УДК 531.36

© 2004 г. О. В. Холостова

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМУ СПУТНИКА В ОКРЕСТНОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ПРЕЦЕССИИ

Рассматриваются движения близкого к динамически симметричному спутника – твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Строятся периодические движения, рождающиеся из конической прецессии динамически симметричного спутника в невозмущенной задаче. Проводится строгий нелинейный анализ устойчивости этих движений. В невозмущенной задаче одна из координат – угол собственного вращения спутника – циклическая; система дифференциальных уравнений, описывающих движения возмущенной задачи, близка к системе с циклической координатой. Исследуется резонансный случай, когда отношение одной из частот малых колебаний приведенной системы в окрестности устойчивого равновесия к частоте изменения циклической координаты близко к целому числу, и случай его отсутствия. При наличии указанного резонанса проводится обобщение полученных ранее [1] результатов исследования периодических движений автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на рассматриваемый здесь случай системы с тремя степенями свободы. При отсутствии этого резонанса выделены случаи параметрического резонанса, резонанса третьего и четвертого порядков, а также общий нерезонансный случай. Использованы результаты устойчивости неавтономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при резонансах [2], а также (в общем нерезонансном случае) результаты КАМ-теории [3].

Устойчивость конической прецессии динамически симметричного спутника на круговой орбите исследована [4–7]. Для случая слабоэллиптической орбиты [8] и для случая близкого к динамически симметричному спутника на круговой орбите [9] найдены (в виде рядов по степеням малого параметра) периодические движения спутника и исследована их устойчивость в линейном приближении. Исследованы [10] периодические движения динамически симметричного спутника на слабоэллиптической орбите при резонансе в вынужденных колебаниях, когда одна из частот малых колебаний спутника близка к среднему движению его центра масс. Построены $2\pi p$-периодические движения динамически симметричного спутника на эллиптической орбите, рождающиеся из $2\pi p/q$-периодических движений на круговой орбите, проведен анализ их устойчивости в линейном приближении [11].

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение спутника – твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Пусть $GXYZ$ – орбитальная система координат с началом в центре масс G спутника, ее оси GX, GY и GZ направлены соответственно по трансверсали, по бинормали к орбите и по радиус-вектору центра масс. Со спутником свяжем систему координат $Gxyz$, оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции. Ориентацию системы координат $Gxyz$ относительно $GXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ.

Движение спутника относительно центра масс описывается каноническими дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона

$$H = \left(\frac{A}{B}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\frac{p_\psi^2}{2\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)p_\theta^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{A}{B}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\mathrm{ctg}^2\theta + \frac{A}{C}\right]p_\varphi^2 - \left(\frac{A}{B} - 1\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\theta}p_\psi p_\theta -$$

$$-\left(\frac{A}{B}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{\sin\theta}p_\psi p_\varphi - \left(\frac{A}{B} - 1\right)\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\, p_\theta p_\varphi - \cos\psi\,\mathrm{ctg}\,\theta\, p_\psi -$$

$$-\sin\psi\, p_\theta + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}p_\varphi + \frac{3}{2}\left[\left(\frac{B}{A}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\sin^2\theta + \frac{C}{A}\cos^2\theta\right] \tag{1.1}$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника, p_ψ, p_θ, p_φ – соответствующие координатам ψ, θ, φ импульсы, обезразмеренные при помощи множителя $A\omega_0$, ω_0 – среднее движение центра масс. В качестве независимой взята переменная $\tau = \omega_0 t$.

Пусть моменты инерции A и B спутника близки. Тогда, вводя малый параметр $\varepsilon = (A - B)/B$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$, а также параметр $\alpha = C/A$ $(0 < \alpha \le 2)$, гамильтониан (1.1) можно записать в виде

$$H = H^{(0)} + \varepsilon H^{(1)}$$

$$H^{(0)} = \frac{p_\psi^2}{2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{ctg}^2\theta + \frac{1}{\alpha}\right)p_\varphi^2 - \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{\sin\theta}p_\psi p_\varphi -$$

$$-\cos\psi\,\mathrm{ctg}\,\theta\, p_\psi - \sin\psi\, p_\theta + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}p_\varphi + \frac{3}{2}(\alpha - 1)\cos^2\theta \tag{1.2}$$

$$H^{(1)} = \frac{\cos^2\varphi}{2\sin^2\theta}p_\psi^2 + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\, p_\theta^2 + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\theta\, p_\varphi^2 - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\theta}p_\psi p_\theta -$$

$$-\frac{\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{\sin\theta}p_\psi p_\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\, p_\theta p_\varphi - \frac{3}{2(1+\varepsilon)}\cos^2\varphi\sin^2\theta$$

$H^{(0)}$ – невозмущенный гамильтониан, отвечающий движению динамически симметричного ($A = B$) спутника. Координата φ в системе с гамильтонианом $H^{(0)}$ циклическая и значит $p_\varphi = p_{\varphi_0} = \mathrm{const}$. Возмущающая часть $\varepsilon H^{(1)}$ гамильтониана (1.2) содержит координату φ и периодична по ней с периодом, равным π. Таким образом, система с гамильтонианом (1.2) близка к системе с циклической координатой.

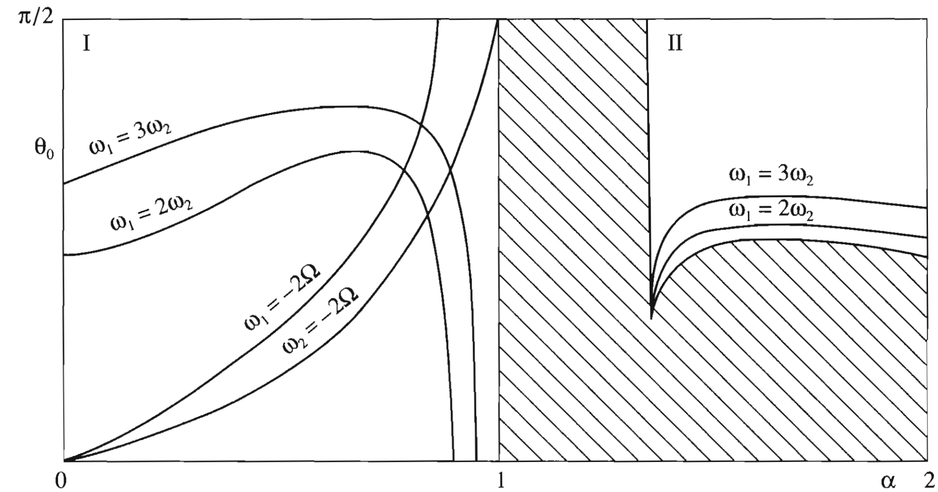
Рассмотрим частное движение невозмущенной системы, описываемое соотношениями

$$\theta = \theta_0 = \arcsin\frac{p_{\varphi_0}}{3\alpha - 4}, \quad p_\theta = p_{\theta_0} = 0$$

$$\psi = \psi_0 = 0, \quad p_\psi = p_{\psi_0} = 3(\alpha - 1)\sin\theta_0\cos\theta_0$$

$$\varphi(\tau) = \Omega\tau + \varphi(0), \quad \Omega = \frac{4(\alpha - 1)}{\alpha}\sin\theta_0$$

и отвечающее конической прецессии динамически симметричного спутника. Для конической прецессии ось спутника перпендикулярна вектору скорости центра масс и



Фиг. 1

составляет с радиус-вектором центра масс угол θ_0; при этом спутник вращается вокруг своей оси с угловой скоростью Ω.

