

УДК (532.5; 539.3):534.1

© 2004 г. О. Ю. Ефимова, Н. А. Кудряшов

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА – ХАКСЛИ**

С использованием подстановки Коула – Хопфа, которая, как известно, приводит уравнение Бюргерса к уравнению теплопроводности, получены точные решения уравнения Бюргерса – Хаксли, которое встречается при описании многих нелинейных волновых явлений. Проанализированы типы точных решений в зависимости от значений параметров уравнения.

**1. Введение.** Уравнение Бюргерса – Хаксли

$$U_t + \alpha U U_x = D U_{xx} + \beta U + \gamma U^2 - \delta U^3, \quad D \neq 0 \tag{1.1}$$

встречается при описании многих нелинейных волновых явлений. Предполагается, что  $D$  – коэффициент диффузии,  $\alpha$  характеризует нелинейный перенос, а параметры  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  описывают нелинейный источник.

Например, уравнение

$$\tau P_t = l^2 P_{xx} + \varepsilon P - \zeta P^3 - E \tag{1.2}$$

описывающее движение доменной стенки сегнетоэлектрика в электрическом поле, сводится к уравнению (1.1) с  $\alpha = 0$  линейной заменой. В уравнении (1.2)  $P$  – дипольный момент,  $E$  – внешнее электрическое поле. Левая часть характеризует диссипативный процесс перехода электростатической энергии в тепловую,  $\tau$  – характерное время такого процесса (т.е. время релаксации дипольного момента). Первое слагаемое в правой части уравнения описывает взаимодействие между дипольными моментами соседних областей сегнетоэлектрика, остальные слагаемые определяют величину дипольного момента в однородном сегнетоэлектрике [1].

Уравнения вида (1.1) также используются при описании некоторых экологических моделей. Если в среде происходит размножение какой-либо популяции, то динамика системы при учете смертности и диффузионного перемещения популяции по среде описывается уравнением

$$n_t = -kn + km(n)n^2 + D\Delta n \tag{1.3}$$

Здесь  $n$  – численность популяции в расчете на единицу объема,  $m(n)$  – масса пищи [2]. Если считать, что масса пищи меняется по закону  $m(n) = m_0(1 - n/n_0)$ , то уравнение (1.3) будет уравнением Бюргерса – Хаксли с  $\alpha = 0$ .

При  $\alpha = \delta = 0$  уравнение (1.1) является уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова  $U_t = D U_{xx} + f(x, t) \text{ с } f(x, t) = \beta U + \gamma U^2$ ; оно исследовано ранее [3].

С помощью линейной замены переменных  $U = aU'$ ,  $x = bx'$  и  $t = ct'$  можно, выбирая  $a$ ,  $b$  и  $c$ , зафиксировать любые три коэффициента (однако при таких заменах сохраняется значение выражений  $D\delta/\alpha^2$  и  $\beta\delta/\gamma^2$ ).

Установлено, что уравнение (1.1) не проходит теста Пенлеве [4, 5] и, следовательно, не является точно решаемым уравнением. Однако можно пытаться найти некоторый набор частных решений, что и является целью этой работы.

Обычно точные решения нелинейных уравнений в частных производных находят-ся в переменных бегущей волны [6], т.е. фактически осуществляется переход к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого часто находится проще. Подробное обсуждение этих методов было дано в работе [7]. Ниже будет показано, что применение других методов приводит к более общим классам точных решений, чем при переходе к переменным бегущей волны.

