

УДК 532.591

© 2004 г. Л. А. Ткачева

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ КОСОМ НАБЕГАНИИ

Исследуется дифракция плоских поверхностных волн на плавающей полубесконечной пластине при косом набегаии в жидкости конечной глубины. Построено точное решение этой задачи методом Винера – Хопфа. Получены аналитические формулы для потенциала скоростей жидкости, коэффициентов отражения и прохождения. Исследовано поведение пластины на волнах – распределение смещений и деформаций в зависимости от безразмерных параметров задачи: угла падения волны и приведенных жесткости и глубины.

Поведение плавающей упругой пластины на волнах ранее изучалось применительно к ледяному покрову. В настоящее время интерес к этой задаче возрос в связи с проектированием искусственных островов, плавающих аэропортов и платформ различного назначения. Существует множество разработанных численных методов решения таких задач (обзоры [1,2]). Однако применимость численных методов в случае коротких волн вызывает сомнения. Большинство таких методов требует измельчения сетки для коротких волн, что приводит к матричным уравнениям высокого порядка, сходимость численных алгоритмов ничем не обоснована. Поэтому возникла необходимость развития таких методов, которые пригодны и для коротких волн. Строилось [3–6] аналитическое решение этой задачи для полубесконечной пластины методом Винера – Хопфа. Техника Винера – Хопфа допускает множество различных подходов к решению задачи, и в каждой работе использован свой подход.

Особенность краевой задачи, возникающей в гидроупругости – это высокий порядок производной в одном из краевых условий, вследствие чего в методе Винера – Хопфа решение зависит от двух постоянных, определение которых в явном виде затруднительно. Так, в случае косоого набегаии была получена [3] система линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой представляют собой ряды по корням дисперсионного соотношения (трансцендентного уравнения). Рассматривался [4] случай стратифицированной жидкости, условия свободного края в кромке не ставились, а постоянные полагались равными нулю без обоснований. Был рассмотрен [5] случай нормального падения волны в бесконечно глубокой жидкости, однако полученные формулы настолько сложны, что провести по ним расчеты не решились даже авторы.

Численные расчеты по полученным формулам содержатся только в работе Бэлмфорта и Крастера [6] и только для коэффициентов отражения и прохождения. В этой работе упругая пластина описывается уравнением Тимошенко – Миндлина. Решение зависит от двух постоянных, но дополнительно к ним введены еще две постоянные, и для них получена система четырех уравнений. По-видимому, неудачно введены безразмерные переменные, в результате чего малый член в уравнении стал единицей. Приведена простая приближенная формула для коэффициента отражения, которая получена в предположении, что обе постоянные равны нулю. Полученные по этой формуле значения коэффициента отражения очень хорошо совпадают с соответствующими значениями, найденными с учетом ненулевых постоянных.

Автором был предложен другой подход [7, 8]. Показано, что в случае нормального набегаии, если отбросить малый член, систему удается обратить, даже не вычисляя ее коэффициентов, а приближенная формула, полученная в [6], на самом деле является точным решением задачи. Ниже излагается подход, который позволяет определить постоянные и получить точ-

ное решение задачи для косога набегаания волны на полубесконечную пластину, плавающую на поверхности жидкости конечной глубины.

1. Постановка задачи. Поверхность идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H_0 частично закрыта тонкой упругой полубесконечной пластиной. Плоская волна малой амплитуды набегаёт под углом θ к пластине, причём длина волны значительно больше толщины пластины. Введём декартову систему координат (x, y, z) с центром O в кромке пластины и осью Ox , направленной перпендикулярно к кромке, осью Oy вдоль кромки, осью Oz , направленной вертикально вверх. Осадкой пластины в жидкость будем пренебрегать, граничные условия сносятся на невозмущённую поверхность жидкости. Задача решается в линейной постановке.

Потенциал скоростей жидкости ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0 \tag{1.1}$$

Граничные условия можно записать в виде

$$z = -H_0 : \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0; \quad z = 0 : \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$z = 0 : D\Delta_h^2\eta + \rho_0 h \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = p \ (x > 0), \quad p = -\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta\right), \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 \ (x < 0) \tag{1.3}$$

Здесь η – вертикальное смещение верхней поверхности жидкости (пластины), g – ускорение свободного падения, D – цилиндрическая жесткость пластины, h – её толщина, ρ и ρ_0 – плотности жидкости и пластины, t – время. Индекс h у оператора Лапласа означает, что он берётся только по горизонтальным переменным. На краю пластины должны обращаться в нуль момент и перерезывающая сила

$$z = 0, \quad x = 0 : \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \right] = 0 \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Зависимость всех искомым функций от времени и координаты y периодическая и выражается множителем $e^{i(ky - \omega t)}$, где k – волновое число по координате y в набегающей волне, ω – частота. Введём безразмерные переменные

$$\phi' = \frac{\phi}{A\sqrt{gl}}, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad t' = \omega t, \quad H = \frac{H_0}{l}, \quad k' = kl$$

где A – амплитуда падающей волны, $l = g/\omega^2$ – характерная длина. Штрихи в дальнейшем будем опускать.

