УДК 551.466.81: 534.1

© 2004 г. М. А. Давыдова, Ю. Д. Чашечкин

# СТРУКТУРА ТРЕХМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Изучаются малые трехмерные движения слабовязкой стратифицированной жидкости, порождаемые вертикальными и крутильными колебаниями части поверхности бесконечного вертикального цилиндра с произвольным сечением. Для анализа структуры периодических движений используется асимптотический метод пограничных функций. Показано, что формируются два типа пограничных слоев, один из которых обладает свойствами стоксова пограничного слоя в однородной жидкости; другой, внутренний волновой пограничный слой является специфическим для неоднородных сред, его толщина зависит как от частоты волны, так и от частоты плавучести. При переходе к однородной жидкости вязкий и внутренний пограничные слои сливаются.

В последние годы значительное внимание стали уделять анализу пограничных слоев, которые образуются как на ограничивающих поверхностях, так и на свободной поверхности вязкой взволнованной жидкости [1]. Учет пограничных эффектов позволяет строить точные решения задачи генерации двумерных и трехмерных внутренних волн в линейной [2] и нелинейной [3] постановках, существенно расширяет число сценариев нелинейных механизмов формирования и эволюции внутренних волн [4]. В этой связи представляет интерес более детальный расчет параметров волновых слоев на периодически движущейся поверхности в непрерывно стратифицированной жидкости. Хотя подобная задача для однородной вязкой жидкости была изучена еще Стоксом, аналогичный анализ для трехмерных периодических движений в непрерывно стратифицированной жидкости ранее не проводили.

Система уравнений, описывающая периодические движения непрерывно стратифицированных слабовязких сред, относится к классу сингулярно возмущенных, для решения которых развит ряд асимптотических и численных методов. В данной работе анализ структуры периодических движений выполняется асимптотическим методом пограничных функций [5]. Строится решение в виде асимптотического разложения по малому параметру, обладающее свойствами решения вырожденной системы внутри области и удовлетворяющее граничным условиям за счет введения в асимптотику пограничных функций, экспоненциально затухающих с удалением от границы. Малым параметром асимптотического разложения выбирается вязкость. Технически простой метод анализа сингулярно возмущенных задач был успешно использован при изучении колебаний жидкости, распространения звука и других задач гидроаэродинамики [6–8].

**1. Постановка задачи.** Линеаризованная система уравнений в приближении Буссинеска, которая описывает малые трехмерные движения несжимаемой вязкой стратифицированной жидкости с примесью в поле силы тяжести, имеет вид

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\operatorname{grad}p + \rho_0\nu\Delta\mathbf{u} - \rho g\mathbf{e}_z$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_3\frac{d\rho_0}{dz} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор скорости, $p$ и $\rho$ – динамические давление и плотность, $\rho_0(z) = \rho_{00}\exp(-z/\Lambda)$ – невозмущенная плотность, $\Lambda$ – масштаб плавучести, $g$ – ускорение силы тяжести, $\nu$ – кинематическая вязкость, $\mathbf{e}_z$ – единичный орт в направлении оси $Z$.

Движение жидкости происходит за счет гармонических колебаний с частотой $\omega$ части бесконечного вертикального цилиндра с произвольным сечением, ось которого совпадает с направлением поля тяжести, причем граничные условия на поверхности цилиндра имеют вид

$$\mathbf{un}|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{u\tau}_1|_\Gamma = U^1(x, y, z)e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{u\tau}_2|_\Gamma = U^2(x, y, z)e^{-i\omega t} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к достаточно гладкой поверхности цилиндра $\Gamma$, $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ – единичные векторы, ориентированные в каждой точке поверхности $\Gamma$ вдоль главных ортогональных направлений; $U^1(x, y, z)$, $U^2(x, y, z)$ – заданные функции.