На фиг. 1 в плоскости параметров α, θ_0 ($0 \le \alpha \le 2$, $0 \le \theta_0 \le \pi/2$) выделены область I ($0 < \alpha < 1$), где выполняются достаточные условия устойчивости конической прецессии, и область II, где выполняются лишь необходимые условия устойчивости. Область II задается соотношениями [7]

$$\alpha \ge \frac{4}{3},\ \sin^2\theta_0 \ge \frac{18\alpha^2 - 27\alpha + 8 + 2(3\alpha - 2)\sqrt{(3\alpha - 1)(3\alpha - 4)}}{27\alpha^2(\alpha - 1)}$$

Частоты ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$) малых колебаний приведенной системы с двумя степенями свободы в окрестности устойчивого положения равновесия в областях I и II определяются из уравнения [7]

$$\omega^4 - [7 - 6\alpha - 9\alpha(1 - \alpha)\sin^2\theta_0]\omega^2 + 3\cos^2\theta_0(4 - 3\alpha)(1 - \alpha) = 0$$

В заштрихованной на фиг. 1 области коническая прецессия неустойчива.

Примем коническую прецессию динамически симметричного спутника (для значений параметров α и θ_0 из областей I и II) за невозмущенное движение и рассмотрим движения близкого к динамически симметричному ($\varepsilon \ne 0$) спутника в ее окрестности. Построим периодические движения спутника, близкие к его конической прецессии в невозмущенной задаче, и исследуем их устойчивость.

2. Преобразование гамильтониана. Положим в (1.2)

$$\theta = \theta_0 + q_1, \quad p_\theta = p_{\theta_0} + p_1, \quad \psi = \psi_0 + q_2, \quad p_\psi = p_{\psi_0} + p_2, \quad \varphi = q, \quad p_\varphi = p_{\varphi_0} + P$$

Функции $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= H_2^{(0)} + H_3^{(0)} + H_4^{(0)} + O_5 \\ H^{(1)} &= H_0^{(1)} + H_1^{(1)} + H_2^{(1)} + H_3^{(1)} + H_4^{(1)} + O_5 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $H_k^{(i)}$ ($i = 0, 1$) – совокупность членов k-го порядка относительно величин q_j, p_j ($j = 1, 2$) и $|P|^{1/2}$ с постоянными (при $i = 0$) или (при $i = 1$) π-периодическими по q, с гармониками $\cos 2q$ и $\sin 2q$, коэффициентами; O_5 – совокупность членов не ниже пятого порядка относительно тех же величин.

Функции $H_k^{(0)}$ имеют вид $H_k^{(0)} = H_{k0}^{(0)} + H_{k1}^{(0)}$, где

$$H_{k0}^{(0)} = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=k} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}, \quad k = 2, 3, 4$$

$$H_{21}^{(0)} = \Omega P, \quad H_{31}^{(0)} = (m_1 q_1 + m_2 p_2)P, \quad H_{41}^{(0)} = (l_1 q_1^2 + l_2 q_1 p_2 + l_3 q_2^2)P + nP^2$$

$$h_{2000} = \frac{1}{2}[9(\alpha-1)(\alpha\sin^2\theta_0 - 1) + \operatorname{ctg}^2\theta_0], \quad h_{1001} = 3\alpha - 2 - \frac{1}{\sin^2\theta_0}$$

$$h_{0200} = \frac{1}{2}[1 - 3(\alpha-1)\sin^2\theta_0], \quad h_{0110} = -1, \quad h_{0020} = \frac{1}{2}, \quad h_{0002} = \frac{1}{2\sin^2\theta_0}$$

$$h_{3000} = -\frac{9}{2}\sin\theta_0\cos\theta_0\alpha^2 - \frac{3}{2}\operatorname{ctg}\theta_0(7\cos^2\theta_0 - 10)\alpha - \frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}(6\cos^4\theta_0 - 16\cos^2\theta_0 + 11)$$

$$h_{2001} = -\frac{9}{2}\operatorname{ctg}\theta_0\alpha + \frac{2\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}(2\sin^2\theta_0 + 1)$$

$$h_{0201} = -h_{1200} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta_0, \quad h_{1002} = -\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} \tag{2.2}$$

$$h_{4000} = \frac{3}{8}(7\cos^2\theta_0 + 8)\alpha^2 + \frac{3(11\cos^4\theta_0 - 6\cos^2\theta_0 - 21)}{8\sin^2\theta_0}\alpha +$$

$$+\frac{9\cos^6\theta_0 - 23\cos^4\theta_0 - 7\cos^2\theta_0 + 30}{6\sin^4\theta_0}, \quad h_{2200} = -\frac{3}{4}\alpha + \frac{\sin^2\theta_0 + 1}{2\sin^2\theta_0}$$

$$h_{3001} = \frac{7\cos^2\theta_0 + 5}{2\sin^2\theta_0}\alpha - \frac{10\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0 + 9}{3\sin^4\theta_0}, \quad h_{2002} = \frac{2\cos^2\theta_0 + 1}{2\sin^4\theta_0}$$

$$h_{1201} = -\frac{1}{2\sin^2\theta_0}, \quad h_{0400} = \frac{1}{8}\sin^2\theta_0\alpha + \frac{1}{8}\cos^2\theta_0 - \frac{1}{6}, \quad h_{0310} = \frac{1}{6}$$

$$n = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}^2\theta_0 + \frac{1}{\alpha}\right), \quad m_1 = \frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}[1 - 3\sin^2\theta_0(\alpha-1)], \quad m_2 = -\frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}$$

$$l_1 = \frac{3\sin^2\theta_0(\cos^2\theta_0 + 2)\alpha + 3\cos^4\theta_0 - 7}{2\sin^3\theta_0}, \quad l_2 = \frac{\cos^2\theta_0 + 1}{\sin^3\theta_0}, \quad l_3 = -\frac{1}{2\sin\theta_0}$$

Невыписанные коэффициенты $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ равны нулю.