**2. Нахождение точных решений.** Для нахождения точных решений уравнения (1.1) используем преобразование Коула – Хопфа [8, 9]

$$U = AZ_x/Z, \quad Z = Z(x, t) \tag{2.1}$$

Тогда получим уравнение

$$((\alpha A + 3D)Z_{xx} - Z_t - \gamma AZ_x)Z_x Z + (Z_{xt} - DZ_{xxx} - \beta Z_x)Z^2 + (\delta A^2 - \alpha A - 2D)Z_x^3 = 0 \tag{2.2}$$

Пусть  $Z_x \neq 0$  (в противном случае получается тривиальное решение  $U \equiv 0$ , которое не рассматриваем). Приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях  $Z$ , получаем переопределенную систему уравнений относительно  $Z(x, t)$

$$\begin{aligned} Z_{xt} - DZ_{xxx} - \beta Z_x &= 0 \\ (\alpha A + 3D)Z_{xx} - Z_t - \gamma AZ_x &= 0 \\ \delta A^2 - \alpha A - 2D &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Отметим, что при  $\beta = \gamma = \delta = 0$  уравнение (1.1) становится уравнением Бюргерса

$$U_t + \alpha U U_x = D U_{xx} \tag{2.4}$$

Тогда система (2.3) примет вид

$$Z_t = DZ_{xx}, \quad \alpha A + 2D = 0 \tag{2.5}$$

Получаем известный результат Коула – Хопфа: из любого решения уравнения диффузии  $Z_t - DZ_{xx} = 0$  можно получить решение уравнения Бюргерса (2.4) [10, 11] при помощи преобразования (2.1), где  $A$  определяется из второго уравнения системы (2.5).

В дальнейшем рассматриваем случай  $\delta \neq 0$ .

Из последнего уравнения системы (2.3) находим

$$A_{1,2} = \frac{\alpha}{2\delta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\delta^2} + \frac{2D}{\delta}} \tag{2.6}$$

Далее считаем, что условие действительности корней  $A_{1,2}$  выполнено, т.е. подкоренное выражение в правой части равенства (2.6) неотрицательно.

Выражая  $Z_t$  из первого уравнения системы (2.3) и подставляя во второе, получим систему

$$Z_t = DZ_{xx} + \beta Z + C_1(t) \tag{2.7}$$

$$(2D + \alpha A)Z_{xx} - \gamma AZ_x - \beta Z - C_1(t) = 0 \tag{2.8}$$

где  $C_1(t)$  – произвольная функция  $t$ .

Функция  $Z(x, t)$ , определяемая системой (2.7), (2.8), по формуле Коула – Хопфа (2.1) приводит к решению исходного уравнения (1.1). Исследуем его поведение в зависимости от параметров исходного уравнения.

**3. Исследование зависимости точных решений от параметров уравнения.** Вид решения системы (2.7), (2.8) зависит от значений параметров  $\beta$  и  $\gamma$ . Решение уравнения (2.8) зависит также от двух произвольных функций  $t$ , определяемых подстановкой в уравнение (2.7).

Случай  $\beta = 0, \gamma = 0$ . Решая уравнение (2.8), имеем

$$Z(x, t) = C_1(t) \frac{x^2}{2(2D + \alpha A)} + C_2(t) + C_3(t)x \quad (3.1)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (2.7), находим, что

$$C_1(t) = c_1, \quad C_2(t) = \left(1 + \frac{D}{2D + \alpha A}\right)c_1 t + c_2, \quad C_3(t) = c_3$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – произвольные постоянные. Подставляя эти соотношения в равенство (3.1) и переопределяя  $c_1$ , получаем

$$Z(x, t) = c_1 x^2/2 + c_2 + c_3 x + (\alpha A + 3D)c_1 t$$

Используя замену Коула – Хопфа (2.1), находим

$$U = A \frac{c_1 x + c_3}{c_1 x^2/2 + c_2 + c_3 x + (\alpha A + 3D)c_1 t} \quad (3.2)$$

Если  $c_1 = 0$ , то имеем

$$U = A \frac{c_3}{c_3 x + c_2} \quad (3.3)$$

Функция (3.3) обращается в бесконечность в точке  $x = -c_2/c_3$  и от времени не зависит.