Представим потенциал ϕ в безразмерных переменных в виде

$$\phi = \phi e^{i(ky - t)}, \quad \phi = \phi_0 + \phi_1, \quad \phi_0 = e^{i\gamma x} \frac{\text{ch}(\mu(z + H))}{\text{ch}(\mu H)}; \quad \gamma = \mu \cos\theta, \quad k = \mu \sin\theta$$

где ϕ_0 – потенциал падающей волны, ϕ_1 – дифрагированный потенциал, γ и k – волновые числа по координатам x и y в набегающей волне, а значение μ определяется из дисперсионного соотношения для волн на поверхности жидкости глубины H : $\mu \text{th}(\mu H) - 1 = 0$.

Тогда из задачи (1.1)–(1.4) можно получить краевую задачу для ϕ_1

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - k^2 \phi_1 = 0, \quad -H < z < 0 \quad (1.5)$$

$$z = -H : \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

$$z = 0 : \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \phi_1 = 0 (x < 0), \quad \left[\beta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) + 1 - \delta \right] \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \phi_1 = B e^{i\gamma x} (x > 0) \quad (1.7)$$

$$z = 0, \quad x = 0 : \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

$$\beta = \frac{D}{\rho g l^4}, \quad \delta = \frac{\rho_0 h}{\rho l}, \quad B = \delta - \beta(\gamma^2 + k^2)^2$$

Здесь β , δ , θ и H – безразмерные параметры задачи.

Кроме того, должны выполняться условия излучения при $|x| \rightarrow \infty$ и условия регулярности вблизи передней кромки (локальная ограниченность энергии). Ввиду сделанных предположений параметр $\delta \ll 1$, поэтому в дальнейшем положим $\delta = 0$; такое приближение использовано также и в ряде других работ ([5] и др.).

2. Дисперсионные соотношения. Рассмотрим, как распространяются волны в жидкости со свободной поверхностью и под пластиной. Ищем решения уравнения (1.5) вида

$$e^{i\alpha x} \Psi(\alpha, z); \quad \Psi(\alpha, z) = \text{ch}(\sqrt{\alpha^2 + k^2}(z + H)) / \text{ch}(\sqrt{\alpha^2 + k^2}H) \quad (1.9)$$

с условием (1.6) на дне и соответствующим условием (1.7) на верхней границе.

Поверхностные волны. Для поверхностных волн значения α должны удовлетворять дисперсионному соотношению

$$\mu \text{th}(\mu H) - 1 = 0, \quad \mu = \sqrt{\alpha^2 + k^2}$$

Это уравнение имеет два действительных корня $\pm \mu_0$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm \mu_j (j = 1, 2, \dots)$, расположенных симметрично относительно действительной оси. Им соответствуют два действительных значения $\pm \gamma (\gamma = \sqrt{\mu_0^2 - k^2})$ и чисто мнимые корни $\pm \gamma_j (j = 1, 2, \dots; \gamma_j = \sqrt{\mu_j^2 - k^2})$.

Изгибно-гравитационные волны. Для волн, распространяющихся в пластине, так называемых изгибно-гравитационных волн, дисперсионное соотношение имеет вид

$$(\beta \lambda^4 + 1) \lambda \text{th}(\lambda H) - 1 = 0, \quad \lambda = \sqrt{\alpha^2 + k^2}$$

Это уравнение имеет два действительных корня $\pm \lambda_0$, счетное множество чисто мнимых корней $\pm \lambda_j (j = 1, 2, \dots)$, симметричных относительно действительной оси, и, кроме того, имеются четыре комплексных корня, симметричных относительно действительной и мнимой осей: λ_{-1} – корень, лежащий в первом квадранте, и λ_{-2} – корень во втором квадранте. Этим корням дисперсионного соотношения соответству-

ют значения корней $\pm\alpha_j (j = -2, -1, 0, 1, \dots; \alpha_j = \sqrt{\mu_j^2 - k^2})$. Если $\lambda_0 > k$, то α_0 имеет действительное значение, в противном случае – мнимое.

Действительные корни дисперсионных соотношений определяют распространяющиеся волны, а все остальные корни определяют краевые волны, экспоненциально затухающие вдали от кромки пластины. Критический угол падения волны соответствует $\lambda_0 = k$ и определяется формулой $\theta_* = \arcsin(\lambda_0/\mu_0)$. Если угол падения волны больше критического, то в пластине существуют только краевые волны.

3. Аналитическое решение задачи. Решение задачи будем строить методом Винера–Хопфа в интерпретации Джонса [9]. Введем в рассмотрение функции комплексного переменного α

$$\Phi_+(\alpha, z) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} \phi_1(x, z) dx, \quad \Phi_-(\alpha, z) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} \phi_1(x, z) dx \tag{3.1}$$

$$\Phi(\alpha, z) = \Phi_+(\alpha, z) + \Phi_-(\alpha, z)$$

Функция $\Phi_+(\alpha, z)$ определена в верхней полуплоскости $\{\text{Im}\alpha > 0\}$, а $\Phi_-(\alpha, z)$ – в нижней полуплоскости $\{\text{Im}\alpha < 0\}$. С помощью аналитического продолжения можно определить их во всей комплексной плоскости.