Для функции $H^{(1)}$ в (2.1) укажем только слагаемые $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$:

$$H_0^{(1)} = a\cos^2\varphi, \quad H_1^{(1)} = b\cos^2\varphi q_1 + c\sin\varphi\cos\varphi p_1 + d\cos^2\varphi p_2$$
$$a = 2\cos^2\theta_0 - \frac{3}{2}, \quad b = -\mathrm{ctg}\,\theta_0(1 + 6\sin^2\theta_0 - 3\alpha\sin^2\theta_0) \tag{2.3}$$
$$c = (7-6\alpha)\cos\theta_0, \quad d = \mathrm{ctg}\,\theta_0$$

Осуществим ряд канонических замен переменных, упрощающих структуру гамильтониана H. Сначала при помощи линейной замены

$$q_1 = n_{11}q_1^* + n_{12}q_2^*, \quad q_2 = n_{23}p_1^* + n_{24}p_2^*, \quad q = q^*$$
$$p_1 = n_{33}p_1^* + n_{34}p_2^*, \quad p_2 = n_{41}q_1^* + n_{42}q_2^*, \quad P = P^*$$
$$n_{11} = k_1 n_{23}, \quad n_{12} = \pm k_2 n_{24}, \quad n_{23} = (\omega_1 A_1)^{-1/2}, \quad n_{24} = (\pm\omega_2 A_2)^{-1/2}$$
$$n_{33} = (1 + k_1\omega_1)n_{23}, \quad n_{34} = (1 + k_2\omega_2)n_{24} \tag{2.4}$$
$$n_{41} = [k_1 - \sin^2\theta_0[\omega_1 + k_1(3\alpha - 2)]]n_{23}$$
$$n_{42} = \pm[k_2 - \sin^2\theta_0[\omega_2 + k_2(3\alpha - 2)]]n_{24}$$
$$k_i = \frac{3(1-\alpha) - \omega_i^2}{(3\alpha - 2)\omega_i}, \quad A_i = k_i^2 + 3(1-\alpha)\frac{\sin^2\theta_0}{\omega_i^2}; \quad i = 1, 2$$

приведем квадратичную часть $H_2^{(0)}$ к нормальной форме

$$H_2^{(0)*} = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^{*2} + p_1^{*2}) \pm \frac{1}{2}\omega_2(q_2^{*2} + p_2^{*2}) + \Omega P^* \tag{2.5}$$

В соотношениях (2.4) и (2.5) верхний знак относится к области I, нижний знак – к области II; предполагается, что $\alpha \neq 2/3$. В случае $\alpha = 2/3$ одна из величин k_i не определена; в этом случае величины n_{ij} считаются по формулам

$$n_{11} = n_{33}^{-1} = n_{41} = -\omega_1^{-1/2}, \quad n_{12} = n_{23} = 0, \quad n_{24} = n_{34} = -n_{42}^{-1} = \sin^{-1}\theta_0 \tag{2.6}$$

при $0 < \theta_0 < \pi/4$, когда $\omega_1 = \sqrt{2}\cos\theta_0$, $\omega_2 = 1$, и по формулам

$$n_{12} = n_{34}^{-1} = n_{42} = -\omega_2^{-1/2}, \quad n_{11} = n_{24} = 0, \quad n_{23} = n_{33} = -n_{41}^{-1} = \sin^{-1}\theta_0 \tag{2.7}$$

при $\pi/4 < \theta_0 < \pi/2$, когда $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{2}\cos\theta_0$. Если же $\alpha = 2/3$, $\theta_0 = \pi/4$, то имеем $\omega_1 = \omega_2 = 1$; этот случай далее рассматривать не будем.

В результате преобразования (2.4) формы $H_{k0}^{(0)}$ $(k = 3, 4)$ из (2.2) примут вид

$$H_{k0}^{(0)*} = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2 = k} h^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{*\nu_1} q_2^{*\nu_2} p_1^{*\mu_1} p_2^{*\mu_2}$$

Явный вид коэффициентов $h^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ здесь не приводим.

Пусть между частотами ω_1 и ω_2 отсутствуют резонансные соотношения третьего и четвертого порядков, т.е. $\omega_1 \neq 2\omega_2$ и $\omega_1 \neq 3\omega_2$. Резонансные кривые $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_1$ показаны на фиг. 1 в областях I и II. Для точек вне этих кривых можно построить близкое к тождественному каноническое преобразование типа преобразования Биркгофа, имеющее вид

$$q_i^* = Q_i + \ldots, \quad p_i^* = P_i + \ldots, \quad i = 1, 2, \quad q^* = Q + \ldots, \quad P^* = P^* \tag{2.8}$$

и нормализующее невозмущенный гамильтониан $H^{(0)*}$ до членов четвертого порядка включительно. Это преобразование получено при помощи метода Деприа–Хори. В силу громоздкости оно здесь не приводится. Гамильтониан $H^{(0)*}$ примет вид

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(0)} &= \frac{1}{2}\omega_1 S_1^2 \pm \frac{1}{2}\omega_2 S_2^2 + \Omega P^* + \frac{1}{4}c_{11}S_1^4 + \frac{1}{4}c_{12}S_1^2S_2^2 + \frac{1}{4}c_{22}S_2^4 + \\ &+ \frac{1}{2}c_{13}S_1^2P^* + \frac{1}{2}c_{23}S_2^2P^* + c_{33}P^{*2} + O_5, \quad S_i^2 = Q_i^2 + P_i^2, \quad i = 1, 2\end{aligned} \tag{2.9}$$

где c_{ij} – постоянные коэффициенты, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned}c_{11} &= \frac{1}{2}(3h_{4000}^* + h_{2020}^* + 3h_{0040}^*) - \frac{3}{4\omega_1}(5h_{3000}^{*2} + 2h_{3000}^*h_{1020}^* + h_{1020}^{*2}) + \\ &+ \frac{1}{4\omega_2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)}[(h_{2100}^{*2} + h_{0120}^{*2})(8\omega_1^2 - 3\omega_2^2) + \\ &+ 2h_{2100}^*h_{0120}^*(8\omega_1^2 - \omega_2^2) + 4h_{1011}^*(h_{0120}^* - h_{2100}^*)\omega_1\omega_2 - h_{1011}^{*2}\omega_2^2] \\ c_{22} &= \frac{1}{2}(3h_{0400}^* + h_{0202}^* + 3h_{0004}^*) - \frac{3}{4\omega_2}(5h_{0300}^{*2} + 2h_{0300}^*h_{0102}^* + h_{0102}^{*2}) + \\ &+ \frac{1}{4\omega_1(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)}[(h_{1200}^{*2} + h_{1002}^{*2})(8\omega_2^2 - 3\omega_1^2) + \\ &+ 2h_{1200}^*h_{1002}^*(8\omega_2^2 - \omega_1^2) + 4h_{0111}^*(h_{1002}^* - h_{1200}^*)\omega_1\omega_2 - h_{0111}^{*2}\omega_1^2] \\ c_{12} &= h_{2200}^* + h_{2002}^* + h_{0220}^* + h_{0022}^* - \frac{1}{\omega_1}(3h_{3000}^* + h_{1020}^*)(h_{1200}^* + h_{1002}^*) - \\ &- \frac{1}{\omega_2}(3h_{0300}^* + h_{0102}^*)(h_{2100}^* + h_{0120}^*) + \frac{2}{\omega_2^2 - 4\omega_1^2}[((h_{2100}^* - h_{0120}^*)^2 + h_{1011}^{*2})\omega_1 + \\ &+ h_{1011}^*(h_{2100}^* - h_{0120}^*)\omega_2] + \frac{2}{\omega_1^2 - 4\omega_2^2}[((h_{1200}^* - h_{1002}^*)^2 + h_{0111}^{*2})\omega_2 + h_{0111}^*(h_{1200}^* - h_{1002}^*)\omega_1] \\ c_{13} &= L_1 + L_3 - \frac{M_1}{\omega_1}(3h_{3000}^* + h_{1020}^*) - \frac{M_2}{\omega_2}(h_{2100}^* + h_{0120}^*) \\ c_{23} &= L_2 + L_4 - \frac{M_1}{\omega_1}(h_{1200}^* + h_{1002}^*) - \frac{M_2}{\omega_2}(3h_{0300}^* + h_{0102}^*) \\ c_{33} &= n - \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{\omega_1} + \frac{M_2^2}{\omega_2}\right) \\ M_i &= m_1n_{1i} + m_2n_{4i}, \quad L_i = n_{1i}(l_1n_{1i} + l_2n_{4i}), \quad i = 1, 2, \quad L_j = l_3n_{2j}^2, \quad j = 3, 4\end{aligned} \tag{2.10}$$

В результате преобразований (2.4), (2.8) функция $H^{(1)}$ в возмущающей части гамильтониана изменится, но структура ее останется такой же, как в (2.1).

