (b : \varepsilon(u) + \sigma_0) : (\varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u)) - f \cdot (\tilde{u} - u) \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} q \cdot (\tilde{u} - u) d\Gamma \geq 0 \quad (3.4)$$

Принимая здесь в качестве произвольной варьируемой функции \tilde{u} решение, соответствующее внешней нагрузке (\tilde{f}, \tilde{q}) , и суммируя (3.4) с вариационным неравенством, характеризующим решение \tilde{u} , в котором варьируемая функция равна u , можно получить

$$\int_{\Omega} |\varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u)|_b^2 d\Omega \leq \int_{\Omega} (\tilde{f} - f) \cdot (\tilde{u} - u) d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (\tilde{q} - q) \cdot (\tilde{u} - u) d\Gamma$$

Отсюда, после применения неравенства Корна к левой части и нормативных неравенств – к правой, следует оценка, гарантирующая непрерывную зависимость решения:

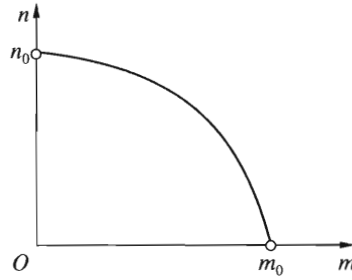
$$\alpha \|\tilde{u} - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\tilde{f} - f\|_{L_2(\Omega)} + \|\tilde{q} - q\|_{H^{-1/2}(\Omega)} \quad (\alpha > 0) \quad (3.5)$$

Граничные точки множества S отвечают предельным нагрузкам. Для любой нагрузки (f, q) , не обязательно безопасной, можно определить коэффициенты запаса – неотрицательные числа m и n , для которых нагрузка (mf, nq) является предельной. Если коэффициент m задан, причем $(mf, 0) \in S$, то в силу критерия (3.1) имеем

$$n(m) = \inf_{\tilde{u} \in U_C} \left\{ V(\tilde{u}, m) / \left(\int_{\Gamma_\sigma} q \cdot \tilde{u} d\Gamma \right)_+ \right\}, \quad V = \int_{\Omega} (\sigma_0 : \varepsilon(\tilde{u}) - mf \cdot \tilde{u}) d\Omega \quad (3.6)$$

Функция $n(m)$ вогнута (Фиг. 3), поскольку точная нижняя грань суммы больше либо равна сумме точных нижних граней:

$$\begin{aligned} n(\lambda m + (1 - \lambda)\tilde{m}) &= \inf_{\tilde{u} \in U_C} \left\{ (\lambda V(\tilde{u}, m) + (1 - \lambda)V(\tilde{u}, \tilde{m})) / \left(\int_{\Gamma_\sigma} q \cdot \tilde{u} d\Gamma \right)_+ \right\} \geq \\ &\geq \lambda n(m) + (1 - \lambda)n(\tilde{m}) \end{aligned}$$



Фиг. 3

Характерные точки пересечения графика этой функции с координатными осями на плоскости (m, n) могут быть найдены с помощью соотношения (3.6) как

$$n_0 = n(0), \quad m_0 = \inf_{\tilde{u} \in U_C} \left\{ \int_{\Omega} \sigma_0 : \varepsilon(\tilde{u}) d\Omega / \left(\int_{\Omega} f \cdot \tilde{u} d\Omega \right)_+ \right\}$$

Для модели вязкой жесткопластической среды аналогичная зависимость между коэффициентами запаса впервые была исследована в [9].

4. Локализация деформаций. Полученные выше формулы дают простой способ оценки коэффициентов запаса нагрузки. В качестве примера рассмотрим плоское деформированное состояние однородного цилиндрического образца радиуса r с радиальным надрезом, на берегах которого действует давление $q > 0$, вызванное, например, температурным расширением вставленной в надрез тонкой металлической пластины. Разнопрочность материала будем описывать на основе условия Мизеса – Шлейхера. В соответствии с этим условием

$$\sigma_0 = (\tau_0/\kappa)\delta, \quad K = \{\sigma | \tau(\sigma) \leq \kappa p(\sigma)\}$$

где τ_0 – коэффициент сцепления при чистом сдвиге, κ – коэффициент внутреннего трения, $p = -\sigma : \delta/3$ – гидростатическое давление, $\tau = \sqrt{\sigma' : \sigma'/2}$ – интенсивность касательных напряжений (δ – единичный тензор, $\sigma' = \sigma + p\delta$ – девиатор напряжений). Сопряженный конус равен

$$C = \{\varepsilon | \gamma(\varepsilon) \leq \theta(\varepsilon)/\kappa\}$$

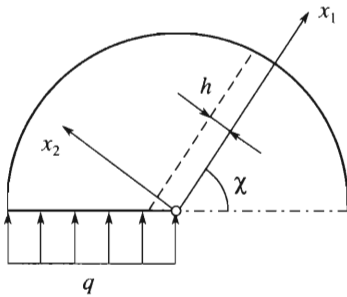
где $\theta = \varepsilon : \delta$ – деформация объема, $\gamma = \sqrt{2\varepsilon' : \varepsilon'}$ – интенсивность сдвига.