Исследуем поведение функций $\Phi_{\pm}(\alpha, z)$. При $x \rightarrow -\infty$ дифрагированный потенциал представляет собой отраженную волну вида $\text{Re}e^{-i\gamma x}$ и множество экспоненциально затухающих волн. Наименее затухающая волна соответствует корню γ_1 . Поэтому функция $\Phi_-(\alpha, z)$ аналитична в полуплоскости $\{\text{Im}\alpha < |\gamma_1|\}$ за исключением полюса при $\alpha = \gamma$. При $x \rightarrow \infty$ потенциал ϕ_1 соответствует сумме волн: проходящей волны с волновым числом α_0 , волны с волновым числом γ , компенсирующей ϕ_0 , и множества экспоненциально затухающих мод. Следовательно, функция $\Phi_+(\alpha, z)$ аналитична в полуплоскости $\{\text{Im}\alpha > c\}$, за исключением полюсов при $\alpha = -\alpha_0$ и $\alpha = -\gamma$; число c равно наименьшей мнимой части из волновых чисел затухающих мод в пластине.

Функция $\Phi(\alpha, z)$ – образ Фурье для функции $\phi_1(x, z)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - (\alpha^2 + k^2)\Phi = 0$$

Общее решение этого уравнения с условием (1.6) на дне имеет вид

$$\Phi(\alpha, z) = C(\alpha)\Psi(\alpha, z) \tag{3.2}$$

Функция $\Psi(\alpha, z)$ определена выражением (1.9).

Обозначим $D_{\pm}(\alpha)$ выражения типа (3.1), где вместо функции ϕ_1 под интегралом стоит левая часть первого краевого условия (1.7), а через $F_{\pm}(\alpha)$ – аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть второго условия (1.7). Эти интегралы будем понимать как преобразование Фурье обобщенных функций [10]. Для них выполнены соотношения

$$D_+(\alpha) + D_-(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha), \quad F_+(\alpha) + F_-(\alpha) = C(\alpha)K_2(\alpha) \tag{3.3}$$

где $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha)$ – дисперсионные функции для волн на свободной поверхности и под пластиной соответственно

$$K_1(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + k^2} \text{th}(\sqrt{\alpha^2 + k^2}H) - 1$$

$$K_2(\alpha) = (\beta(\alpha^2 + k^2)^2 + 1)\sqrt{\alpha^2 + k^2} \text{th}(\sqrt{\alpha^2 + k^2}H) - 1$$

Из краевых условий (1.7) имеем

$$D_-(\alpha) = 0, \quad F_+(\alpha) = -\frac{B}{i(\alpha + \gamma)}$$

С учетом этого из соотношений (3.3) находим

$$D_+(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha), \quad F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + \gamma)} = C(\alpha)K_2(\alpha) \quad (3.4)$$

Из последних двух уравнений получаем

$$D_+(\alpha) = K(\alpha) \left(F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + \gamma)} \right), \quad K(\alpha) = \frac{K_1(\alpha)}{K_2(\alpha)} \quad (3.5)$$

В соответствии с методом Винера–Хопфа необходимо факторизовать функцию $K(\alpha)$, т.е. представить ее в виде

$$K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha) \quad (3.6)$$

где функции $K_{\pm}(\alpha)$ регулярны соответственно в тех же областях, что и функции $\Phi_{\pm}(\alpha, z)$. Функция $K(\alpha)$ имеет нули и полюса на действительной оси соответственно в точках $\pm\gamma$ и $\pm\alpha_0$. Поэтому будем рассматривать области аналитичности S_+ и S_- , где S_+ – полуплоскость $\{\text{Im}\alpha > -c\}$ с разрезами, исключающими точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$, S_- – полуплоскость $\{\text{Im}\alpha < c\}$ с разрезами, исключающими точки α_0 и γ .

Введем функцию

$$g(\alpha) = \frac{K(\alpha)\beta(\alpha^2 - \alpha_0^2)(\alpha^2 - \alpha_{-1}^2)(\alpha^2 - \alpha_{-2}^2)}{\alpha^2 - \gamma^2}$$

Она не имеет нулей, ограничена и стремится на бесконечности к единице. Факторизуем $g(\alpha)$ следующим образом [9]:

$$g(\alpha) = g_+(\alpha)g_-(\alpha), \quad g_{\pm}(\alpha) = \exp \left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp ic}^{\infty \mp ic} \frac{\ln g(x)}{x - \alpha} dx \right] \quad (3.7)$$

Функции $K_{\pm}(\alpha)$ определим выражениями

$$K_{\pm}(\alpha) = \frac{(\alpha \pm \gamma)g_{\pm}(\alpha)}{\sqrt{\beta}(\alpha \pm \alpha_0)(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})}$$

При этом $K_+(\alpha) = K_-(-\alpha)$.

Теперь уравнение (3.5) запишем в виде

$$K_-(\alpha)F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + \gamma)}(K_-(\alpha) - K_-(-\gamma)) = \frac{D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{BK_-(-\gamma)}{i(\alpha + \gamma)}$$

Слева имеем функцию, аналитическую в области S_- , а справа – аналитическую в S_+ . Аналитическим продолжением ее можно определить во всей комплексной плоскости, и по теореме Лиувилля эта функция – полином. Степень полинома определим из поведения функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Из условия локальной ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность не выше, чем $O(r^{-\lambda})$, где $\lambda < 1$, r – расстояние до кромки пластины. Тогда $F_-(\alpha)$ имеет при $|\alpha| \rightarrow \infty$ порядок [10] не выше, чем

$O(|\alpha|^{\lambda+3})$, а $D_+(\alpha)$ – не выше, чем $O(|\alpha|^{\lambda-1})$. Функции $K_{\pm}(\alpha)$ имеют на бесконечности порядок $O(|\alpha|^2)$, так как $g_{\pm}(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Следовательно, степень полинома равна единице. Получаем

$$\frac{D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{BK_(-\gamma)}{i(\alpha + \gamma)} = \frac{BK_(-\gamma)}{i}(a + b\alpha)$$

где a и b – неизвестные постоянные, которые будем определять из условий (1.8).