Вводя безразмерные координаты, время и скорость как отношение соответствующих физических величин к их характерным для данной задачи постоянным значениям и полагая, что безразмерная вязкость $\nu$ равна $\mathrm{Re}^{-1}$, из системы (1.1) получаем безразмерную систему (все обозначения, с целью удобства, сохранены)

$$\begin{gathered} -i\omega\rho_0\mathbf{u} = -\operatorname{grad}p + \nu\rho_0\Delta\mathbf{u} - \rho g\mathbf{e}_z \\ -i\omega\rho + u_3\frac{d\rho_0}{dz} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Для сокращения выкладок в рассмотрение вводится представление для скорости, с помощью которого амплитуда скорости определяется следующим образом:

$$\mathbf{u} = \nabla\times(\mathbf{e}_z\Psi) + \nabla\times\nabla\times(\mathbf{e}_z\Phi) \tag{1.4}$$

Используя представление (1.4), из системы (1.3) находим определяющую систему задачи для функций $\Psi$ и $\Phi$

$$[\omega^2\Delta - i\omega\nu\Delta^2 - N^2\Delta_2]\Phi = 0 \quad (\omega - i\nu\Delta)\Psi = 0; \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.5}$$

где $N^2$ – квадрат безразмерной частоты плавучести.

С учетом представления (1.4) из условий (1.2) получаются граничные условия для системы (1.5), явный вид которых будет приведен ниже.

**2. Колебания цилиндра в среде с малой вязкостью.** Если $\nu$ – малый безразмерный параметр: $\nu = \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon \le 1$, то из системы (1.5) получаем

$$[\omega^2\Delta - i\omega\varepsilon^2\Delta^2 - N^2\Delta_2]\Phi = 0, \quad (\omega - i\varepsilon^2\Delta)\Psi = 0 \tag{2.1}$$

Система (2.1) является сингулярно возмущенной, так как входящие в нее дифференциальные операторы содержат малые параметры при старших производных.

При переходе к идеальной жидкости ($\varepsilon = 0$) получаем вырожденную систему

$$L_0\Phi^r \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)\Delta_2\right]\Phi^r = 0, \quad \omega\Psi^r = 0 \tag{2.2}$$

Оператор $L_0$ зависит от параметра $\omega$, и поэтому рассматриваются два случая: если $|\omega| > N$, то $L_0$ – оператор эллиптического типа, если же $|\omega| < N$, то $L_0$ – гиперболический оператор. С физической точки зрения, эти два случая различаются возможностями существования установившихся волн в части пространства, удаленной от границы цилиндра.

Для описания решения вблизи границы вводится локальная система координат $(r, \sigma_1, \sigma_2)$, где $r$ – расстояние от точки $M(r, \sigma_1, \sigma_2)$ до границы $\Gamma$ вдоль нормали $M_0M$ к $\Gamma$ ($M_0 \in \Gamma$), а $\sigma_1, \sigma_2$ – криволинейные координаты точки $M_0$ на $\Gamma$. Если окрестность

$$\Gamma_\delta = (0 \le r \le \delta) \times (0 < \sigma_1 \le \Sigma_1) \times (-\infty < \sigma_2 \le +\infty)$$

достаточно мала (т.е. параметр $\delta$ достаточно мал), то существует однозначное соответствие между координатами $(x, y, z)$ и $(r, \sigma_1, \sigma_2)$.

Граничные условия для системы (2.1) получаем из условий (1.2) с учетом представления (1.4)

$$\left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma_1} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma_2\partial r}\right]_\Gamma = 0, \quad \left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma_2\partial\sigma_1} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\right]_\Gamma = u^1(\sigma_1, \sigma_2)$$
$$\frac{1}{H_2}\left[\frac{\partial H_2}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + H_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial\sigma_1}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_1}\right)\right]_\Gamma = -u^2(\sigma_1, \sigma_2) \tag{2.3}$$

где $H_2$ – параметр Ламе ($H_1 = H_3 = 1$); 0, $u^1(\sigma_1, \sigma_2)$, $u^2(\sigma_1, \sigma_2)$ – компоненты вектора скорости движения границы в локальной системе координат. Функции $u^1(\sigma_1, \sigma_2)$, $u^2(\sigma_1, \sigma_2)$, определенные на поверхности цилиндра, предполагаются достаточно гладкими и финитными по переменной $\sigma_2$, причем

$$\lim_{\sigma_2 \to \infty} \int_{-\infty}^{\sigma_2} u'_{\sigma_1}(\sigma_1, \eta)\, d\eta = 0$$

Соотношения (2.3) задают значения проекций вектора скорости движения границы на оси локальной системы координат.

