

УДК 531.6: 532.5

© 2004 г. Э. К. Лавровский, В. В. Фоминых

### ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ ЛИНЗ ПРИ УЧЕТЕ РЕАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Рассматривается модельная постановка задачи о формах равновесия вращающейся океанической линзы однородной плотности, центр которой покоится относительно Земли. Учитываются все компоненты угловой скорости вращения Земли в отличие, например, от характерного для океанологии учета только одной вертикальной компоненты этой скорости. Окружающий линзу океан предполагается покоящимся, а его плотность распределенной по линейному закону. Форма равновесия – это поверхность, на которой давления в линзе и океане равны, при этом на данной поверхности допускается разрыв касательных компонент скоростей в точках обеих сред. Предлагается обобщение точного решения этой задачи, полученного ранее [1] для случая однородного поля тяжести Земли, на случай приближенного к реальному потенциального гравитационного поля и с учетом переменного характера поля центробежных сил. Решение носит оценочный характер и позволяет, например, указать нижнюю границу диапазона угловых скоростей собственного вращения линзы, начиная с которой более точный учет поля тяготения Земли необходим, поскольку он начинает существенно влиять на вид искомой формы равновесия.

В последние 15–20 лет в океане на глубинах порядка километра были обнаружены огромные вихревые образования, отличающиеся от окружающей воды своими свойствами – температурой, соленостью, плотностью, химическим составом, прозрачностью, т.е. содержащие водную массу, принадлежащую по своей гидрологии районам, удаленным от мест обнаружения вихрей на тысячи километров. Данные образования по форме напоминали выпуклые линзы, и за ними закрепилось это название. Океанические линзы перемещаются на тысячи километров, и период их существования составляет несколько лет. Механизм, объясняющий их движение в толще океана (в основном на юго-запад в северном полушарии), причина их долгой, порядка нескольких лет, жизни привлекает внимание к данной проблеме. Ниже изучается вопрос долгоживучести линз. Строятся так называемые формы равновесия линз с учетом реального гравитационного поля Земли.

**1. Гидродинамические уравнения.** Рассмотрим модельную постановку задачи о форме равновесия вращающейся линзы, центр масс которой покоится относительно Земли, в случае, когда учитываются все компоненты угловой скорости Земли (в океанологии при рассмотрении подобных задач обычно учитывается только вертикальная компонента).

Выберем систему координат  $S_{xyz}$  с началом в центре масс  $S$  линзы, связанную с Землей. Оси  $x, y, z$  направлены соответственно на восток, на север и вдоль внешней местной нормали в данной точке. Пусть центр масс линзы покоится в океане. Рассмотрим полные уравнения (см. например, [2]) стационарного движения идеальной жидкости в теле линзы в форме Громеки–Лэмба в случае ее постоянной плотности  $\rho = \rho_0$

$$[(2\boldsymbol{\Omega} \times \text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v}] + \text{grad} \frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p + \mathbf{g} \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – вектор относительных скоростей частиц линзы,  $\mathbf{\Omega}$  – вектор угловой скорости вращения Земли,  $p$  – давление. В записанных выше динамических уравнениях кориолисова сила инерции (со знаком минус) учитывается соответствующим членом слева, содержащим вектор  $\mathbf{\Omega}$ ; остальные члены отвечают относительному ускорению. Вектору  $\mathbf{g}$  в правой части отвечает сумма ускорений за счет чистой гравитации и центробежной силы инерции из-за вращения системы  $S_{xyz}$  вокруг оси вращения Земли. Этот вектор направлен по соответствующей нормали, не совпадающей, вообще говоря, по направлению с нормалью в начале координат  $C$ . Будем считать гравитационное поле потенциальным, характеризующимся некоторой функцией  $U_{gr}$ .

Ввиду выбора осей  $S_{xyz}$  компонента  $\Omega_x = 0$ , а проекции  $\Omega_y, \Omega_z$  – постоянные, зависящие от широты. Аналогичные уравнения могут быть написаны и для океана с заменной постоянной плотности  $\rho_0$  на переменную плотность  $\rho$ .