Выражая из последнего уравнения $D_+(\alpha)$, с учетом выражений (3.2) и (3.4) находим

$$\phi_1(x, z) = \frac{BK_(-\gamma)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \Psi(a, z) \frac{K_+(\alpha)}{K_1(\alpha)} \left(a + b\alpha - \frac{1}{\alpha + \gamma} \right) d\alpha \quad (3.8)$$

Контур интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы он целиком лежал в пересечении областей S_+ и S_- . Можно выбрать контур интегрирования на действительной оси, обходя точки α_0 и γ снизу, а точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$ сверху.

При $x > 0$ умножим и разделим подынтегральное выражение на $K_-(\alpha)$ и замкнем контур интегрирования в нижней полуплоскости. Получаем полюса в точках $-\gamma, -\alpha_j$ ($j = -2, -1, \dots$). Интеграл вычислим с помощью теории вычетов. Получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, 0) = -BK_(-\gamma) \sum_{j=-2}^{\infty} e^{i\alpha_j x} \frac{\sqrt{\alpha_j^2 + k^2} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha_j^2 + k^2} H)}{K_(-\alpha_j) K_2'(-\alpha_j)} \left(\alpha - b\alpha_j - \frac{1}{\gamma - \alpha_j} \right) \quad (3.9)$$

Из дисперсионного соотношения под пластиной имеем

$$\sqrt{\alpha_j^2 + k^2} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha_j^2 + k^2} H) = -\frac{K_1(-\alpha_j)}{\beta(\alpha_j^2 + k^2)^2}$$

Подставляя это выражение в равенство (3.9) и полученный результат в краевые условия (1.8), приходим к системе линейных алгебраических уравнений второго порядка для определения неизвестных a и b

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= U_2 - (1 - \nu)k^2 U_0, & A_{12} &= -U_3 + (1 - \nu)k^2 U_1, & A_{21} &= U_3 + (1 - \nu)U_1 \\ A_{22} &= -U_4 + \nu k^2 U_2 - (1 - \nu)k^4 U_0, & C_1 &= \tilde{U}_2 - (1 - \nu)k^2 \tilde{U}_0, & C_2 &= \tilde{U}_3 + (1 - \nu)\tilde{U}_1 \\ U_m &= \sum_{j=-2}^{\infty} U_{mj}, & \tilde{U}_m &= \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{U_{mj}}{\gamma - \alpha_j}, & U_{mj} &= \frac{K_1(\alpha_j) \alpha_j^{m-2[m/2]}}{(\alpha_j^2 + k^2)^{2-[m/2]} K_(-\alpha_j) K_2'(-\alpha_j)} \end{aligned}$$

($[m/2]$ – целая часть величины $m/2$).

Вычислим U_m, \tilde{U}_m . Для этого заменим суммы интегралами с помощью теоремы вычетов, умножим и разделим подынтегральное выражение на $K_+(\alpha)$, а контур интегрирования замкнем в верхней полуплоскости. Получим

$$U_4 = 0, \quad U_m = V_m(ik) + V_m(-ik), \quad \tilde{U}_m = \tilde{V}_m(ik) + \tilde{V}_m(-ik)$$

$$V_0(\pm ik) = \frac{1}{4k^2 \beta} \left[\frac{K_+(\pm ik)}{\pm ik} - K_+'(\pm ik) \right], \quad V_1(\pm ik) = -\frac{K_+'(\pm ik)}{\pm 4ik \beta}$$

$$V_2(\pm ik) = \frac{K_+(\pm ik)}{\pm 2ik\beta}, \quad V_3(\pm ik) = -\frac{K_+(\pm ik)}{2\beta}$$

$$\tilde{V}_0(\pm ik) = \frac{1}{4k^2\beta} \left[\frac{K_+(\pm ik)}{(\gamma \pm ik)^2} + \frac{K_+(\pm ik)}{\pm ik(\gamma \pm ik)} - \frac{K'_+(\pm ik)}{\gamma \pm ik} \right]$$

$$\tilde{V}_1(\pm ik) = \frac{1}{\pm 4ik\beta(\gamma \pm ik)} \left[\frac{K_+(\pm ik)}{\gamma \pm ik} - K'_+(\pm ik) \right]$$

$$\tilde{V}_2(\pm ik) = \frac{K_+(\pm ik)}{\pm 2ik\beta(\gamma \pm ik)}, \quad \tilde{V}_3(\pm ik) = -\frac{K_+(\pm ik)}{2\beta(\gamma \pm ik)}$$

В случае нормального набегания волны были получены значения постоянных [7] $a = 1/\gamma$ и $b = -1/\gamma^2$. В общем случае представим искомые постоянные в виде

$$a = \frac{\gamma}{\gamma^2 + k^2} + a_1, \quad b = -\frac{1}{\gamma^2 + k^2} + b_1$$