Если  $c_1 \neq 0$ , то, разделив числитель и знаменатель выражения (3.2) на  $c_1$  и переобозначив постоянные  $c_2$  и  $c_3$ , имеем

$$U = A \frac{x + c_3}{x^2/2 + c_3 x + c_2 + (\alpha A + 3D)t} \quad (3.4)$$

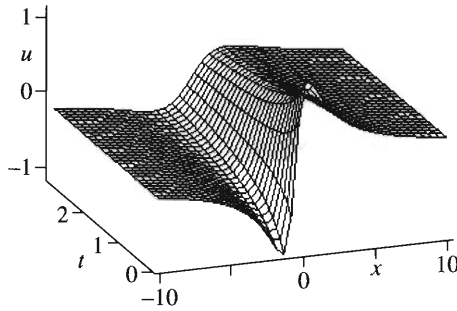
Поведение функции (3.4) определяется начальными условиями и суммой  $\alpha A + 3D$ . Вид функции в начальный момент времени может быть различным: а) если  $c_3^2 - 2c_2 > 0$ , то

функция (3.4) при  $t = 0$  обращается в бесконечность в двух точках:  $x_{1,2} = c_3 \pm \sqrt{c_3^2 - 2c_2}$ ;

б) если  $c_3^2 - 2c_2 = 0$ , то функция имеет одну особую точку  $x = c_3$ ; в) если  $c_3^2 - 2c_2 < 0$ , то особых точек нет. Зависимость функции (3.4) от времени определяется значением выражения  $\alpha A + 3D$ . В случае  $\alpha A + 3D > 0$  амплитуда решения с течением времени уменьшается. При  $\alpha A + 3D < 0$  возникает режим эволюции процесса с обострением, амплитуда функции (3.4) с течением времени увеличивается. Если  $\alpha A + 3D = 0$ , то решение (3.4) со временем не меняется.

Поведение решения (3.4) в зависимости от  $x$  и  $t$  при  $\alpha A + 3D > 0$  и  $c_3^2 - 2c_2 > 0$  иллюстрируется на фиг. 1.

Найденные решения принадлежат классу ограниченных на действительной оси функций при  $c_3^2 - 2(c_2 + (\alpha A + 3D)t) < 0$ .



Фиг. 1

Случай  $\beta = 0, \gamma \neq 0$ . Из уравнения (2.8) имеем

$$Z(x, t) = -\frac{C_1(t)}{\gamma A}x + C_2(t) + C_3(t)\exp(\lambda x) \tag{3.5}$$

где введено обозначение

$$\lambda = \frac{\gamma A}{2D + \alpha A} = \frac{\gamma}{\delta A} \tag{3.6}$$

Используя уравнение (2.7), находим зависимости  $C_1(t), C_2(t)$  и  $C_3(t)$  в виде

$$C_1(t) = c_1, \quad C_2(t) = c_1 t + c_2, \quad C_3(t) = c_3 \exp(D\lambda^2 t)$$

где  $c_1, c_2$  и  $c_3$  – произвольные постоянные. Подставим полученные соотношения в выражение (3.5). Используя явный вид  $\lambda$  (3.6) и переобозначая постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , согласно замене Коула – Хопфа (2.1) получаем

$$U = \frac{\gamma}{\delta} \frac{c_1 - c_3 \exp(\lambda x + D\lambda^2 t)}{c_1 \lambda x + c_2 - c_3 \exp(\lambda x + D\lambda^2 t) - c_1 \gamma^2 t / \delta} \tag{3.7}$$

Изменение  $\lambda$  будет соответствовать растяжению, сжатию или инверсии графиков, поэтому рассмотрим случай  $\lambda = 1$ .

