УДК 532.5:534.1

© 2004 г. А. М. Тер-Крикоров

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В СРЕДНЕМ СЛОЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ АТМОСФЕРЫ ОТ РАСПОЛОЖЕННЫХ В НИЖНЕМ СЛОЕ ИСТОЧНИКОВ

Изучаются колебания в среднем слое трехслойной атмосферы, индуцируемые источниками, расположенными в нижнем слое. Частоты Брента–Вяйсяля в каждом слое постоянны и увеличиваются с высотой. Общее решение, полученное методами интегральных преобразований, представляется в виде ряда. Показано, что с точностью $o(t^{-1})$ только конечное число членов ряда дает основной вклад в асимптотику при $t \to \infty$. Асимптотика исследуется при помощи стандартных приемов теории асимптотических оценок интегралов.

1. Постановка и формальное решение задачи. Рассматривается идеальная атмосфера, заполняющая трехмерное пространство и разделяющаяся на три слоя с постоянными в каждом слое частотами Брента–Вяйсяля(БВ). Выбираем единицу длины и единицу времени так, чтобы толщина среднего слоя и частота БВ в среднем слое равнялись единице. Предполагается, что $N_1 < N_2 < N_3$, где N_1 – частота БВ в нижнем слое, $N_2 = 1$, N_3 – частота БВ в верхнем слое. Ранее [1] рассматривался менее реалистичный случай, когда $N_1 = N_3 \neq 1$. (Известно, что в реальной атмосфере частота БВ растет с увеличением высоты.) Начало декартовой системы координат выбрано на нижней границе среднего слоя. Точечные или распределенные источники расположены в нижнем слое.

В линейной постановке решение задачи о внутренних волнах, возбуждаемых этими источниками, выражается через различные свертки по пространственным переменным с непрерывным и ограниченным решением уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2(\Delta w)}{\partial t^2} + N_k^2\Delta_2 w = \frac{1}{4\pi}Q'(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z+c), \quad k = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

функция $Q(t)$ непрерывно дифференцируема, финитна с носителем на $[0, T]$, $c > 0$.

Методом интегральных преобразований было получено [1] решение задачи (1.1). В среднем слое возмущения даются формулой

$$w = \frac{1}{16\pi^3 i}\int_0^T Q(\tau)\int_0^{+\infty}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\varphi(u, p, z)J_0(ru)e^{p(t-\tau)}dudpd\tau, \quad 0 < z < 1 \tag{1.2}$$

где

$$\varphi(u, p, z) = -e^{-u\gamma c/p}\frac{(\beta+\omega)e^{u\omega(1-z)/p} - (\beta-\omega)e^{-u\omega(1-z)/p}}{(\beta+\omega)(\omega+\gamma)e^{u\omega/p} + (\beta-\omega)(\omega-\gamma)e^{-u\omega/p}} \tag{1.3}$$

$$\omega = \sqrt{1+p^2}, \quad \beta = \sqrt{N_3^2+p^2}, \quad \gamma = \sqrt{N_1^2+p^2} \tag{1.4}$$

Известно, что средний слой играет роль волновода. Колебания, вызываемые источником, могут нарушать функции волновода.

Аналогично могут быть выписаны формулы для возмущений в верхнем и нижнем слоях.

2. Преобразование решения. Рассуждения, аналогичные приведенным ранее [1], показывают, что при $u > 0$, $\mathrm{Re}p \neq 0$ знаменатель функции φ не может обратиться в нуль. Если воспользоваться тем, что $N_1 < 1 < N_3$, то оказывается, что при $\mathrm{Re}p = 0$ знаменатель функции φ может обращаться в нуль только в точках $p = \pm i$, но в этих же точках обращается в нуль и числитель. Функция φ имеет конечные пределы при $x \to \pm i$ и ее можно считать непрерывной в этих точках. В силу теоремы Коши можно перейти в формуле (1.2) к интегрированию по мнимой оси. Если функция φ представляется в виде разности, то интеграл можно представить в виде разности двух интегралов, понимаемых в смысле главного значения. В комплексно сопряженных точках мнимой оси подынтегральная функция в формуле (1.2) принимает комплексно сопряженные значения. Если при $t > T$ в формуле (1.2) заменить функцию $f(p, t)$ на функцию $f(-p, t)$, то ее правая часть обратится в нуль в силу теоремы Коши. Все это позволяет записать формулу (1.2) в виде

$$w = \frac{1}{4\pi^3}\mathrm{Im}\int_0^T Q(\tau)\int_0^{+\infty}\int_0^{+i\infty}\varphi(u, p, z)J_0(ru)\mathrm{ch}\,p(t-\tau)\,du\,dp\,d\tau \tag{2.1}$$