Решая систему, получим

$$a_1 = \frac{2(1-\nu)ik\Delta_1}{(\gamma^2 + k^2)\Delta}, \quad b_1 = \frac{2(1-\nu)ik\Delta_2}{(\gamma^2 + k^2)\Delta}$$

$$\Delta_1 = -(3+\nu)ikD_2^+ + \frac{2(1-\nu)ik(2k^2D_1 - \gamma)}{\gamma^2 + k^2}$$

$$\Delta_2 = (3+\nu)D_2^- + \frac{2(1-\nu)ik(2\gamma D_1 - 1)}{\gamma^2 + k^2}$$

$$\Delta = (3+\nu)(1-\nu)[K_+^2(ik) + K_+^2(-ik)] + 2(5+2\nu+\nu^2) - 4(1-\nu)^2k^2D_1^2$$

$$D_2^\pm = \frac{K_+^2(ik)}{\gamma + ik} \pm \frac{K_+^2(-ik)}{\gamma - ik}, \quad D_1 = \frac{K'_+(ik)}{K_+(ik)} = \frac{K'_+(-ik)}{K_+(-ik)}$$

Последнее соотношение следует из соотношения (3.6) и того, что $K_+(-\alpha) = K_-(\alpha)$.

Подставляя значения коэффициентов a и b в выражение (3.8), с учетом соотношения (3.6) получим формулу для потенциала

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, z) &= \frac{\beta(\gamma^2 + k^2)K_+(\gamma)}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \Psi(\alpha, z) \frac{K_+(\alpha)}{K_1(\alpha)} \left[\frac{\alpha^2 + k^2}{\gamma + \alpha} - \frac{2(1-\nu)ik}{\Delta} S(\alpha) \right] d\alpha \\ S(\alpha) &= (3+\nu) \frac{\alpha - ik}{\gamma + ik} K_+^2(ik) - (3+\nu) \frac{\alpha + ik}{\gamma - ik} K_+^2(-ik) + \\ &+ \frac{2(1-\nu)ik}{\gamma^2 + k^2} [2(\gamma\alpha + k^2)D_1 - (\gamma + \alpha)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

4. Коэффициенты прохождения и отражения, возвышение свободной границы, прогиб и деформации пластины. Теперь можно найти отраженную и прошедшую волну. Потенциал при $|x| \rightarrow -\infty$ имеет вид

$$\phi(x, 0) = e^{i\gamma x} + R e^{-i\gamma x}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \phi(x, 0) = T e^{i\alpha_0 x}, \quad x \rightarrow \infty$$

Если угол падения волны больше критического, значение T определяет комплексную амплитуду наименее затухающей волны. Взяв в выражении (3.10) вычет в точке $\alpha = \gamma$, получим

$$R = \frac{\beta(\gamma^2 + k^2)K_+(\gamma)}{K_1'(\gamma)} \left[\frac{\gamma^2 + k^2}{2\gamma} - \frac{2(1-\nu)ik}{\Delta} S(\gamma) \right]$$

Значение T определяется вычетом в точке $\alpha = -\alpha_0$.

$$T = \frac{\beta(\gamma^2 + k^2)K_+(\gamma)}{K_+(\alpha_0)K_2'(\alpha_0)} \left[\frac{\alpha_0^2 + k^2}{\gamma - \alpha_0} - \frac{2(1-\nu)ik}{\Delta} S(-\alpha_0) \right]$$

В рассматриваемом случае амплитуда $|R|$ представляет собой коэффициент отражения ввиду сделанной нормировки. Коэффициент прохождения определим значением $|T|$. Найдем выражение для $|K_+(\gamma)|$. Контур интегрирования в формуле (3.7) деформируем в действительную ось. С помощью теоремы Сохоцкого находим

$$|K_+(\gamma)| = \sqrt{\frac{2\gamma|\gamma - \alpha_0|K_1'(\gamma)}{|\gamma + \alpha_0|K_2(\gamma)}}$$

Для коэффициента отражения получаем

$$|R| = \left| \frac{|\gamma - \alpha_0|}{|\gamma + \alpha_0|} \left| 1 - \frac{4(1-\nu)ik\gamma}{(\gamma^2 + k^2)\Delta} S(\gamma) \right| \right|$$

Если угол падения волны меньше критического, то α_0 – действительная величина и

$$|K_+(\alpha_0)| = \sqrt{\frac{(\gamma + \alpha_0)|K_1(\alpha_0)|}{2\alpha_0(\gamma - \alpha_0)K_2'(\alpha_0)}}$$

Тогда формула для $|T|$ принимает вид

$$|T| = \frac{2}{\gamma + \alpha_0} \sqrt{\frac{\gamma\alpha_0 K_1'(\gamma) [\beta(\alpha_0^2 + k^2)^2 + 1]}{K_2'(\alpha_0)}} \left| 1 - \frac{2(1-\nu)ik(\gamma - \alpha_0)}{(\alpha_0^2 + k^2)\Delta} S(-\alpha_0) \right|$$

В случае, когда угол падения волны больше критического, α_0 – чисто мнимая величина и $|\gamma - \alpha_0| = |\gamma + \alpha_0|$. Получаем

$$|T| = \frac{\sqrt{2\gamma\beta K_1'(\gamma)}}{|K_2'(\alpha_0)K_+(\alpha_0)|} \left| \frac{\alpha_0^2 + k^2}{\gamma - \alpha_0} - \frac{2(1-\nu)ik}{\Delta} S(-\alpha_0) \right|$$

Существует точное энергетическое соотношение [6] между амплитудами $|R|$ и $|T|$

$$|R|^2 + |T|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{K_2'(\alpha_0)}{K_1'(\gamma) [\beta(\alpha_0^2 + k^2)^2 + 1]} \right) = 1 \tag{4.1}$$

Проведенные расчеты показали, что найденные выражения для амплитуд в точности удовлетворяют этому соотношению. Из него следует, что в случае, когда угол падения волны больше критического значения, $|R| = 1$.