Если  $c_3 = 0$ , то  $c_1 \neq 0$  (иначе  $U \equiv 0$ ). Тогда, переопределив постоянную  $c_2$ , из выражения (3.7) имеем

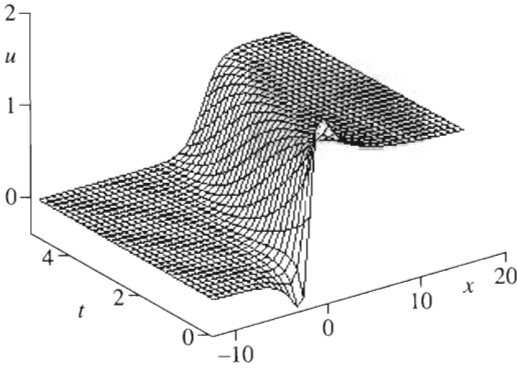
$$U = \frac{A}{x + c_2 - \gamma^2 t / \delta} \tag{3.8}$$

Функция (3.8) имеет одну особую точку  $x = \gamma^2 t / \delta - c_2$ .

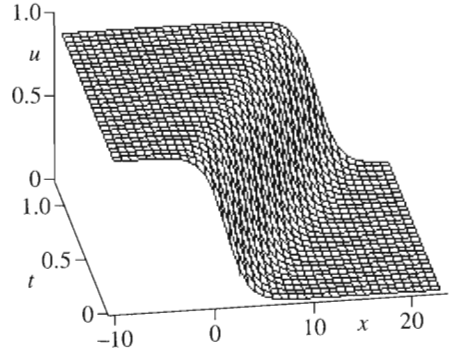
Если постоянная  $c_3 \neq 0$ , то деля на нее числитель и знаменатель выражения (3.7) и переобозначая постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , получим

$$U = \frac{\gamma}{\delta} \frac{c_1 - \exp(x + Dt)}{c_1(x + Dt) + c_2 - \exp(x + Dt) - c_1 t(D + \gamma^2 / \delta)} \tag{3.9}$$

Знаменатель этой функции при  $t = 0$  в зависимости от  $c_1$  и  $c_2$  имеет различное число нулей. Обозначим  $c_* = c_1 - c_1 \ln c_1$ . Тогда функция (3.9) в начальный момент времени дважды обращается в бесконечность при  $\{c_1 > 0, c_2 > c_*\}$  и имеет одну особую точ-



Фиг. 2



Фиг. 3

ку, если  $\{c_1 > 0, c_2 = c_*\}$ ,  $\{c_1 = 0, c_2 > 0\}$  или  $c_1 < 0$ . Функция (3.9) при  $t = 0$  ограничена, если выполнено любое из следующих условий:  $\{c_1 = 0, c_2 \leq 0\}$  или  $\{c_1 > 0, c_2 < c_*\}$ .

Эволюцию во времени решения (3.9) можно рассматривать как одновременные сдвиг по оси  $x$  и изменение параметра  $c_2$ , причем за величину сдвига отвечает параметр  $D$ , а за изменение  $c_2$  – величина  $(\gamma^2/\delta + D)c_1$ . При  $(\gamma^2/\delta + D)c_1 = 0$  решение (3.9) выражается через переменные бегущей волны. В случае  $c_1 > 0, c_2 < c_*$  и  $\gamma^2/\delta + D > 0$  функция (3.9) со временем затухает, ее поведение схоже с демонстрируемым на фиг. 2. Если же  $\gamma^2/\delta + D < 0$ , то ограниченное решение существует лишь конечное время.

Найденные решения принадлежат классу ограниченных на действительной оси функций, если  $\{c_1 > 0, c_2 - c_1(\gamma^2/\delta + D)t < c_1(1 - \ln c_1)\}$  или  $\{c_1 = 0, c_2 \leq 0\}$ .

Случай  $\beta \neq 0, \gamma^2 + 4\delta\beta = 0$ . Из уравнения (2.8) находим

$$Z(x, t) = -C_1(t)/\beta + (C_2(t) + C_3(t)x)\exp(\lambda x); \quad \lambda = \gamma/(2\delta A) \tag{3.10}$$