Следуя методике работы [5], асимптотику решения задачи (2.1) с граничными условиями (2.3) ищем в виде

$$\Phi(x, y, z, \varepsilon) = \Phi^r(x, y, z, \varepsilon) + \Pi\Phi(\rho, \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon) =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Phi_i^r(x, y, z) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i\Phi(\rho, \sigma_1, \sigma_2) \tag{2.4}$$
$$\Psi(x, y, z, \varepsilon) = \Pi\Psi(\rho, \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i\Psi(\rho, \sigma_1, \sigma_2); \quad \rho = \frac{r}{\varepsilon}$$

где $\Phi^r(x, y, z, \varepsilon)$ – регулярное разложение, описывающее решение вдали от границы; $\Pi\Psi(\rho, \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon)$, $\Pi\Phi(\rho, \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon)$ – погранслойные поправки, дающие существенный вклад в решение вблизи границы.

Подставляя разложения (2.4) в систему (2.1), отделяем уравнения для регулярных и погранслойных членов, в уравнениях для пограничных функций переходим к новым переменным $(r, \sigma_1, \sigma_2)$, производим растяжение $r = \varepsilon\rho$ и раскладываем коэффициенты уравнений по степеням $\varepsilon$. Для определения членов погранслойных разложений имеем систему

$$\left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(i\omega\frac{\partial^4}{\partial\rho^4} - (\omega^2 - N^2)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right) - \frac{b(0)}{\varepsilon}\left(2i\omega\frac{\partial^3}{\partial\rho^3} - (\omega^2 - N^2)\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l M_l\right]\Pi\Phi = 0 \tag{2.5}$$

$$\left[\omega - i\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l N_l\right]\Pi\Psi = 0 \tag{2.6}$$

где $M_l$, $N_l$ – линейные дифференциальные операторы порядков не выше второго; $b(0)$ – нулевой член в разложении коэффициента $b = H_2^{-1}\,\partial H_2/\partial r$ по степеням $\varepsilon$.

Граничные условия получаются из условий (2.3) аналогичным образом:

$$\left[a(0)\frac{\partial \Pi\Psi}{\partial\sigma_1} + \frac{\partial^2\Phi^r}{\partial\sigma_2\partial n} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\Pi\Phi}{\partial\sigma_2\partial\rho}\right]_\Gamma = 0 \tag{2.7}$$

$$\left[a(0)\frac{\partial^2(\Phi^r + \Pi\Phi)}{\partial\sigma_2\partial\sigma_1} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Pi\Psi}{\partial\rho}\right]_\Gamma = u^1(\sigma_1, \sigma_2) \tag{2.8}$$

$$\left[b(0)\frac{\partial\Phi^r}{\partial n} + \frac{1}{\varepsilon}b(0)\frac{\partial\Pi\Phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\Phi^r}{\partial n^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\Pi\Phi}{\partial\rho^2} + \right.$$
$$\left. + a(0)d_1(0)\frac{\partial(\Phi^r + \Pi\Phi)}{\partial\sigma_1} + a^2(0)\frac{\partial^2(\Phi^r + \Pi\Phi)}{\partial\sigma_1^2}\right]_\Gamma = -u^2(\sigma_1, \sigma_2) \tag{2.9}$$

где $a(0)$, $d_1(0)$ – нулевые члены в разложениях коэффициентов $a = H_2^{-1}$, $d_1 = \partial H_2^{-1}/\partial\sigma_1$ по степеням $\varepsilon$.

Кроме этого, потребуем, чтобы все П-функции стремились к нулю при $\rho \to \infty$:

$$\Pi(\rho, \sigma_1, \sigma_2) \to 0 \text{ при } \rho \to \infty \tag{2.10}$$

Приравнивая в соотношениях (2.5)–(2.10) члены при одинаковых степенях $\varepsilon$, в нулевом и первом приближениях находим

$$\Pi_0\Phi = 0, \quad \Pi_1\Phi = 0, \quad \Pi_0\Psi = 0$$

Погранфункция $\Pi_1\Psi$ определяется из соотношений (2.6), (2.8) и (2.10):

$$\omega\Pi_1\Psi - i\frac{\partial^2\Pi_1\Psi}{\partial\rho^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial\Pi_1\Psi}{\partial\rho}\right|_{\rho=0} = -u^1(\sigma_1, \sigma_2), \quad \Pi_1\Psi(\rho\to\infty)\to 0$$

Отсюда получаем

$$\Pi_1\Psi(\rho, \sigma_1, \sigma_2) = -\frac{u^1(\sigma_1, \sigma_2)}{\lambda_1}e^{\lambda_1\rho}, \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(i-1) \tag{2.11}$$