Вертикальные смещения пластины и свободной поверхности находим из соотношения $\eta = i\phi_z(x, 0)$. Для возвышения свободной поверхности получаем формулу

$$\eta_-(x) = ie^{i\gamma x} + iRe^{-i\gamma x} + i\beta(\gamma^2 + k^2)K_+(\gamma) \sum_{j=1}^{\infty} e^{i\gamma_j x} \frac{K_+(\gamma_j)}{K'_1(\gamma_j)} \left[\frac{\gamma_j^2 + k^2}{\gamma + \gamma_j} - \frac{2(1-\nu)ik}{\Delta} S(\gamma_j) \right]$$

Первый член представляет собой падающую волну, второй – отраженную волну, а остальные – краевые эффекты (моды, экспоненциально затухающие вдали от кромки).

Для прогиба пластины получаем

$$\eta_+(x) = i\beta(\gamma^2 + k^2)K_+(\gamma) \sum_{j=-2}^{\infty} e^{i\alpha_j x} \frac{K_1(\alpha_j) + 1}{K_+(\alpha_j)K'_2(\alpha_j)} \left[\frac{\alpha_j^2 + k^2}{\gamma - \alpha_j} - \frac{2(1-\nu)ik}{\Delta} S(-\alpha_j) \right]$$

Характер распределения амплитуды прогиба пластины зависит от угла падения волны на пластину. Если угол падения волны меньше критического, то при $x \rightarrow \infty$ смещение пластины представляет собой бегущую волну с амплитудой

$$|\eta| = |T|\lambda_0 \text{th}(\lambda_0 H), \quad \lambda_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + k^2}$$

Если же угол падения волны больше критического, то все корни $\alpha_j (j = -2, -1, 0, \dots)$ имеют мнимую часть, и смещения пластины затухают вдали от края. В случае, когда угол падения волны близок к критическому значению, слегка превышая его, α_0 имеет чисто мнимое значение, близкое к нулю. Тогда затухание амплитуды прогиба очень медленное. Проведенные расчеты показали, что максимальные амплитуды прогиба пластины наблюдаются в кромке. Влияние глубины жидкости на амплитуду прогиба пластины оказалось слабым.

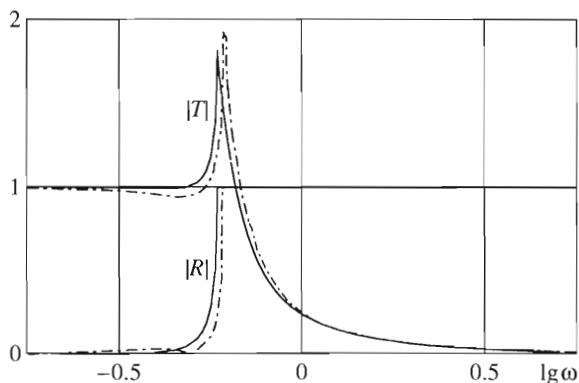
Тензор деформаций пластины в размерных переменных имеет вид

$$e = -\frac{hA}{2l^2} \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \end{array} \right\|$$

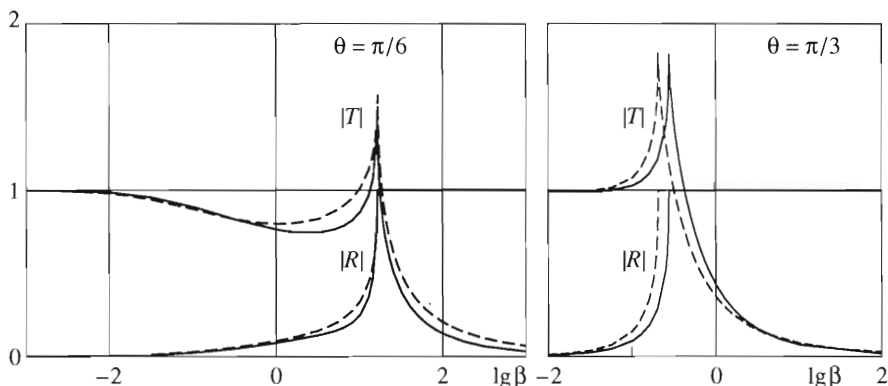
В каждой точке существует направление, в котором достигается максимальная деформация. Максимальная деформация пластины e_{\max} вычисляется как наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы; $e_{\max}(x) = hAe_m(x)/(2l^2)$, где $e_m(x)$ – безразмерная максимальная деформация. При нормальном набегании волны максимальная деформация совпадает с нормальной деформацией $e_n = e_{xx}$, и обе они равны нулю в кромке. В случае косоного набегания деформации в кромке не равны нулю.

5. Численные результаты. Проведены численные расчеты для ледяной полубесконечной пластины толщиной $h = 1.5$ м при следующих значениях параметров [6]: модуль Юнга $E = 6 \cdot 10^9$ Па, плотность льда 922.5 кг/м³, плотность воды 1025 кг/м³.