Подставляя выражение (3.10) в уравнение (2.7), имеем

$$C_1(t) = c_1, \quad C_2(t) = (c_2 + 2\lambda D c_3 t)\exp((D\lambda^2 + \beta)t), \quad C_3(t) = c_3 \exp((D\lambda^2 + \beta)t)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – произвольные постоянные. Отсюда получаем, что

$$Z(x, t) = -c_1/\beta + (c_2 + 2\lambda D c_3 t + c_3 x)\exp(\lambda x + (D\lambda^2 + \beta)t)$$

Тогда по формуле Коула – Хопфа (2.1) находим

$$U = A \frac{\lambda(c_2 + 2\lambda D c_3 t) + \lambda c_3 x + c_3}{c_2 + 2\lambda D c_3 t + c_3 x - (c_1/\beta)\exp(-\lambda x - (D\lambda^2 + \beta)t)} \tag{3.11}$$

Если  $c_3 = 0$ , то, переобозначая постоянную  $c_1$ , получаем решение в переменных бегущей волны

$$U = \frac{\lambda A}{c_1 \exp(-\lambda x - (D\lambda^2 + \beta)t) + 1} \tag{3.12}$$

Функция (3.12) имеет одну особую точку  $x = (\ln(-c_1) - (D\lambda^2 + \beta)t)/\lambda$  при  $c_1 < 0$ . Если  $c_1 \geq 0$ , то решение ограничено на всей числовой оси (этот случай иллюстрируется на фиг. 3).

Если  $c_3 \neq 0$ , то, поделив числитель и знаменатель выражения (3.11) на  $c_3$  и переопределив постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , имеем

$$U = A \frac{\lambda(x + c_2 + 2D\lambda t) + 1}{x + c_2 + 2D\lambda t + c_1 \exp(-\lambda(x + c_2 + 2D\lambda t) + (D\lambda^2 - \beta)t)} \quad (3.13)$$

После введения обозначений  $S_1 = c_1 \exp((D\lambda^2 - \beta)t)$  и  $S_2 = c_2 + 2D\lambda t$  формула (3.13) принимает вид

$$U = A \frac{\lambda(x + S_2) + 1}{(x + S_2) + S_1 \exp(-\lambda(x + S_2))} \quad (3.14)$$

Ограниченность функции (3.14) зависит от произведения  $S_1\lambda$ . Если  $S_1\lambda \leq 0$  или  $S_1\lambda e = 1$  ( $e$  – основание натурального логарифма), то функция (3.14) имеет одну особую точку. При  $0 < S_1\lambda e < 1$  решение обращается в бесконечность дважды. Если  $S_1\lambda e > 1$ , то функция (3.14) ограничена на всей числовой оси (эта ситуация представлена на фиг. 2). Зависимость от времени эквивалентна изменению  $S_1$  и  $S_2$ , причем знак выражения  $S_1\lambda$  не меняется.

Случай  $\beta \neq 0, \gamma^2 + 4\delta\beta > 0$ . Введем обозначения

$$\lambda_{1,2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\delta\beta}}{2\delta A}$$

причем выбираем знаки так, что  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . Тогда из уравнения (2.8) получаем

$$Z(x, t) = -C_1(t)/\beta + C_2(t) \exp(\lambda_1 x) + C_3(t) \exp(\lambda_2 x) \quad (3.15)$$

Функции  $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$  определяются из уравнения (2.7)

$$C_1(t) = c_1, \quad C_2(t) = c_2 \exp((D\lambda_1^2 + \beta)t), \quad C_3(t) = c_3 \exp((D\lambda_2^2 + \beta)t)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – произвольные постоянные. Тогда, подставляя полученные функции в выражение (3.15), имеем

$$Z(x, t) = c_1 + c_2 E_1(x, t) + c_3 E_2(x, t); \quad E_i(x, t) = \exp(\lambda_i x + (D\lambda_i^2 + \beta)t), \quad i = 1, 2$$

Далее по формуле (2.1) вычисляем

$$U = A \frac{\lambda_1 c_2 E_1 + \lambda_2 c_3 E_2}{c_1 + c_2 E_1 + c_3 E_2} \quad (3.16)$$