**2. Представление вектора  $\mathbf{g}$ .** Рассмотрим произвольную точку на эллипсоидальной Земле, отвечающую геоцентрической широте  $\varphi$  и радиус-вектору  $\mathbf{R}_0$  из геометрического центра Земли. Положим, например, что чистая гравитация характеризуется в окрестности данной точки постоянным модулем ускорения  $g_0 = \text{const}$  и направлена строго по местному радиус-вектору к центру Земли. Тогда

$$g^2 = g_0^2 + \Omega^4 R_0^2 \cos^2 \varphi - 2g_0 \Omega^2 R_0 \cos^2 \varphi$$

$$g_0 \sin \alpha = \Omega^2 R_0 \cos \varphi \sin \psi, \quad g \sin \alpha = \Omega^2 R_0 \cos \varphi \sin \varphi, \quad \psi = \alpha + \varphi$$

Здесь  $\alpha$  – угол между радиус-вектором рассматриваемой точки и местной вертикалью. В частности, в силу такого выбора углов компоненты вектора  $\mathbf{\Omega}$  в левой части уравнений (1.1) имеют вид

$$\Omega_y = \Omega \cos \varphi, \quad \Omega_z = \Omega \sin \varphi$$

**3. Гидростатика океана.** Из уравнений гидростатики

$$g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

в условиях плоскопараллельного поля тяжести Земли с вертикальной осью  $z$  следует

$$\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0, \quad -\rho g_0 = \partial p / \partial z$$

где  $g_0 \equiv \text{const}$ . Эта система имеет решение  $p(x, y, z) \equiv p(z)$  при любой плотности  $\rho = \rho(z)$ . В рассматриваемой более сложной задаче статическое решение естественно пытаться искать сходным образом, задавая  $\rho$  как функцию местной “высоты”  $h$ , зависящей от  $x, y, z$ .

Возникает вопрос, какова в общем случае должна быть структура плотности океана  $\rho(x, y, z)$ , чтобы функция  $p$  всегда существовала. Наряду с системой координат  $S_{xyz}$  введем в рассмотрение связанные с центром Земли  $O$  оси  $OXYZ$ . Ось  $OZ$  направлена на северный полюс, ось  $OY$  лежит в меридиональной плоскости точки  $C$  и является экваториальной осью Земли. Ось  $OX$  выбрана так, чтобы вся система  $OXYZ$  (как и система  $S_{xyz}$ ) была правой. Формулы перехода от одних координат к другим имеют вид

$$X = -x, \quad Y = R_0 \cos \varphi - y \sin \psi + z \cos \psi, \quad Z = R_0 \sin \varphi + y \cos \psi + z \sin \psi$$

Функцию  $\rho(x, y, z)$  будем строить в окрестности точки  $C$ .

Найдем компоненты суммарного ускорения  $\mathbf{g}$  (за счет гравитации и центробежной силы) в осях, связанных с Землей. Получаем

$$g_x = \frac{\partial U_{gr}}{\partial X} + \Omega^2 X, \quad g_y = \frac{\partial U_{gr}}{\partial Y} + \Omega^2 Y, \quad g_z = \frac{\partial U_{gr}}{\partial Z}$$

Вводя “общую” потенциальную функцию

$$U = U_{gr} + \Omega^2 r^2 / 2, \quad r^2 \equiv X^2 + Y^2 = R^2 - Z^2$$

компоненты вектора  $\mathbf{g}$  можем записать как градиент функции  $U$ . Ищется такая плотность  $\rho(X, Y, Z)$  (или же  $\rho = \rho(h)$ , где  $h = h(X, Y, Z)$ ), чтобы выполнялись условия согласования по функции  $p$  в системе (3.1), т.е.

$$\frac{\partial(g_X \rho)}{\partial Y} = \frac{\partial(g_Y \rho)}{\partial X}, \quad \frac{\partial(g_X \rho)}{\partial Z} = \frac{\partial(g_Z \rho)}{\partial X}, \quad \frac{\partial(g_Y \rho)}{\partial Z} = \frac{\partial(g_Z \rho)}{\partial Y} \quad (3.2)$$

Подставим в систему (3.2) вектор-функцию  $\mathbf{g}$ , выраженную через потенциал  $U$ . Полагая функцию  $U$  дважды непрерывно-дифференцируемой, получаем систему соотношений

$$\frac{\partial \rho \partial U}{\partial Y \partial X} = \frac{\partial \rho \partial U}{\partial X \partial Y}, \quad \frac{\partial \rho \partial U}{\partial Z \partial X} = \frac{\partial \rho \partial U}{\partial X \partial Z}, \quad \frac{\partial \rho \partial U}{\partial Z \partial Y} = \frac{\partial \rho \partial U}{\partial Y \partial Z} \quad (3.3)$$

в которой третье соотношение – следствие первых двух.