В следующем приближении приходим к системе

$$i\omega\frac{\partial^4}{\partial\rho^4}\Pi_2\Phi - (\omega^2 - N^2)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Pi_2\Phi = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2\Pi_2\Phi}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=0} = -u^2(\sigma_1, \sigma_2), \quad \Pi_2\Phi(\rho\to\infty)\to 0$$

которая имеет решение

$$\Pi_2\Phi(\rho, \sigma_1, \sigma_2) = -\frac{u^2(\sigma_1, \sigma_2)}{\lambda_2^2}e^{\lambda_2\rho}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\omega^2 - N^2}{2\omega}}(i-1) \tag{2.12}$$

Члены регулярного разложения $\Phi_l^r$ ($l = 0, 1, 2$) определяются из задач вида

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)\Delta_2\right]\Phi_l^r = 0, \quad \left.\frac{\partial^2\Phi_l^r}{\partial z\partial n}\right|_\Gamma = f_l(\sigma_1, \sigma_2) \tag{2.13}$$

Убывающее на бесконечности решение задачи (2.13) в случае $|\omega| < N$ удается построить, используя дополнительное условие

$$\lim_{\sigma_2 \to \infty} \int_{-\infty}^{\sigma_2} f_l(\sigma_1, \eta) d\eta = 0 \tag{2.14}$$

Предполагая в дальнейшем, что поверхность Г является поверхностью Ляпунова, будем искать затухающее на бесконечности решение задачи (2.13) в виде интеграла Фурье

$$\Phi_l^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_{\gamma} \mu_{lk}(P) G_k(M, P) e^{ikz} dl_P dk \tag{2.15}$$

где $\gamma$ – линия пересечения поверхности Г и плоскости $z = \text{const}$, $G_k(M, P)$ – функция Грина второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца вне окружности некоторого радиуса $a_k$, целиком лежащей внутри контура $\gamma$. Функция $G_k(M, P)$ существует и может быть представлена явно:

$$G_k(M, P) = \frac{1}{2\pi}\left[ H_0^{(1)}(c_k R_{MP}) - \frac{J_0'(c_k a_k)}{H_0^{(1)'}(c_k a_k)} H_0^{(1)}(c_k r_0) H_0^{(1)}(c_k r) - \right.$$

$$\left. - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'(c_k a_k)}{H_n^{(1)'}(c_k a_k)} H_n^{(1)}(c_k r_0) H_n^{(1)}(c_k r) \cos n(\varphi - \varphi_0) \right]$$

где

$$R_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2}, \quad P(\xi, \zeta) \in \gamma, \quad c_k = \frac{|k|\omega}{\sqrt{N^2 - \omega^2}}$$

$H_n^{(1)}(c_k r)$ – функции Ганкеля первого рода, $J_n(c_k r)$ – функции Бесселя, $(r, \varphi)$, $(r_0, \varphi_0)$ – координаты точек $M$ и $P$ в полярной системе координат. Плотность потенциала $\mu_{lk}(P)$ удовлетворяет уравнению Фредгольма второго рода:

$$\pi\mu_{lk}(P_0) - \oint_{\gamma} \mu_{lk}(P) \frac{\partial G_k(P, P_0)}{\partial n_{P_0}^{in}} dl_P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\sigma_2} f_l(\sigma_{1P_0}, \eta) e^{-ik\sigma_2} d\eta d\sigma_2, \quad P_0 \in \gamma \tag{2.16}$$

$\sigma_{1P_0}$ – координата точки $P_0$ на контуре $\gamma$, $\partial/\partial n_{P_0}^{in}$ – производная вдоль внутренней к $\gamma$ нормали в точке $P_0$.

Поскольку ядро интегрального оператора, входящего в уравнение (2.16), является слабо полярным и соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение при специальном выборе $a_k$, уравнение (2.16) разрешимо единственным образом.

В случае $|\omega| > N$ убывающее на бесконечности решение задачи (2.13) ищется в виде

$$\Phi_l^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_{\gamma} \mu_{lk}(P) K_0(c_k R_{MP}) e^{ikz} dl_P dk, \quad c_k = \frac{|k|\omega}{\sqrt{\omega^2 - N^2}}$$

где $K_0(c_k R_{MP})$ – функция Макдональда. Плотность $\mu_{lk}(P)$ удовлетворяет уравнению, отличающемуся от (2.16) заменой $G_k(P, P_0)$ на $K_0(c_k R_{PP_0})$. Далее исследования проводятся по аналогичной схеме.