Если  $c_2 = 0$ , то  $c_3 \neq 0$  (иначе  $U \equiv 0$ ). Тогда, переобозначая постоянную  $c_1$ , имеем

$$U = A \frac{\lambda_2 E_2}{c_1 + E_2} = \frac{A\lambda_2}{1 + c_1 \exp(-\lambda_2 x - (D\lambda_2^2 + \beta)t)} \quad (3.17)$$

При  $t = 0$  функция  $U(x, t)$  обращается в бесконечность в точке  $x = -\ln(-c_1)$  при условии, что  $c_1 < 0$ . Если  $c_1 \geq 0$ , то решение (3.17) ограничено (оно иллюстрируется на фиг. 3). Полученная зависимость является функцией от переменных бегущей волны, течение времени эквивалентно сдвигу по оси  $x$ .

Если постоянная  $c_2 \neq 0$ , то, поделив на нее числитель и знаменатель выражения (3.16) и переобозначив постоянные  $c_1$  и  $c_3$ , имеем

$$U = A \frac{\lambda_1 E_1 + \lambda_2 c_3 E_2}{c_1 + E_1 + c_3 E_2} \quad (3.18)$$

Изменение  $\lambda_1$  эквивалентно изменению масштабов осей. Введем новую переменную  $y = \lambda_1 x$  и обозначение  $p = \lambda_2/\lambda_1$  ( $|p| < 1$ ). Тогда функция (3.18) примет вид

$$U = A\lambda_1 \frac{\exp(y) + S_1 p \exp(py)}{S_2 + \exp(y) + S_1 \exp(py)} \quad (3.19)$$

где параметры  $S_1$  и  $S_2$  зависят от времени и изменяются по законам

$$S_1 = c_3 \exp(D(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)t), \quad S_2 = c_1 \exp(-(D\lambda_1^2 + \beta)t)$$

В зависимости от параметров  $S_1$ ,  $S_2$  и  $p$  знаменатель функции (3.19) обращается в нуль в различном числе точек (сама функция в этих точках имеет полюсы первого порядка). Возможны три варианта: а) два нуля, если  $\{p < 0, S_1 > 0, S_2 < S_*\}$  или  $\{p > 0, S_1 < 0, 0 < S_2 < S_*\}$ ; б) один нуль, если  $\{S_1 p < 0, S_2 = S_*\}$ ,  $\{p > 0, S_1 > 0, S_2 < 0\}$ ,  $\{p > 0, S_1 < 0, S_2 \leq 0\}$ ,  $\{p < 0, S_1 < 0\}$  или  $\{S_1 = 0, S_2 < 0\}$ ; в) нет нулей при  $\{S_1 = 0, S_2 \geq 0\}$  (решение выражается через переменные бегущей волны; оно иллюстрируется на фиг. 3),  $\{S_1 p < 0, S_2 > S_*\}$  (в этом случае поведение решения схоже с представленным на фиг. 2) или  $\{p > 0, S_1 > 0, S_2 \geq 0\}$  (эта ситуация показана на фиг. 4). Здесь введено обозначение  $S_* = ((1-p)/p)(-S_1 p)^{1/(1-p)}$ . Течение времени эквивалентно изменению  $S_1$  и  $S_2$ .

Случай  $\gamma^2 + 4\beta\delta < 0$ . Из уравнения (2.8) получаем

$$Z(x, t) = C_1(t) + \exp(kx)(C_2(t)\sin(lx) + C_3(t)\cos(lx))$$

где

$$k = \frac{\gamma}{2\delta A}, \quad l = \frac{\sqrt{-(\gamma^2 + 4\beta\delta)}}{2\delta A}$$

Определяя функции  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ ,  $C_3(t)$  из уравнения (2.7), получаем

$$Z(x, t) = c_1 + c_2 F_1(x, t) + c_3 F_2(x, t)$$

где

$$F_1(x, t) = E(x, t)\sin(lx + 2Dkl t), \quad F_2(x, t) = E(x, t)\cos(lx + 2Dkl t)$$

$$E(x, t) = \exp(kx + (D(k^2 - l^2) + \beta)t)$$

Здесь  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  – произвольные постоянные. Тогда по формуле Коула – Холфа (2.1)

$$U = A \frac{(kc_2 - lc_3)F_1 + (lc_2 + kc_3)F_2}{c_1 + c_2 F_1 + c_3 F_2} \quad (3.20)$$

При  $\gamma \neq 0$  функция (3.20) имеет бесконечное число особых точек.