3. Периодические движения спутника при отсутствии резонансов $\omega_1 \simeq -2N\Omega$, $\omega_2 \simeq -2N\Omega$.

3.1. Изоэнергетическая редукция. Для построения периодических решений рассмотрим сначала движения системы на изоэнергетическом уровне. При помощи интеграла энергии $H = \varepsilon\Omega h = \text{const}$ перейдем к редуцированной неавтономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы и независимой переменной Q. Роль функции Гамильтона будет играть при этом функция

$$K = \frac{1}{2}\frac{\omega_1}{\Omega}S_1^2 \pm \frac{1}{2}\frac{\omega_2}{\Omega}S_2^2 + \frac{1}{4}\hat{c}_{11}S_1^4 + \frac{1}{4}\hat{c}_{12}S_1^2S_2^2 + \frac{1}{4}\hat{c}_{22}S_2^4 +$$
$$+\varepsilon(\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4) + O_5 + O(\varepsilon^2) \tag{3.1}$$
$$\hat{c}_{ii} = c_{ii} - \frac{c_{i3}\omega_i}{\Omega} + \frac{c_{33}\omega_i^2}{\Omega^2}, \quad i = 1, 2, \quad \hat{c}_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}\omega_2 + c_{23}\omega_1}{\Omega} + \frac{2c_{33}\omega_1\omega_2}{\Omega^2}$$

где $\hat{H}_k$ – совокупность членов k-го порядка относительно S_i ($i = 1, 2$). Функция (3.1) π-периодична по Q и содержит, вообще говоря, все четные гармоники Q. В частности, форма $\hat{H}_1$ имеет вид (коэффициенты a, b, c, d определены в (2.3))

$$\hat{H}_1 = a_1\cos^2 QQ_1 + a_2\cos^2 QQ_2 + b_1\sin 2QP_1 + b_2\sin 2QP_2$$
$$a_i = n_{1i}b + n_{4i}d, \quad b_i = \frac{1}{2}n_{3,2+i}c + a\frac{M_i}{\omega_i}, \quad i = 1, 2 \tag{3.2}$$

В дальнейшем исследовании следует различать резонансный случай, при котором отношение частот ω_1/Ω или ω_2/Ω исходной гамильтоновой системы с тремя степенями свободы близко к целому четному числу и случай его отсутствия. Указанный резонанс равносилен наличию у редуцированной неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом (3.1) резонанса в вынужденных колебаниях. Резонансные кривые $\omega_i = -2N\Omega$ ($i = 1, 2$) в области I (где $\Omega < 0$) существуют для всех $N = 1, 2, 3, \ldots$; на фиг. 1 показаны кривые $\omega_1 = -2\Omega$ и $\omega_2 = -2\Omega$. Резонансные случаи $\omega_i \simeq -2\Omega$ ($i = 1, 2$) будут исследованы в разд. 4. Случаи резонансов $\omega_i \simeq -2N\Omega$ при $N \geq 2$ требуют учета в гамильтониане членов порядка ε^2 и выше и рассматриваться не будут.

В области II ($\Omega > 0$), как показывают расчеты, резонансные соотношения вида $\omega_i \simeq 2N\Omega$ ($i = 1, 2$) не реализуются.

3.2. Периодическое решение при отсутствии резонансов $\omega_i \simeq -2N\Omega$ ($i = 1, 2$). Геометрическая интерпретация. Пусть в системе нет резонансов вида $\omega_i \simeq -2N\Omega$ ($i = 1, 2$), т.е. точки (α, θ_0) не принадлежат кривым $\omega_i = -2N\Omega$ ($i = 1, 2$, $N = 1, 2, 3, \ldots$) из области I и их малым окрестностям или лежат в области II. Следуя методу Пуанкаре, можно построить единственное, π-периодическое по Q, аналитическое по ε решение системы с гамильтонианом (3.1), имеющее вид

$$Q_i = Q_i^*(Q) = \varepsilon\left[-\frac{a_i}{2\omega_i} + \frac{1}{2}\chi_i^{ab}\cos 2Q\right] + O(\varepsilon^2), \quad P_i = P_i^*(Q) = \varepsilon\chi_i^{ba}\sin 2Q + O(\varepsilon^2)$$
$$\chi_i^{ab} = \frac{a_i\omega_i - 4b_i\Omega}{4\Omega^2 - \omega_i^2}, \quad \chi_i^{ba} = \frac{b_i\omega_i - a_i\Omega}{4\Omega^2 - \omega_i^2}, \quad i = 1, 2 \tag{3.3}$$

для точек области I; для точек области II надо заменить ω_2 на $-\omega_2$.

Из соотношений (3.3) и интеграла энергии $H = \varepsilon\Omega h$ получим π-периодическое по Q решение для величины P^* (коэффициент a определен в (2.3))

$$P^* = J^*(Q) = \varepsilon\left[h - \frac{a\cos^2 Q}{\Omega}\right] + O(\varepsilon^2) \tag{3.4}$$

Соотношения (3.3) и (3.4) задают π-периодическое по Q, аналитическое по ε однопараметрическое семейство решений системы с тремя степенями свободы с гамильтонианом $\tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \varepsilon\tilde{H}^{(1)}$, невозмущенная часть $\tilde{H}^{(0)}$ которого определена формулой (2.9); параметром служит постоянная энергии h.

В исходных переменных этому семейству решений отвечает следующее семейство π-периодических по φ движений спутника:

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon(A_1 + A_2\cos 2\varphi) + O(\varepsilon^2), \quad \psi = \varepsilon B_1 \sin 2\varphi + O(\varepsilon^2)$$

$$A_1 = -n_{11}\frac{a_1 + 2M_1 h}{2\omega_1} - n_{12}\frac{a_2 + 2M_2 h}{2\omega_2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}n_{11}\chi_1^{ab} + \frac{1}{2}n_{12}\chi_2^{ab} \tag{3.5}$$

$$B_1 = n_{23}\chi_1^{ba} + n_{24}\chi_2^{ba}$$

При этом изменение переменной φ описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Omega + G(\varphi)$$

$$G(\varphi) = (m_1 n_{11} + m_2 n_{41})\left(Q_1^* - \frac{M_1}{\omega_1}J^*\right) +$$

$$+ (m_1 n_{12} + m_2 n_{42})\left(Q_2^* - \frac{M_2}{\omega_2}J^*\right) + 2nJ^* - \varepsilon\frac{\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0}\cos^2\varphi + O(\varepsilon^2)$$

Период решений (3.5) по "времени" τ равен $T = 2\pi/\Omega_1$, где $\Omega_1 = \Omega + \bar{G}$, а $\bar{G}$ – среднее значение функции $G(\varphi)$ за период π.