Воспользовавшись формулами (1.3), (1.4), получаем

$$\varphi(u, p, z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}C(p)A^n(p)B^n(p)\exp\left(-\frac{u}{p}((z+2n)\omega+\gamma c)\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C(p)A^n(p)B^{n+1}(p)\exp\left(-\frac{u}{p}((2-z+2n)\omega+\gamma c)\right) \tag{2.2}$$

$$C(p) = \frac{1}{\omega+\gamma}, \quad A(p) = \frac{\omega-\gamma}{\omega+\gamma}, \quad B(p) = \frac{\beta-\omega}{\beta+\omega} \tag{2.3}$$

Подставляя выражение (2.2) в формулу (2.1), воспользовавшись формулами (1.4) и вычисляя интегралы по переменной u, получаем

$$w = w_1 - w_2$$

$$w_1 = \frac{1}{4\pi^3}\int_0^T Q(\tau)\Phi_1(r, z, t-\tau)\,d\tau \tag{2.4}$$

$$w_2 = \frac{1}{4\pi^3}\int_0^T Q(\tau)\Phi_2(r, 2-z, t-\tau)\,d\tau$$

где

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\frac{\Gamma_n(q)\cos(qt)\,dq}{\sqrt{f(q, r, z+2n)}}$$

$$\Gamma_n(q) = qC(iq)A^n(iq)B^n(iq) \tag{2.5}$$

$$f(q, r, z) = r^2q^2 - g^2(q, z), \quad g(q, z) = z\sqrt{1-q^2} + c\sqrt{N_1^2 - q^2}$$

Выражение для функции $\Phi_2(r, z, t)$ получается заменой в формуле (2.5) координаты z на $2 - z$ и умножением подынтегральной функции на $B(iq)$.

Функция $f(q, r, z + 2n)$ обращается в нуль только в случае, когда

$$rq = g(q, z+2n), \quad 0 < q < N_1 \tag{2.6}$$

Для того чтобы решить уравнение (2.6), положим

$$N_1 \sin\varphi = \sqrt{\frac{N_1^2 - q^2}{1 - q^2}}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad N = \frac{N_1}{\sqrt{1 - N_1^2}} \tag{2.7}$$

Выразив отсюда q и подставив результат в уравнение (2.6), получаем

$$q(\varphi) = \frac{N\cos\varphi}{\sqrt{1 + N^2\cos^2\varphi}}, \quad rN\cos\varphi - c\sin\varphi = z + 2n \tag{2.8}$$

Полагая

$$R = \sqrt{r^2N^2 + c^2}, \quad rN = R\sin\alpha, \quad c = R\cos\alpha$$

запишем уравнение (2.8) в виде

$$\sin(\alpha - \varphi) = (z + 2n)/R \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) может иметь решение только при условии $z + 2n/R \le 1$. Предполагая это условие выполненным, положим

$$\sin(\beta(z, r)) = z/R, \quad 0 \le \beta \le \pi/2 \tag{2.10}$$

Решение уравнения (2.10) может попасть на отрезок $[0, \pi/2]$ в том и только в том случае, когда $0 \le \beta(z + 2n, r) \le \alpha$ и $\varphi(z, r) = \alpha - \beta(z, r)$.

Из уравнений (2.9) и (2.10) следует, что неравенство $\sin(\beta(z + 2n, r)) \le \sin\alpha$ эквивалентно неравенству $z + 2n \le rN$, что накладывает ограничения на номер n

$$n \le n(r, z) = [rN/2 - z/2] \tag{2.11}$$

($[x]$ – целая часть числа x).

Положим

$$q_n(r, z) = q(\varphi_n(r, z)), \quad \varphi_n(r, z) = \varphi(r, z + 2n)$$

Если выполнено условие (2.11), то в силу соотношений (2.7) и (2.5) на отрезке $[0, q_n(r, z)]$ функция $f(r, z + 2n, t) \le 0$. Следовательно, на этом участке подынтегральная функция в формуле (2.5) равна нулю. На отрезке $[N_3, +\infty]$ функция $f(r, z + 2n, t) \ge 0$, функция $C(iq)$ принимает мнимые значения, а $A(iq)$, $B(iq)$ – вещественные значения. Следовательно, и на этом отрезке подынтегральная функция в формуле (2.5) равна нулю. Из сказанного следует, что интегрирование в формуле (2.5) по переменной q фактически осуществляется по отрезку $[q_n(r, z), N_3]$.