Если  $\gamma = 0$ , то  $k = 0$ . Обозначим  $f = Dl^2 - \beta$ . Тогда

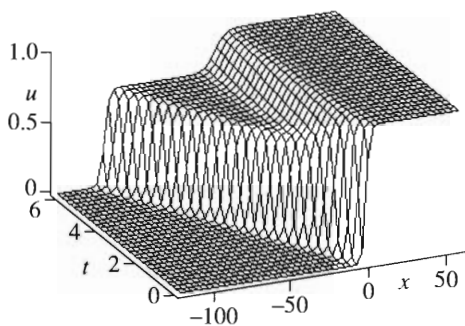
$$U = Al \frac{c_2 \cos(lx) - c_3 \sin(lx)}{c_1 \exp(ft) + c_2 \sin(lx) + c_3 \cos(lx)} \quad (3.21)$$

Из формулы (3.21) следует, что  $U(x, t)$  – периодическая по  $x$  с периодом  $2\pi/l$  функция, причем положение нулей от времени не зависит. Если  $c_1 \neq 0$  и  $f > 0$ , то решение затухает со временем, а полюса с течением времени исчезают. Этот случай представлен на фиг. 5.

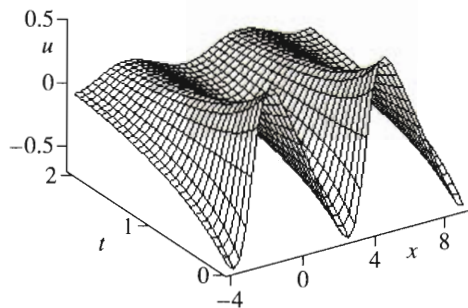
Отметим, что точные решения уравнения (1.1), подобные приведенным выше, могут быть также получены с помощью обобщения преобразования (2.1) вида

$$U = AZ_x/Z + B, \quad Z = Z(x, t)$$

Функция  $Z(x, t)$  и постоянные  $A$ ,  $B$  определяются аналогично описанному ранее.



Фиг. 4



Фиг. 5

Таким образом, получены точные решения уравнения Бюргера – Хаксли (1.1) с помощью преобразования Коула – Хопфа (2.1). Установлено, что при  $\beta = \gamma = 0$  решение выражается рациональной функцией от  $x$  и  $t$ . В случаях  $\beta = 0, \gamma \neq 0$  и  $\beta \neq 0, \gamma^2 + 4\delta\beta \geq 0$  точные решения уравнения (1.1) выражаются через экспоненты и полиномы по  $x$  и  $t$ . При  $\gamma = 0, \beta\delta < 0$  существует периодическое по  $x$  решение, затухающее с течением времени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Осипов В.В. Простейшие автоволны // Соросовский образовательный журн. 1999. № 7. С. 115–121.
2. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 270 с.
3. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. А. 1937. № 6. С. 1–26.
4. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: МИФИ, 2002. 304 с.
5. Kudryashov N.A. Partial differential equations with solutions having movable first-order singularities // Phys. Lett. A. 1992. V. 169. № 4. P. 237–242.
6. Кудряшов Н.А. Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465–470.
7. Кудряшов Н.А., Сухарев М.Б. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 884–894.
8. Cole J.D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. V. 9. № 3. P. 225–236.
9. Hopf E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$  // Comm. Pure and Appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.
10. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Applied Mechanics. N.J.: Acad. Press. 1948. V. 1. P. 171–199.
11. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.