Соотношения (3.5) (если пренебречь слагаемыми $O(\varepsilon^2)$) отвечают такому движению спутника, когда единичный вектор его оси описывает на сфере единичного радиуса с центром в центре масс G пространственную кривую, проекция которой на плоскость $GX'Y'$ орбитальной системы координат, перпендикулярную оси спутника в невозмущенном движении, представляет собой эллипс (фиг. 2). Уравнение эллипса будет иметь вид (ось GX' совпадает с GX, ось GY' лежит в плоскости GXY и составляет с осью GY угол θ_0)

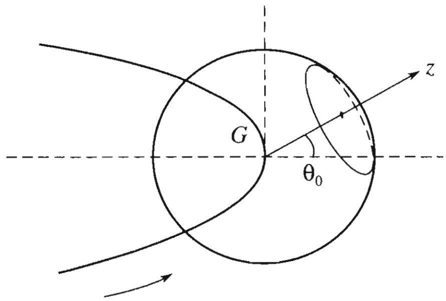
$$\frac{X'^2}{(\varepsilon B_1 \sin\theta_0)^2} + \frac{(Y' - \varepsilon A_1)^2}{(\varepsilon A_2)^2} = 1$$

Полуоси эллипса имеют длину порядка ε, его центр смещен относительно начала координат G на величину порядка ε.

3.3. Устойчивость периодического решения. Для решения вопроса об устойчивости периодического решения (3.3), (3.4) в гамильтониане $\tilde{H}$ (с невозмущенной частью (2.9)) при помощи канонического преобразования вида [12]

$$Q_i = Q_i^*(Q) + x_i, \quad P_i = P_i^*(Q) + y_i, \quad i = 1, 2, \quad Q = \varphi_3$$

$$P^* = J^*(Q) + x_1\frac{dP_1^*}{dQ} - y_1\frac{dQ_1^*}{dQ} + x_2\frac{dP_2^*}{dQ} - y_2\frac{dQ_2^*}{dQ} + R_3 \tag{3.6}$$



Фиг. 2

введем возмущения переменных Q_i, P_i ($i = 1, 2$), P^* относительно их значений на периодическом движении. Перейдем затем к "полярным" координатам φ_i, R_i ($i = 1, 2$) по формулам

$$x_i = \sqrt{2R_i}\sin\varphi_i, \quad y_i = \sqrt{2R_i}\cos\varphi_i$$

Тогда возмущенный гамильтониан примет вид

$$\Gamma = (\omega_1 R_1 \pm \omega_2 R_2 + \Omega R_3 + \varepsilon\Gamma_2^{(1)}) + \varepsilon\Gamma_3^{(1)} + \left(\sum_{i,\, j\, =\, 1;\, i \le j}^{3} c_{ij}R_iR_j + \varepsilon\Gamma_4^{(1)}\right) + O(\varepsilon^2) \qquad (3.7)$$

$\Gamma_k^{(1)}$ ($k = 2, 3, 4$) – формы k-й степени относительно величин $|R_i|^{1/2}$ ($i = 1, 2, 3$) с π-периодическими по φ_3 коэффициентами.

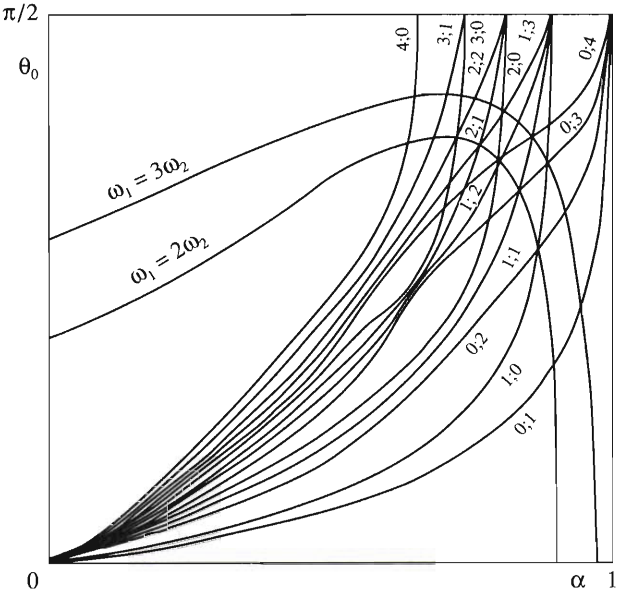
Случай параметрического резонанса. Пусть параметры α и θ_0 из областей I и II таковы, что частоты ω_1, ω_2 и Ω связаны одним из соотношений $2\omega_i = 2N|\Omega|$ ($i = 1$ или $i = 2$), $\omega_1 \pm \omega_2 = 2N|\Omega|$. Тогда в системе имеет место параметрический резонанс. Расчеты показывают, что в области II указанные соотношения не реализуются. В то же время в области I соответствующие резонансные кривые (РК) имеются для всех значений N. На фиг. 3 показаны РК $2\omega_1 = -2\Omega$, $2\omega_2 = -2\Omega$ и $\omega_1 + \omega_2 = -2\Omega$ (помеченные парами чисел 2; 0, 0; 2 и 1; 1 соответственно) для случая $N = 1$. Из каждой точки этих РК при $\varepsilon \ne 0$ рождается область параметрического резонанса (в трехмерном пространстве параметров α, θ_0, ε имеем две поверхности, выходящие при $\varepsilon = 0$ из каждой РК и задающие области параметрического резонанса). Для точек РК $\omega_1 - \omega_1 = -2N\Omega$ из области I имеет место устойчивость при учете в гамильтониане членов не выше первого порядка по R_i.

Вне этих РК форму $\Gamma_2^{(1)}$ в гамильтониане (3.7) можно упростить, оставляя в ней только "вековые" члены. Тогда получим

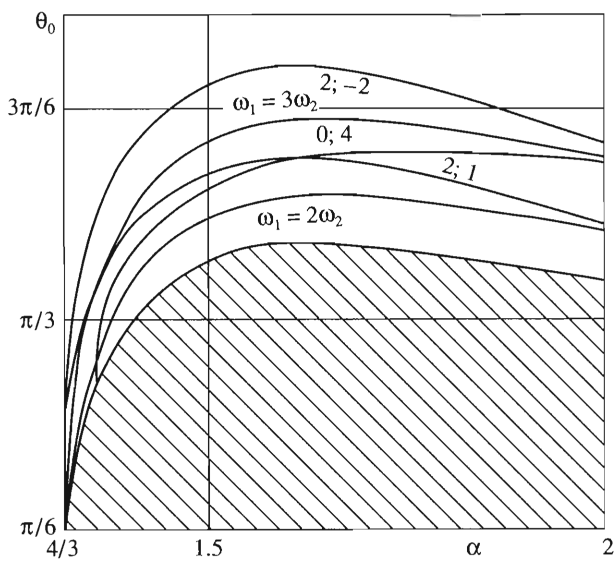
$$\begin{aligned} \Gamma^* &= (\lambda_1 R_1 \pm \lambda_2 R_2 + \Omega^* R_3) + \varepsilon\Gamma_3^{(1)} + (\textstyle\sum c_{ij}R_iR_j + \varepsilon\Gamma_4^{(1)*}) + O(\varepsilon^2) \\ \lambda_i &= \omega_i + O(\varepsilon) = \text{const}, \quad i = 1, 2, \quad \Omega^* = \Omega + O(\varepsilon) = \text{const} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Случаи резонансов третьего и четвертого порядков. Рассмотрим теперь случаи резонансов третьего и четвертого порядков. Соответствующие РК задаются уравнениями $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = 2N|\Omega^*|$ ($N = 1, 2, \ldots$), где k_1 и k_2 – целые числа, удовлетворяющие соотношению $|k_1| + |k_2| = l$ ($l = 3$ или $l = 4$).