На фиг. 1 приведено сравнение полученных зависимостей для коэффициентов отражения и прохождения от частоты для этой пластины при угле падения волн $\theta = \pi/3$ (сплошные линии) с соответствующими кривыми, полученными ранее [6] с учетом параметра δ (штрихпунктирные линии). Безразмерная глубина жидкости бралась



Фиг. 1

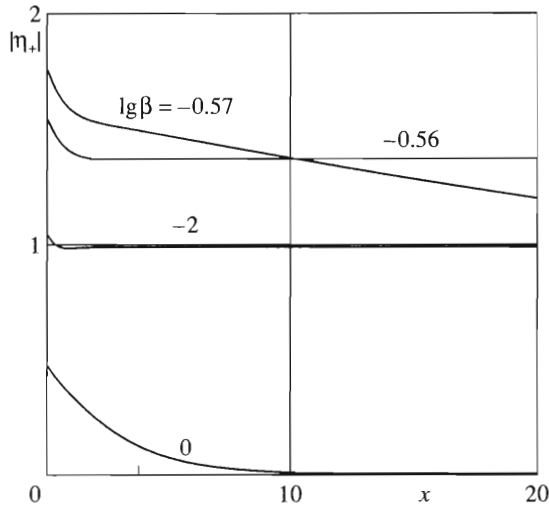


Фиг. 2

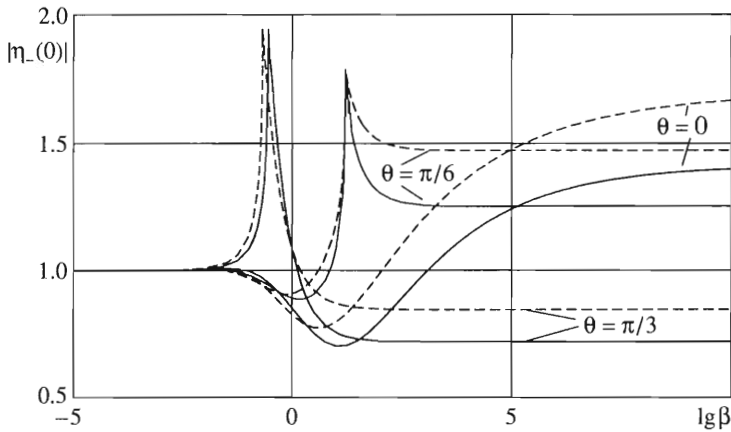
равной 100, в то время как в [6] она была бесконечной. Различие кривых заметно только вблизи критических значений параметров. Следует отметить, что подход Бэлмфорта и Крастера приводит к системе четырех уравнений, которые должны удовлетворяться в точках $\pm\sqrt{\pm\sqrt{\delta/\beta} - k^2}$. При малых значениях δ и больших значениях β эта система близка к вырожденной.

Проведено численное исследование зависимости коэффициентов отражения и прохождения от безразмерных параметров: угла падения волны, безразмерных жесткости пластины β и глубины жидкости H . На фиг. 2 приведены коэффициенты отражения и прохождения в зависимости от параметра β при $\theta = \pi/6$ и $\theta = \pi/3$. Сплошные линии соответствуют $H = 100$, штриховые линии – $H = 1$. Результаты для нормального набега приведены ранее [7]. Из графиков следует, что влияние глубины незначительно, а зависимость от параметров β и θ сильная. Максимальные значения коэффициента прохождения наблюдаются при критических значениях параметров.

На фиг. 3 показано распределение амплитуды прогиба пластины при разных значениях параметра β для угла набега волны $\theta = \pi/3$ и безразмерной глубины $H = 100$. Критическое значение параметра β равно -0.56063 . Значение $\lg \beta = -0.56$ – докритическое, а $\lg \beta = -0.57$ – сверхкритическое.