Пусть $\tilde{u}(x)$ – допустимое поле перемещений, описывающее локализацию деформации простого сдвига с дилатансией в узкой линейной зоне толщины h , наклоненной под углом χ к линии надреза (фиг. 4). В декартовой системе координат, связанной с этой зоной,

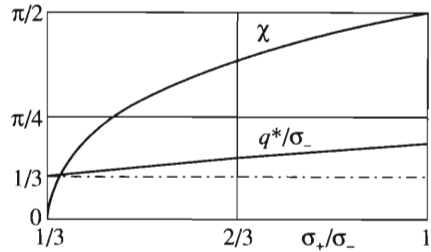
$$\tilde{u}_1 = \gamma_0 x_2, \quad \tilde{u}_2 = \varepsilon_0 x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq h) \quad (4.1)$$

В остальной части, вне зоны локализации, перемещения постоянны и определяются по непрерывности. Условие $\tilde{u} \in U_C$ принимает вид $\gamma_0 \leq \varepsilon_0 \sqrt{1/\kappa^2 - 4/3}$ и имеет смысл только в случае $\kappa \leq \sqrt{3}/2$. Предельное давление вычисляется по формуле

$$q = \frac{\tau_0}{\kappa} \inf_{\tilde{u} \in U_C} \left\{ \int_{\Gamma} \tilde{u} \cdot \nu d\Gamma / \left(- \int_{\Gamma_\sigma} \tilde{u} \cdot \nu d\Gamma \right)_+ \right\}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

полученной из соотношения (3.6) с помощью формулы Грина. Устремляя h к нулю, можно найти верхнюю оценку вида

$$q^* = \frac{\tau_0 \varepsilon_0}{\kappa \gamma_0 \sin \chi + \varepsilon_0 \cos \chi}$$

Входящие сюда параметры должны быть выбраны из условия минимума q^* . Следовательно,

$$q^* = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \kappa^2/3}}, \quad \chi = \arctg \sqrt{\frac{1 - 4}{\kappa^2 - 3}} \tag{4.2}$$

Это наилучшая верхняя оценка давления и наиболее вероятный угол выхода зоны локализации деформации рассматриваемого типа. В пределе при $\kappa \rightarrow 0$ локализация происходит в направлении, перпендикулярном надрезу. При $\kappa \rightarrow \sqrt{3}/2$ зона локализации разворачивается и становится продолжением надреза. В случае $\kappa > \sqrt{3}/2$ одноосное растяжение среды недопустимо, поэтому верхняя оценка строится более сложным образом и здесь не приводится.

Для большинства природных и искусственных разнопрочных материалов предел прочности на растяжение σ_+ меньше предела прочности на сжатие σ_- . Некоторые из них, например углеграфиты, отличаются тем, что отношение σ_+/σ_- в зависимости от марки материала изменяется практически во всем диапазоне от 0 до 1. Согласно условию Мизеса–Шлейхера пределы прочности при одноосном напряженном состоянии таковы:

$$\sigma_{\pm} = \frac{3\tau_0}{\sqrt{3} \pm \kappa}$$

Коэффициент внутреннего трения выражается через отношение пределов как

$$0 < \kappa = \sqrt{3} \frac{1 - \sigma_+/\sigma_-}{1 + \sigma_+/\sigma_-} < \sqrt{3}$$

Безразмерные зависимости угла χ и величины q^*/σ_- от параметра σ_+/σ_- , полученные по формулам (4.2), приведены на фиг. 5.

В заключение отметим, что найти близкую к (4.2) нижнюю оценку давления с помощью статической теоремы не удается, поэтому не ясно, насколько q^* отличается от предельного значения. Однако численные расчеты аналогичной задачи [10] показали удовлетворительное соответствие результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00267).

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский В.М. Численное моделирование в задачах динамики сыпучих сред // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва. 2002. Т. 15. С. 183–198.
2. Duvaut G., Lions J.L. Les Inéquations en Mécanique et en Physique. Paris: Dunod, 1972 = Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 393 с.
3. Садовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука. Физматлит, 1997. 208 с.
4. Temam R. Problèmes Mathématiques en Plasticité. Paris: Gauthier Villars, 1983 = Темам Р. Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. 288 с.
5. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997. 339 с.
6. Khudnev A.M., Kovtunenکو V.A. Analysis of crack in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 1999. 408 p.
7. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жестко пластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
8. Каменярж Я.А. Предельный анализ пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1997. 512 с.
9. Мосолов П.П., Мясников В.П. Вариационные методы в теории течений жестковязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1971. 114 с.
10. Горуневич С.Б., Злобин В.С., Садовский В.М. Термонапряженное состояние подовой секции алюминиевого электролизера // Сиб. ж. индустр. математики. 2002. Т. V. № 2(10). С. 61–69.

Москва, Красноярск
e-mail: sadov@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию
22.IX.2003