На РК из областей I и II, для которых выполняются соотношения $k_1k_2 < 0$ и $k_1k_2 > 0$ соответственно (в области II существуют только РК $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2N\Omega^*$, $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2N\Omega^*$ указанного вида), имеет место устойчивость в соответствующем конечном приближении.



Фиг. 3



Фиг. 4

Неустойчивость может обнаружиться только на РК, для которых $k_1k_2 > 0$ в области I и $k_1k_2 < 0$ в области II (в последней существуют только РК $2\lambda_1 - \lambda_2 = 2N\Omega^*$, $4\lambda_2 = 2N\Omega^*$, $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2N\Omega^*$). Ограничимся рассмотрением случая $N = 1$; резонансные эффекты при $N > 1$ проявляются в членах порядка ε^N. РК рассматриваемого вида для случая $N = 1$ показаны на фиг. 3 и 4; каждая РК отмечена соответствующей парой чисел k_1; k_2.

Для точек РК третьего порядка рассматриваемое периодическое движение неустойчиво, если в гамильтониане (3.8) коэффициент в слагаемом с соответствующей резонансной гармоникой в форме $\Gamma_3^{(1)}$ отличен от нуля [2]. Расчеты показывают, что условие неустойчивости нарушается (соответствующий коэффициент обращается в нуль) для точек РК с абсциссами

0.153…, 0.661…, 0.796…, 0.897… (РК $3\lambda_2 = -2\Omega^*$)

0.512…, 0.672…, 0.823…, 0.889… (РК $\lambda_1 + 2\lambda_2 = -2\Omega^*$)

0.145…, 0.643…, 0.820… (РК $2\lambda_1 + \lambda_2 = -2\Omega^*$)

0.258…, 0.648… (РК $3\lambda_1 = -2\Omega^*$)

1.361…, 1.518… (РК $2\lambda_1 - \lambda_2 = 2\Omega^*$ из области II)

Пусть теперь в системе нет резонансов до третьего порядка включительно и при этом точка (α, θ_0) принадлежит одной из РК четвертого порядка. Тогда форму $\Gamma_3^{(1)}$ в гамильтониане (3.8) можно уничтожить, а члены четвертой степени упростить с учетом имеющегося резонанса. Так как резонансные слагаемые в членах четвертой степени имеют порядок ε, в то время как коэффициенты c_{ij} порядка единицы, то на РК четвертого порядка, как правило, имеет место устойчивость при учете в гамильтониане членов не выше второго порядка по R_i [2]. Исключение составляют такие точки на РК, для которых коэффициенты $\hat{c}_{ij}$ в членах четвертой степени гамильтониана редуцированной системы с двумя степенями свободы, отвечающей системе с гамильтонианом (3.8), удовлетворяют соотношениям (выражения для коэффициентов $\hat{c}_{ij}$ см. в формулах (3.1)) [2]

$$\begin{aligned}
&\hat{c}_{11} = 0 \text{ (для РК } 4\lambda_1 = -2\Omega^*) \\
&9\hat{c}_{11} + 3\hat{c}_{12} + \hat{c}_{22} = 0 \text{ (для РК } 3\lambda_1 + \lambda_2 = -2\Omega^*) \\
&\hat{c}_{11} + \hat{c}_{12} + \hat{c}_{22} = 0 \text{ (для РК } 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = -2\Omega^*) \\
&\hat{c}_{11} + 3\hat{c}_{12} + 9\hat{c}_{22} = 0 \text{ (для РК } \lambda_1 + 3\lambda_2 = -2\Omega^*) \\
&\hat{c}_{22} = 0 \text{ (для РК } 4\lambda_2 = -2\Omega^*)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Для РК $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2\Omega^*$ и $4\lambda_2 = 2\Omega^*$ из области II имеем соотношения, аналогичные третьему и пятому уравнениям в (3.9).

Расчеты показывают, что первое соотношение (3.9) не реализуется, остальные соотношения (3.9) имеют место в точках с абсциссами 0.717…; 0.576…, 0.632…, 0.761…; 0.533…, 0.673…; 0.397… соответственно. В области II соответствующее соотношение для РК $4\lambda_2 = -2\Omega^*$ не реализуется, а для РК $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2\Omega^*$ имеет место в точке с абсциссой 1.391….

Расчеты для точек РК третьего и четвертого порядков при $\alpha = 2/3$ проводились отдельно с использованием формул (2.6), (2.7). Показано, что при резонансе третьего порядка в этих точках имеем неустойчивость (резонансные коэффициенты отличны от нуля), кроме точки, лежащей на РК $3\lambda_1 = -2\Omega^*$, где соответствующий резонансный коэффициент обращается в нуль. Для точек всех РК четвертого порядка с абсциссами $\alpha = 2/3$ соотношения (3.9) и аналогичные им для области II не реализуются, т.е. имеет место устойчивость в конечном приближении.

Общий нерезонансный случай. Пусть, наконец, в системе нет резонансов до четвертого порядка включительно, тогда нормализованный до членов четвертой степени гамильтониан (3.8) имеет вид

$$\Gamma = \Gamma^* + O(\varepsilon), \quad \Gamma^* = \lambda_1 R_1 \pm \lambda_2 R_2 + \Omega^* R_3 + \sum c_{ij}^* R_i R_j$$

$$c_{ij}^* = c_{ij} + O(\varepsilon) = \text{const}$$

Рассматриваемое периодическое движение будет орбитально устойчивым для большинства начальных условий, если выполняются условия [3]

$$D_3 = \det\left\|\frac{\partial^2\Gamma^*}{\partial R_i \partial R_j}\right\| \neq 0, \quad \text{или} \quad D_3 = \det\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial^2\Gamma^*}{\partial R_i \partial R_j} & \dfrac{\partial\Gamma^*}{\partial R_i} \\ \dfrac{\partial\Gamma^*}{\partial R_j} & 0 \end{matrix}\right\| \neq 0 \qquad (3.10)$$

Дополнение к указанному большинству начальных условий имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$ [3].