Разобьем отрезок интегрирования на отрезки $[q_n(r, z), N_1]$ и $[N_1, N_3]$. Первый из отрезков существует только при выполнении условия (2.11), и поэтому формулу (2.5) можно переписать в виде

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=0}^{n(r,z)} \mathrm{Re} \int_{q_n(r,z)}^{N_1} \frac{\Gamma_n(q)\cos(qt)dq}{\sqrt{f(q, r, z + 2n)}} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re} \int_{N_1}^{N_3} \frac{\Gamma_n(q)\cos(qt)dq}{\sqrt{f(q, r, z + 2n)}} \tag{2.12}$$

3. Асимптотические формулы при $t \to \infty$. Как известно из общей теории [2], асимптотика интегралов определяется стационарными и концевыми точками, а также точками, в которых нарушается регулярность подынтегральной функции. Ограничимся двумя членами асимптотического ряда, а именно членами порядка $t^{-1/2}$ и t^{-1}. Члены порядка $t^{-1/2}$ определяются концевой точкой q_n. Применяя к формуле (2.12) стандартный прием [2], получаем, что с точностью до членов порядка $t^{-3/2}$ вклад точки q_n в асимптотику функции Φ_1 равен

$$\begin{aligned} \Phi_1(r,z,t) &= \sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{n=0}^{n(r,z)}(-1)^{n+1}F_n(r,z)\cos\left(q_n(r,z)t+\frac{\pi}{4}\right) \\ F_n(r,z) &= \frac{q_nC(iq_n)A^n(iq_n)B^n(iq_n)}{\sqrt{\partial f(q_n(r,z),r,z+2n)/\partial q}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Вводя обозначения

$$\psi^{\pm}(r,z) = 1\pm N_1\sin(\varphi_n(r,z))$$

$$\chi(r,z) = N_1(r^2+(z+2n)^2+c^2)\sin\varphi_n + c(z+2n)(1+N_1^2\sin^2\varphi_n)$$

$$B^{\pm}(r,z) = \sqrt{N_3^2\psi^+\psi^- + N_1^2}\pm\sqrt{1-N_1^2}$$

после простых вычислений получаем

$$q_nC(iq_n) = \frac{N}{\psi^+}\cos\varphi_n,\quad A(iq_n) = \frac{\psi^-}{\psi^+},\quad B(iq_n) = \frac{B^-(r,z)}{B^+(r,z)}$$

$$\frac{\partial f(q_n(r,z),r,z+2n)}{\partial q} = \frac{2\chi(r,z)\cos\varphi_n}{\sin\varphi_n\sqrt{\psi^+\psi^-}}$$

$$F_n(r,z) = \frac{N}{2}\sqrt{\frac{\sin 2\varphi_n}{\chi}}(\psi^-)^{n+1/4}(\psi^+)^{-n-3/4}\left(\frac{B^-}{B^+}\right)^n$$

Подставляя выражения (3.1) в формулу (2.4), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_0^T\frac{Q(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\cos\left(q_n(t-\tau)+\frac{\pi}{4}\right)d\tau &= \frac{D_n(r,z)}{\sqrt{t}}\cos(q_n(r,z)t+p_n(r,z))+O(t^{-3/2}) \\ \int_0^T Q(\tau)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(q_n(r,z)\tau)d\tau &= D_n(r,z)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(p_n(r,z)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Подставляя выражения (3.1) и (3.2) в формулу (2.5), получаем с точностью до $O(t^{-3/2})$

$$w_1 = -\frac{1}{4\pi^{5/2}\sqrt{t}}\sum_{n=0}^{n(r,z)}(-1)^{n+1}D_nF_n\cos\left(q_n(r,z)t+p_n(r,z)+\frac{\pi}{4}\right)$$

Аналогичная оценка для функции w_2 получается заменой z на $2-z$ и F_n на $(B^-/B^+)F_n$.

С точностью до $O(t^{-3/2})$ вклады точек N_1, N_3 в асимптотику функции Φ_1 могут быть найдены интегрированием по частям. Оказывается, что эти вклады равны нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Крикоров А.М.* Возмущения от источника в трехслойной атмосфере // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 62–68.
2. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Долгопрудный
e-mail: ter-krikorov@umail.ru

Поступила в редакцию
23.VI.2003