Рассмотрим первое уравнение (3.3). Его решение относительно  $\rho$  имеет вид

$$\rho(X, Y, Z) = \Phi_1(Z, U(X, Y, f(Z)))$$

(где  $\Phi_1, f$  – произвольные функции), поскольку соответствующая система

$$\frac{dX}{\partial U / \partial Y} = - \frac{dY}{\partial U / \partial X} = \frac{dZ}{0}$$

имеет два первых интеграла  $Z = \text{const}$  и  $U(X, Y, f(Z)) = \text{const}$ . При решении второго уравнения (3.3) аналогично получаем

$$\rho(X, Y, Z) = \Phi_2(Y, U(X, \varphi(Y), Z))$$

Сравнивая оба получившихся выражения для одной и той же функции  $\rho$ , заключаем, что  $\rho$  может зависеть от  $Z$  и  $Y$  только сложным образом в силу зависимости функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  от  $U$ . Рассуждая после этого дальше, можно показать, что  $f(Z) \equiv Z$ ,  $\varphi(Y) \equiv Y$ . Отсюда вытекает, что решением системы (3.3) является

$$\rho(X, Y, Z) = \rho(h(U)), \quad U = U(X, Y, Z)$$

где  $h$  – произвольная достаточно гладкая функция. В качестве  $h$  можно рассматривать и саму функцию  $U$ , однако, как нетрудно заметить, функция  $U$  имеет размерность ускорения, умноженного на линейный размер. Поэтому в качестве  $h$  удобнее рассматривать величину размерности длины  $h = -U/g_*$ . Здесь  $g_*$  – характерное ускорение силы тяжести, например,  $g_* = 9.81 \text{ м/с}^2$ . Итак, плотность в статически уравновешенном океане сохраняет постоянное значение вдоль эквипотенциальных поверхностей суммарной силовой функции и равна  $\rho = \rho(-U/g_*)$ .

Найдем распределение давления в статически уравновешенном океане. Из формул гидростатики имеем

$$\partial p / \partial X = \rho(-U/g_*) \partial U / \partial X = (-g_*) \partial (\int \rho(h) dh) / \partial X$$

и так далее по двум другим переменным  $Y, Z$ . Отсюда

$$p \equiv p_f = p_0 - g_* \int \rho(h) dh$$

В предположении о линейном распределении плотности в окрестности характерного горизонта линз  $h_0$  имеем  $\rho = \rho_0 + kh_0 - kh$  (принято обозначение  $k = \rho_0 N^2/g_*$ , где  $N$  – частота Брента–Вяйсяля на уровне  $h_0$ ), откуда

$$\begin{aligned} p_f &= p_0 - g_*(\rho_0 + kh_0)h + g_*kh^2/2 = p_0 + (\rho_0 + kh_0)U + kU^2/(2g_*) = \\ &= \text{const} + \rho_0 U + k(U - U_0)^2/(2g_*), \quad U_0 = -g_*h_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Например, подставляя в эту формулу величину  $U = -Rg_0 + \Omega^2 r^2/2$ , что отвечает случаю постоянного по модулю гравитационного поля, приходим к выражению

$$p_f = p_0 + (\rho_0 + kh_0)(\Omega^2 r^2/2 - Rg_0) - k(Rr^2\Omega^2/2 - g_0R^2/2 - r^4\Omega^4/(8g_0))$$

Для приближенного гравитационного потенциала эллипсоидальной Земли часто используется представление (см. , например, [3])

$$U_{\text{гр}} \approx \frac{\mu}{R} \left( 1 + \frac{I_2 R_{\text{eq}}^2}{2R^2} \left( 3 \frac{Z^2}{R^2} - 1 \right) \right) \quad (3.5)$$

где  $\mu \approx 3.986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ,  $I_2 \approx -1.082 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\text{eq}}$  – экваториальный радиус Земли. Отсюда получаем соответствующее распределение давления  $p_f$  в океане.