Расчеты показали, что в области II $D_3 < 0$ и $D_4 > 0$, поэтому для всех точек области II вне РК имеет место орбитальная устойчивость для большинства начальных условий. В то же время в области I существуют РК, на которых $D_3 = 0$ и $D_4 = 0$. Условие $D_3 = D_4 = 0$ выполняется в двух точках (0.604…; 1.370…) и (0.817…; 0.704…) области I.

Таким образом, в общем нерезонансном случае рассматриваемое периодическое движение спутника орбитально устойчиво (для большинства начальных условий) как в области II, так и в области I (за исключением, быть может, двух указанных точек).

4. Периодические движения спутника при резонансах $\omega_i \simeq -2\Omega$ ($i = 1, 2$). Построим теперь периодические движения спутника для значений параметров α, θ_0, принадлежащих РК $\omega_1 = -2\Omega$ и $\omega_2 = -2\Omega$ или их малым окрестностям (см. фиг. 1, а также фиг. 3, где эти РК помечены парами чисел 1; 0 и 0; 1).

Теория резонансных периодических движений автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, близких к системам с циклической координатой, разработана ранее [1]. Обобщим эти результаты на рассматриваемый здесь случай системы с тремя степенями свободы.

Положим в гамильтониане $\tilde{H}$ (с невозмущенной частью (2.9))

$$Q_i = \varepsilon^{1/3} Q_i^*, \quad P_i = \varepsilon^{1/3} P_i^*, \quad i = 1, 2, \quad P^* = \varepsilon^{2/3} J_3, \quad Q = \psi_3$$

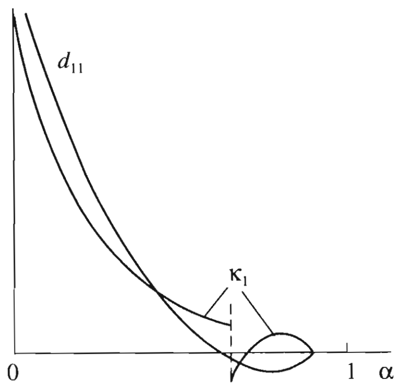
и перейдем затем к "полярным" координатам ψ_i, $J_i (i = 1, 2)$ по формулам

$$Q_i^* = \sqrt{2J_i}\sin\psi_i, \quad P_i^* = \sqrt{2J_i}\cos\psi_i$$

Гамильтониан примет вид

$$H^* = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \Omega J_3 + \varepsilon^{2/3} \sum_{i, j = 1;\, i \le j}^{3} c_{ij} J_i J_j + \varepsilon^{1/3} H_0^{*(1)} + \varepsilon^{2/3} H_1^{*(1)} + O(\varepsilon) \qquad (4.1)$$

Функция $H_0^{*(1)}$ получается из определенной в (2.3) функции $H_0^{(1)}$ заменой φ на ψ_3, а функция $H_1^{*(1)}$ – из функции (3.2) заменой Q на ψ_3, а Q_i и P_i ($i = 1, 2$) – на $\sqrt{2J_i}\sin\psi_i$ и $\sqrt{2J_i}\cos\psi_i$.



Фиг. 5

При помощи канонической замены

$$J_3^* = J_3 - \varepsilon^{1/3}\frac{H_0^{*(1)}}{\Omega}, \quad \psi_3 = \psi_3$$

уничтожим в (4.1) слагаемое с $H_0^{*(1)}$. Уничтожим также в $H_1^{*(1)}$ все слагаемые с нерезонансными гармониками.

4.1. Случай $\omega_1 \simeq -2\Omega$. Пусть сначала $\omega_1 \simeq -2\Omega$. Тогда в $H_1^{*(1)}$ останется слагаемое $\kappa_1\sqrt{J_1}\sin(\psi_1 + 2\psi_3)$, где $\kappa_1 = \sqrt{2}\,(a_1 + 2b_1)/4$ (величины a_1 и b_1 определены в (3.2)).

Сделаем каноническую замену переменных

$$\psi_1 = \psi_1^* - 2\psi_3^* + \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2 = \psi_2^*, \quad \psi_3 = \psi_3^*$$

$$J_1 = I_1, \quad J_2 = I_2, \quad J_3 = I_3 + 2I_1$$

и введем резонансную расстройку, положив $\omega_1/\Omega = -2 + \varepsilon^{2/3}\delta$. Гамильтониан системы примет вид

$$\begin{aligned} H &= \Omega I_3 + \omega_2 I_2 + \varepsilon^{2/3}\{(d_{22}I_2^2 + d_{23}I_2I_3 + d_{33}I_3^2) + \\ &+ [(\delta\Omega + d_{12}I_2 + d_{13}I_3)I_1 + \kappa_1\sqrt{I_1}\cos\psi_1^* + d_{11}I_1^2]\} + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$d_{11} = c_{11} + 2c_{13} + 4c_{33}, \quad d_{12} = c_{12} + 2c_{23}, \quad d_{13} = c_{13} + 4c_{33}, \quad d_{jk} = c_{jk}, \quad j, k = 2, 3$$

Значения частот Ω и ω_2 в (4.2) должны вычисляться для значений параметров α и θ_0, принадлежащих РК $\omega_1 = -2\Omega$ или ее малой окрестности. Значения же коэффициентов κ_1 и d_{ij} достаточно вычислить для точек $(\alpha, \theta_0(\alpha))$, лежащих на РК.

Вид периодического решения определяется значениями коэффициентов κ_1 и d_{11}. Зависимости $\kappa_1 = \kappa_1(\alpha)$ и $d_{11} = d_{11}(\alpha)$ $(\alpha \in (0, 0.900))$ на РК $\omega_1 = -2\Omega$ показаны на фиг. 5.

Исключим из рассмотрения точки $\alpha = 0.764\ldots$, $\alpha = 0.626\ldots$ (нули этих функций). В точке разрыва $\alpha = 2/3$ графика функции $\kappa_1 = \kappa_1(\alpha)$ расчет коэффициентов n_{ij} линейной замены переменных (2.4) следует сделать по формулам (2.6); все остальные преобразования и вычисления проводятся, как в общем случае, при этом получаем $\kappa_1 \neq 0$.

Сделаем замену переменных

$$I_i = \kappa_{1*}\rho_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \psi_1^* = \theta_1 + \sigma_1, \quad \psi_j^* = \theta_j, \quad j = 2, 3$$

$$\kappa_{1*} = (\kappa_1/d_{11})^{2/3}, \quad \sigma_1 = \pi(1 - \operatorname{sign}(\kappa_1 d_{11}))/2$$

Преобразованный гамильтониан примет следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \Omega\rho_3 + \omega_2\rho_2 + \varepsilon^{2/3}\{(\alpha_1\rho_2^2 + \alpha_2\rho_2\rho_3 + \alpha_3\rho_3^2) + \\ &+ \beta[(b_1\delta + b_2\rho_2 + b_3\rho_3)\rho_1 + \rho_1^2 + \sqrt{\rho_1}\cos\theta_1]\} + O(\varepsilon) \\ \alpha_1 &= d_{22}\kappa_{1*}, \quad \alpha_2 = d_{23}\kappa_{1*}, \quad \alpha_3 = d_{33}\kappa_{1*}, \quad \beta = d_{11}\kappa_{1*} \\ b_1 &= \Omega/\beta, \quad b_2 = d_{12}/d_{11}, \quad b_3 = d_{13}/d_{11}\end{aligned} \tag{4.3}$$

Слагаемое $O(\varepsilon)$ в (4.3) π-периодично по θ_3.