Заметим, что для выделения единственного физического решения задачи (2.13) при $|\omega| > N$ достаточно поставить условие затухания решения на бесконечности (в отличие от случая $|\omega| < N$, для которого нужно использовать принцип предельного поглощения [9]).

Следует отметить некоторую ограниченность асимптотического метода при изучении вопроса об излучении внутренних волн. В рамках линейной математической модели при использовании метода пограничных функций свойства решений регулярных задач, описывающих поведение жидкости вдали от границы, определяются свойствами вырожденного оператора $L_0$, отвечающего идеальной жидкости.

Так как $\Pi_1\Phi = 0$, то функция $\Phi_0^r$ определяется из задачи (2.13), в которой $f_0(\sigma_1, \sigma_2) = 0$. В соответствии с формулой (2.15) однородная задача (2.13) имеет только тривиальное решение. Следовательно, $\Phi_0^r = 0$.

Для регулярного члена $\Phi_1^r$ получаем задачу (2.13), где

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2) = -\left[\frac{\partial^2\Pi_2\Phi}{\partial\sigma_2\partial\rho} + a(0)\frac{\partial\Pi_1\Psi}{\partial\sigma_1}\right]_{\rho=0}$$

$\Pi_1\Psi$, $\Pi_2\Psi$ определены формулами (2.11), (2.12). Поскольку функция $f_1(\sigma_1, \sigma_2)$ удовлетворяет условию (2.14), то существует единственное решение этой задачи, представимое в виде (2.15).

Из уравнения (2.6) и граничных условий (2.8) и (2.10) находим

$$\frac{\partial^2\Pi_2\Psi}{\partial\rho^2} + i\omega\Pi_2\Psi = -b(0)\frac{\partial\Pi_1\Psi}{\partial\rho}$$

$$\left.\frac{\partial\Pi_2\Psi}{\partial\rho}\right|_{\rho=0} = a(0)\left.\frac{\partial^2\Phi_1^r}{\partial\sigma_2\partial\sigma_1}\right|_\Gamma, \quad \Pi_2\Psi(\rho\to\infty)\to 0$$

и, значит,

$$\Pi_2\Psi(\rho, \sigma_1, \sigma_2) = \left[\frac{1}{\lambda_1}a(0)\left.\frac{\partial^2\Phi_1^r}{\partial\sigma_2\partial\sigma_1}\right|_\Gamma + \frac{b(0)}{2\lambda_1^3}(\lambda_1\rho - 1)u^1(\sigma_1, \sigma_2)\right]e^{\lambda_1\rho}$$

Регулярный член второго приближения $\Phi_2^r$ удовлетворяет задаче (2.13), где

$$f_2(\sigma_1, \sigma_2) = -\left[\frac{\partial^2\Pi_3\Phi}{\partial\sigma_2\partial\rho} + a(0)\frac{\partial\Pi_2\Psi}{\partial\sigma_1}\right]_{\rho=0}$$

Для однозначного определения функции $\Phi_2^r$ необходимо найти пограничную функцию третьего приближения $\Pi_3\Phi$.

Уравнение для нахождения $\Pi_3\Phi$ получается путем приравнивания коэффициентов при $\varepsilon$ в уравнении (2.5). Соответствующие граничные условия получаются из (2.9) и (2.10). Имеем

$$i\omega\frac{\partial^4}{\partial\rho^4}\Pi_3\Phi - (\omega^2 - N^2)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Pi_3\Phi = -b(0)\left[2i\omega\frac{\partial^3}{\partial\rho^3} - (\omega^2 - N^2)\frac{\partial}{\partial\rho}\right]\Pi_2\Phi$$

$$\left.\frac{\partial^2\Pi_3\Phi}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=0} =$$

$$= \left[-b(0)\left(\frac{\partial\Phi_1^r}{\partial n} + \frac{\partial\Pi_2\Phi}{\partial\rho}\right) - a(0)\left(d_1(0)\frac{\partial\Phi_1^r}{\partial\sigma_1} + a(0)\frac{\partial^2\Phi_1^r}{\partial\sigma_1^2}\right) - \frac{\partial^2\Phi_1^r}{\partial n^2}\right]_\Gamma \equiv g(\sigma_1, \sigma_2) \qquad (2.17)$$

$$\Pi_3\Phi(\rho \to \infty) \to 0$$

Решение задачи (2.17) имеет вид

$$\Pi_3\Phi(\rho) = Ce^{\lambda_2\rho} - \frac{b(0)u^2(\sigma_1, \sigma_2)(2i\omega\lambda_2^2 - (\omega^2 - N^2))}{2\lambda_2^2(\omega^2 - N^2) - 4i\omega\lambda_2^4}\rho e^{\lambda_2\rho}$$