**4. Формы равновесия линз.** Рассмотрим тело линзы. Здесь плотность постоянна и равна  $\rho_0$ . Давление внутри линзы согласно соотношениям (1.1) является суммой динамического и статического слагаемых. “Динамический” член, если используется “слоистое” [1] поле скоростей внутри линзы (отвечающее случаю плоскопараллельного гравитационного поля и мало отличающееся от реального), описывается указанной в [1] формулой, тогда как статический член ввиду того, что градиент плотности внутри линзы отсутствует ( $k = 0$ ), согласно формуле (3.4) равен

$$p = \rho_0 U + \text{const}$$

Полученные решения позволяют сформулировать гидродинамическую задачу о равновесной форме линзы. Будем считать, что равновесная форма линзы – это поверхность, где давления со стороны океана и линзы равны. Вместе с тем, на этой поверхности допускается [1] скачок касательных компонент скоростей. В результате имеем следующее уравнение поверхности равновесия:

$$p(0, 0, 0) + \frac{\rho_0 \omega}{2} (\omega + 2\Omega_z)(x^2 + y^2) - 2\Omega_y \rho_0 \omega yz + \frac{2\Omega_y^2 \rho_0 \omega z^2}{\omega + 2\Omega_z} = \text{const} + \frac{k}{2g_*} (U - U_0)^2 \quad (4.1)$$

Значение  $U_0$  отвечает потенциалу в центре линзы – точке  $C$ ,  $\omega$  – угловая скорость собственного вращения линзы. При рассмотрении “полного” гравитационного поля вместо  $U$  надо подставить выражение  $U = U_{\text{гр}} + \Omega^2(X^2 + Y^2)/2$ , причем  $U_{\text{гр}}$  определяется формулой (3.5). При рассмотрении приближенного плоскопараллельного случая  $U = -g_*z$ , где  $g_*$  – ускорение силы тяжести на данной широте. В случае “полного” поля правая часть уравнения (4.1) содержит радикалы; в плоскопараллельном случае оно описывает поверхность второго порядка.

Из рассмотрения правой части уравнения (4.1) вытекает, что в случае, когда угловая скорость  $\omega$  пренебрежимо мала, поверхность равновесия соответствует условию  $U \approx U_0 + \text{const}$ . Это решение практического интереса не имеет. Так, например, в случае  $\Omega = 0$  и постоянного по модулю гравитационного поля решением является сферический слой, охватывающий весь мировой океан. Наоборот, при  $|\omega| \rightarrow \infty$  уравне-

ние (4.1) переходит в уравнение кругового цилиндра  $\omega(x^2 + y^2) = \text{const}$ . Естественно, возможны и другие равновесные формы, в зависимости от конкретных значений параметров, в том числе и параметров, характеризующих отклонение гравитационного поля от принятого [1] плоскопараллельного. Найденная ранее [1] эллипсоидальная форма равновесия (для антициклонически закрученных линз) отвечает следующему условию, ограничивающему угловую скорость собственного вращения:  $\omega < 0, 2\Omega \sin \varphi - |\omega| > 0$ .

Исследуем изменение формы равновесия линзы при изменении параметра  $\omega$  в этом диапазоне. Приводимые ниже результаты расчетов выполнялись при условии, что гравитационное поле или плоскопараллельное [1], или “центральное” вида (3.5), а также в предположении, что  $\omega = -\xi\Omega$ , где число  $\xi \in (0, 1)$ . Угол широты  $\varphi$  принят равным  $20^\circ$ , поэтому имеет смысл рассматривать диапазон  $-0.684\Omega < \omega < 0$ . Плоскопараллельному случаю отвечает форма равновесия, близкая к эллипсоиду вращения вокруг вертикальной оси, горизонтальная полуось которого пусть равна 20 км; размер по местной вертикали (он близок к длине вертикальной полуоси эллипсоида) при этом легко вычисляется.