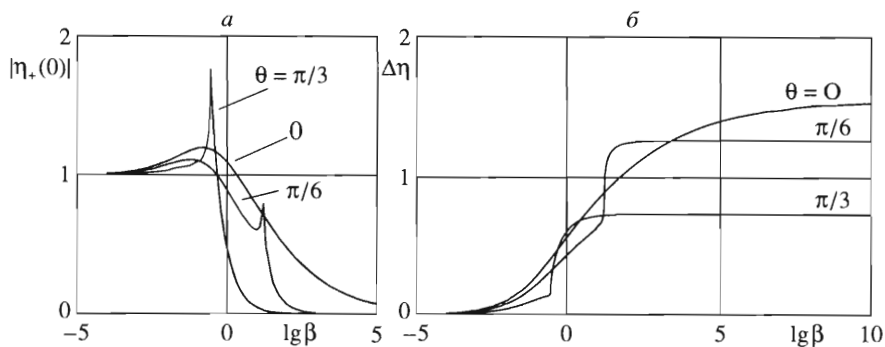
Фиг. 3



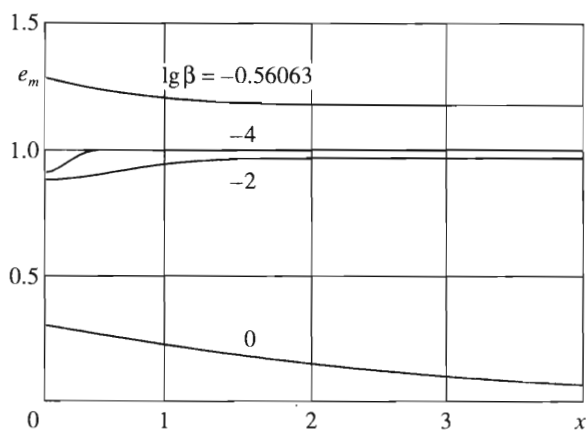
Фиг. 4

На фиг. 4 показана зависимость амплитуды возвышения волны в кромке от параметра β для разных углов набегания волны, сплошные линии соответствуют глубине $H = 100$, штриховые линии – глубине $H = 1$. Как видно из графика, влияние глубины существенно только при больших и закритических значениях параметра β . При косом набегании волны максимальные амплитуды возвышения волны в кромке достигаются при критическом значении угла. Из проведенных расчетов следует, что амплитуда возвышения свободной поверхности максимальна в кромке. Влияние глубины жидкости на возвышение свободной поверхности оказалось более сильным, чем на смещения пластины.

На фиг. 5, а приведена зависимость амплитуды прогиба пластины в кромке при $H = 100$ для разных значений угла набегания волны. Критические значения параметра β соответственно такие: $\beta_* = -0.56063$ при $\theta = \pi/3$ и $\beta_* = 1.2104$ при $\theta = \pi/6$. При $\theta = 0$ все значения параметра β являются докритическими. При критическом значении угла θ амплитуда достигает максимума, он может быть как локальным, так и глобальным.



Фиг. 5



Фиг. 6

Амплитуды смещений пластины и возвышения свободной границы в кромке различны. На фиг. 5, б представлена зависимость разности уровней в кромке от параметра β для разных углов набегания волны при $H = 100$. Как видно из графика, максимальные амплитуды разности уровней достигаются при нормальном набегании волны и больших значениях параметра β , т.е. для коротких волн. При косом набегании волн при критических значениях параметров (соответствующих критическому углу) наблюдается резкий рост амплитуды разности уровней. Если толщина пластины больше амплитуды разности уровней, то край пластины будет периодически выходить из воды и затем хлопать по ней. В этом случае необходимо привлекать другую модель, учитывающую удар.

Проведенные расчеты показали, что деформации пластины сильно зависят от параметра β и угла набегания волны и слабо зависят от глубины жидкости. Если угол падения волны больше критического, деформации пластины вдали от кромки отсутствуют, так как в этом случае все моды затухающие. Поэтому наибольшее значение $e_m(x)$ достигается в кромке. Наименее затухающей является мода, соответствующая корню α_0 . Если же угол падения волны докритический, то наибольшие значения $e_m(x)$ могут достигаться как в кромке, так и на некотором расстоянии от нее, в частности на бесконечности. На фиг.6 показано распределение безразмерных максимальных деформаций $e_m(x)$ по пластине для разных значений параметра β при угле

набегания волны $\theta = \pi/3$ и $H = 100$; значения $\lg \beta = -4, -2$ соответствуют докритическому случаю, значение $\lg \beta = -0.56063$ близко к критическому, а $\lg \beta = 0$ соответствует закритическому случаю.

При малых значениях параметра β (т.е. при очень длинных набегающих волнах) наибольшее значение $e_m(x)$ достигается на некотором конечном расстоянии от кромки (на фиг.6 это кривая, соответствующая $\beta = 10^{-4}$). С увеличением параметра β наибольшее значение $e_m(x)$ достигается уже на бесконечности (кривая, соответствующая $\beta = 10^{-2}$). При дальнейшем увеличении β наибольшее значение $e_m(x)$ смещается к передней кромке (кривая, соответствующая $\lg \beta = -0.56063$). При закритических значениях параметра β функция $e_m(x)$ экспоненциально затухает вдали от кромки (кривые, соответствующие $\beta = 1$).

При фиксированном значении параметра β с увеличением угла падения волны максимальные деформации в кромке растут, пока угол падения волны меньше критического значения, и уменьшаются, если угол становится больше критического значения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00739) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-902.203.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Squire V.A., Dugan J.P., Wadhams P., Rottier P.J., Liu A.K. Of ocean waves and sea ice // Annu. Rev. Fluid Mech. 1995. V. 27. P. 115–168.
2. Марченко А. Изгибно-гравитационные волны // Динамика волн на поверхности жидкости: Тр. ИОФАН. М.: Наука, 1999. Т. 56. С. 65–111.
3. Evans D.V., Davies T.V. Wave-ice interaction. New Jersey: Davidson lab., Stevens Inst. of Technol. 1968. Rep. 1313. 103 p.
4. Варламов В.В. О рассеянии внутренних волн краем упругой пластины // ЖВМиМФ. 1985. Т. 25. № 3. С. 413–421.
5. Гольдштейн Р.В., Марченко А.В. Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова // ПММ. 1989. Т. 53. № 6. С. 924–930.
6. Balmforth N.J., Craster R.V. Ocean waves and ice sheets // J. Fluid Mech. 1999. V. 395. P. 89–124.
7. Ткачева Л.А. Рассеяние поверхностных волн краем плавающей упругой пластины // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 4. С. 88–97.
8. Ткачева Л.А. Дифракция поверхностных волн на плавающей упругой пластине // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 5. С. 121–134.
9. Noble B. Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations. L.: Pergamon Press, 1958 = Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
10. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.