где

$$C = \frac{1}{\lambda_2^2}\left[g(\sigma_1, \sigma_2) + \frac{b(0)u^2(\sigma_1, \sigma_2)(2i\omega\lambda_2^2 - (\omega^2 - N^2))}{\lambda_2(\omega^2 - N^2) - 2i\omega\lambda_2^3}\right]$$

Так как координаты ($r$, $\sigma_1$, $\sigma_2$) были введены локально, то П-функции имеют смысл лишь в малой окрестности границы Г. Для гладкого продолжения их на всю область вне цилиндра можно применить известный стандартный прием [5].

**3. Выводы.**

1. Построенное решение задачи о формировании периодических возмущений асимптотически точно удовлетворяет системе уравнений и граничным условиям. Суммы

$$\varepsilon\Phi_1^r(x, y, z) + \sum_{l=0}^{3}\varepsilon^l\Pi_l\Phi(\rho, \sigma_1, \sigma_2) \text{ и } \sum_{l=0}^{1}\varepsilon^l\Pi_l\Psi(\rho, \sigma_1, \sigma_2)$$

существуют и удовлетворяют уравнениям (2.1), граничным условиям (2.7), (2.9) с точностью $O(\varepsilon^2)$ и граничному условию (2.8) с точностью $O(\varepsilon)$.

2. В вязкой стратифицированной жидкости, в отличие от однородной, формируются два пограничных слоя, что подтверждает выводы работы [2], полученные другим методом. *Вязкий волновой пограничный слой*, существующий как в однородной, так и в стратифицированной жидкости, описывается погранслойным разложением $\Pi\Psi(\rho, \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon)$, начинающимся с члена порядка $\sqrt{\nu}$. Толщина слоя

$$\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$$

Погранслойная поправка $\Pi\Phi(\rho, \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon)$ описывает специфический для стратифицированной жидкости *внутренний волновой пограничный слой*. Это разложение начинается с члена порядка $\nu$. Толщина слоя

$$l_\nu = \sqrt{\frac{2\omega\nu}{|\omega^2 - N^2|}}$$

При переходе к однородной жидкости ($N \to 0$) вязкий и внутренний волновые пограничные слои сливаются: $l_\nu = \delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$, что согласуется с выводами работы [2].

3. При отказе от рассмотрения линеаризованных уравнений все структурные элементы течений начинают взаимодействовать между собой и при изучении динамики неоднородных сред должна анализироваться полная нестационарная система (1.1).

4. Метод пограничных функций, использование которого основано на выделении малых параметров в системе и сведении ее к системе с меньшей размерностью вдали от возмущающей поверхности, позволяет успешно решать как нестационарные, так и нелинейные задачи, что дает возможность исследовать не только процесс установления волнового движения, но и новые свойства решений, обусловленные нелинейностью системы (контрастные структуры).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобразования России (Федеральная целевая программа "Интеграция", Я0058/993).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 836–847.
2. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Некоторые точно решаемые задачи излучения трехмерных периодических внутренних волн // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 2. С. 52–61.
3. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Нелинейная генерация периодических внутренних волн пограничным течением на вращающемся осесимметричном теле // Докл. РАН. 1999. Т. 367. № 5. С. 636–639.
4. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Новый механизм нелинейной генерации внутренних волн // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 6. С. 772–776.
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.
6. *Nefedov N.N.* On some singularly perturbed problem for viscous stratified fluids // J. Math. Anal. and Appl. 1988. V. 131. № 1. P. 118–126.
7. *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Федотова Е.В.* Асимптотическое решение линеаризованной задачи о распространении звука в ограниченной среде с малой вязкостью // Журн. вычислит. математики. и мат. физики. 1987. Т. 27. № 2. С. 226–236.
8. *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Полежаева Е.В.* Асимптотическое решение линеаризованных задач о собственных и вынужденных резонансных колебаниях среды с малой вязкостью // Журн. вычислит. математики. и мат. физики. 1989. Т. 29. № 7. С. 1023–1035.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

Москва
e-mail: lysean@rol.ru
chakin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
15.I.2003