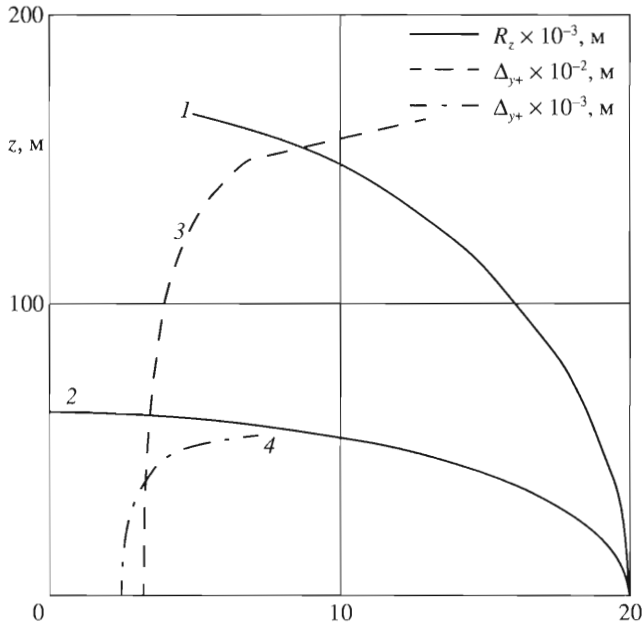
Опишем характерные отклонения форм сечений на разных уровнях  $z$  поверхности равновесия, получаемой при использовании гравитационного потенциала (3.5) (назовем такую поверхность “новой”), от соответствующих форм сечений “старой” поверхности, отвечающей плоскопараллельному полю. Заметим, что в последнем случае сечениями всегда являются окружности радиуса  $R_z$ , зависящего от  $z$ , с центрами, смещенными на величину  $y_0(z) = 2\Omega_z z / (\omega + 2\Omega_z)$  по оси  $y$ . Значения постоянных  $\rho_0, \omega, \Omega$  в формуле (4.1) принимались одними и теми же в обоих случаях. Разность давлений  $p(0, 0, 0) - \text{const}$  в центре линзы и в океане на уровне  $z = 0$  выбиралась одинаковой, т.е. такой, чтобы обеспечить в случае плоскопараллельного поля величину  $R_z(z = 0)$  равной 20 км. Квадрат частоты Брента–Вяйсяля принят равным  $N^2 = 7 \cdot 10^{-6} \text{ 1/c}^2$ .

Как показывают расчеты, формы равновесия в случае потенциала (3.5) – поверхности, лежащие внутри “старого” эллипсоида равновесия. Сечения данной поверхности на разных  $z$ -уровнях представляют собой гладкие овалы, лежащие внутри “старых” окружностей. Символом  $\Delta$  будем обозначать расстояние между “старыми” и “новыми” сечениями на соответствующих  $z$ -уровнях, измеряемые по лучам, исходящим из центров “старых” окружностей. Как оказалось, экстремальными свойствами обладают значения  $\Delta$ , отвечающие лучам в положительном и отрицательном направлениях оси  $y$ , что дает отклонения  $\Delta_{y+}, \Delta_{y-}$ . По аналогии будем рассматривать также величины  $\Delta_{x+}, \Delta_{x-}$ , причем в силу определенной симметрии формул  $\Delta_{x+} = \Delta_{x-} \equiv \Delta_x$ .

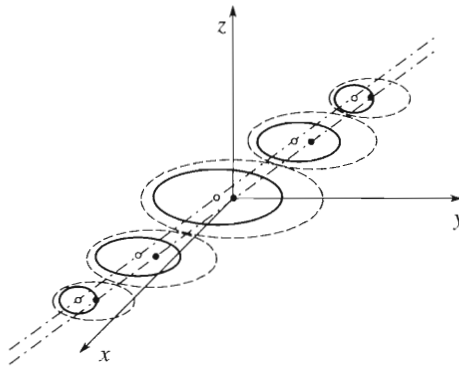
*Случай  $\omega = -0.2\Omega$ .* Данное соотношение угловых скоростей близко к реально наблюдаемому. Максимальное значение координаты  $z$  “старого” эллипсоида (вертикальный “размер”) равно  $z_{\text{max}} = 171.04$  м. Ему отвечает максимальная величина смещений центров окружностей  $y_{0\text{max}} = 664.11$  м. Отношение большой и малой полуосей “старого” эллипсоида составляет 116.93.

Экстремальные значения координаты  $z$  “новой” поверхности близки по модулю и составляют  $\pm 168.36$  м. Из анализа численных результатов можно сделать ряд выводов относительно величин  $\Delta$ . Наибольшее из рассогласований  $\Delta$  между “старой” и “новой” поверхностями наблюдается по положительному направлению оси  $y$ , причем величина  $\Delta_{y+}$  (кривая 3 на фиг. 1) растет с ростом  $|z|$ . Все величины  $\Delta_{y+}, \Delta_{y-}, \Delta_x$  различаются слабо. На той же фиг. 1 представлена четная функция  $R_z(z)$  (кривая 1), отвечающая “старой” поверхности; функция  $\Delta_{y+}(z)$  – почти четная. Отметим, что все величины на фиг. 1 указаны, хотя и в разных масштабах (по горизонтали), в метрах. Наибольшее расхождение между точками “старой” и “новой” поверхностей равновесия находится, видимо, в плоскости  $z = 0$  и составляет около 1.5%.

Качественно вид “старой” и “новой” поверхностей (в виде “сечений” по  $z$ ) изображен на фиг. 2. Штриховой линией показаны контуры “сечения” формы равновесия,



Фиг. 1



Фиг. 2

отвечающей случаю плоскопараллельного поля тяжести, сплошной линией – случаю “полного” поля. Центры “старых” окружностей, лежащие на упомянутой выше прямой  $y = y_0(z)$ , показаны темными точками. Центры “новых” сечений показаны светлыми точками, они лежат на (почти) прямой, параллельной  $y = y_0(z)$ , несколько смещенной к югу. В данном случае это смещение составляет около 12 м, но при дальнейшем уменьшении угловой скорости  $\omega$  оно заметно увеличивается. Окаймляющие линии, проведенные через разрезы, контуры которых даны пунктиром и сплошной линиями, определяют “старую” и “новую” поверхности равновесия. На фиг. 2 они не показаны.

Случай  $\omega = -0.02\Omega$ . Максимальный вертикальный “размер” “старого” эллипсоида  $z_{\max} = 63.35$  м. Ему отвечает максимальная величина смещений центров окружностей

$y_{0\max} = 179.30$  м. Отношение большой и малой полуосей “старого” эллипсоида равно 315.70.

Экстремальные значения координаты  $z$  “новой” поверхности практически совпадают (по модулю) – 55.72 м. Величины  $\Delta_{y+}$  растут от значения 2487 м при  $z = 0$  до 7181 м при  $z = 55$  м. Графики функций  $\Delta_{y+}$  и  $R_z$  от  $z$  в этом случае представлены кривыми 4 и 2 на фиг. 1.

Случай  $\omega = -0.005\Omega$ . Максимальный вертикальный размер “старого” эллипсоида  $z_{\max} \approx 32$  м. Ему отвечает максимальная величина смещений центров окружностей  $y_{0\max} \approx 88$  м. Отношение большой и малой полуосей “старого” эллипсоида равно 624. Максимальный вертикальный размер линзы, отвечающей “новой” форме равновесия, составляет около 15 м. Имеет место отклонение  $\Delta_{y+} \approx 13528$  м на уровне  $z = 0$ .

Приведенные результаты показывают, что в случае  $\omega = -0.02\Omega$  обе формы различаются примерно на 10%, а при уменьшенной еще в четыре раза угловой скорости влияние гравитационных факторов на форму равновесия может оказаться решающим. Следует, однако, отметить, что более точный учет влияния гравитационных факторов требует построения более точного поля скоростей внутри линзы, нежели предложенное ранее [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00165).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лавровский Э.К., Семенова И.П., Слезкин Л.Н., Фоминых В.В. Средиземноморские линзы – жидкие гироскопы в океане // Докл. РАН, 2000. Т. 375. № 1. С. 42–45.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Ч. I. М.: Гостехиздат, 1955. 560 с.
3. Белецкий В.В. Очерки о движении небесных тел. М.: Наука, 1972. 359 с.

Москва  
e-mail: lavrov@imec.msu.ru

Поступила в редакцию  
8.1.2003