Построим периодические движения системы с гамильтонианом (4.3) (см. [1]). Сначала рассмотрим движения системы на изоэнергетическом уровне. При помощи интеграла энергии $\hat{H} = \Omega h = \mathrm{const}$ перейдем к редуцированной системе с двумя степенями свободы с независимой переменной θ_3. Гамильтониан этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}K &= \frac{\omega_2}{\Omega}\rho_2 + \frac{\varepsilon^{2/3}}{\Omega}\left\{\left[\alpha_1\rho_2^2 + \alpha_2\left(h - \frac{\omega_2}{\Omega}\rho_2\right)\rho_2 + \alpha_3\left(h - \frac{\omega_2}{\Omega}\rho_2\right)^2\right] + \right. \\ &\left. + \beta\left[\left(b_1\delta + b_2\rho_2 + b_3\left(h - \frac{\omega_2}{\Omega}\rho_2\right)\right)\rho_1 + \rho_1^2 + \sqrt{\rho_1}\cos\theta_1\right]\right\} + O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{4.4}$$

Рассмотрим также приближенный гамильтониан $\hat{K}$, получающийся из K путем отбрасывания слагаемого $O(\varepsilon)$. В системе с гамильтонианом $\hat{K}$ координата θ_2 циклическая, поэтому $\rho_2 = c_2 = \mathrm{const}$. Если отбросить аддитивную постоянную, то гамильтониан $\hat{K}$ примет вид

$$\begin{aligned}\hat{K} &= \frac{\varepsilon^{2/3}\beta}{\Omega}H', \quad H' = -\chi\rho_1 + \rho_1^2 + \sqrt{\rho_1}\cos\theta_1 \\ \chi &= -\left[b_1\delta + b_2c_2 + b_3\left(h - \frac{\omega_2}{\Omega}c_2\right)\right] = \mathrm{const}\end{aligned} \tag{4.5}$$

Функция H' представляет собой модельный гамильтониан для систем с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях [13]. Однако если в последних параметр χ определяется только величиной резонансной расстройки, то в гамильтониане H' параметр χ зависит еще от постоянной c_2 циклического интеграла (связанной с наличием циклической координаты θ_2) и от постоянной энергии h исходной системы с тремя степенями свободы.

Положения равновесия приближенной системы с гамильтонианом (4.5) описываются соотношениями

$$\rho_2 = c_2 = 0, \quad \rho_1 = \rho_{1*}, \quad \theta_1 = \theta_{1*} \tag{4.6}$$

где θ_{1*}, ρ_{1*} – одно из положений равновесия модельной системы с гамильтонианом H'. При $\chi < 3/2$ модельная система имеет одно устойчивое положение равновесия

$$\rho_1^{(0)} = \frac{|\chi|}{3}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3} + \frac{\chi}{3}, \quad \theta_1^{(0)} = \pi \left(\operatorname{ch}\varphi = \frac{27 - 4\chi^3}{4|\chi|^3}\right) \tag{4.7}$$

а при $\chi \geq 3/2$ – три положения равновесия

$$\begin{aligned} &\rho_1^{(1)} = -\frac{\chi}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{\chi}{3}, \quad \theta_1^{(1)} = 0; \quad \rho_1^{(2)} = -\frac{\chi}{3}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{\chi}{3}, \quad \theta_1^{(2)} = 0 \\ &\rho_1^{(3)} = -\frac{\chi}{3}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\chi}{3}, \quad \theta_1^{(3)} = \pi \left(\cos\varphi = \frac{4\chi^3 - 27}{4\chi^3}\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

из которых два, отвечающие большему ($\rho_1^{(3)}$) и меньшему ($\rho_1^{(1)}$) значениям ρ_1, устойчивы, а одно, отвечающее среднему ($\rho_1^{(2)}$) значению ρ_1, неустойчиво [13].

При $\chi = 3/2$ модельная система имеет неустойчивую сложную особую точку $\rho_1 = 1/4$, $\theta_1 = 0$, которую далее исключим из рассмотрения, и устойчивое положение равновесия $\rho_1 = 1$, $\theta_1 = \pi$.

В окрестности положения равновесия (4.6) приближенной системы полный гамильтониан (4.4) редуцированной системы имеет вид (положено $\rho_2 = r_2$, $\theta_1 = \theta_{1*} + x_1$, $\rho_1 = \rho_{1*} + y_1$)

$$K = \left[\frac{\omega_2}{\Omega} + O(\varepsilon^{2/3})\right]r_2 + \frac{\varepsilon^{2/3}\beta}{\Omega}\left[\rho_{1*}(2\rho_{1*} - \chi)x_1^2 + \frac{6\rho_{1*} - \chi}{4\rho_{1*}}y_1^2 + O_3\right] + O(\varepsilon) \tag{4.9}$$

где O_3 – совокупность членов, степень которых по x_1, y_1, $r_2^{1/2}$ не ниже третьей. Слагаемое $O(\varepsilon)$ в (4.9) π-периодично по θ_3.

Расчеты показывают, что величина ω_2/Ω не близка к целому четному числу для значений параметров α, θ_0, принадлежащих РК $\omega_1 = -2\Omega$ и ее малой окрестности. Имеет место нерезонансный случай теории периодических движений Пуанкаре, и из каждого положения равновесия приближенной системы с гамильтонианом $\hat{K}$ рождается единственное, π-периодическое по θ_3, аналитическое по $\varepsilon^{1/3}$ решение системы с гамильтонианом K, имеющее вид

$$\theta_1 = \tilde{\theta}_1(\theta_3) + \theta_{1*} + O(\varepsilon), \quad \rho_1 = \tilde{\rho}_1(\theta_3) = \rho_{1*} + O(\varepsilon), \quad \rho_2 = \tilde{\rho}_2(\theta_3) = O(\varepsilon^2) \tag{4.10}$$

Последнее соотношение в (4.10) можно заменить двумя соотношениями для отвечающих паре θ_2, ρ_2 декартовых координат x_2, y_2 ($x_2 = \sqrt{2\rho_2}\sin\theta_2$, $y_2 = \sqrt{2\rho_2}\cos\theta_2$)

$$x_2 = \tilde{x}_2(\theta_3) = O(\varepsilon), \quad y_2 = \tilde{y}_2(\theta_3) = O(\varepsilon)$$

Из соотношений (4.10) и интеграла энергии системы с тремя степенями свободы с гамильтонианом (4.3) получим

$$\begin{aligned} &\rho_3 = \tilde{\rho}_3(\theta_3) = h - \frac{\varepsilon^{2/3}}{\Omega}\{\alpha_3 h^2 + \beta[-\chi\rho_{1*} + \rho_{1*}^2 + \sqrt{\rho_{1*}}\cos\theta_{1*}]\} + O(\varepsilon^{5/3}) \\ &\chi = -(b_1\delta + b_3 h) \end{aligned} \tag{4.11}$$

где слагаемое $O(\varepsilon^{5/3})$ π-периодично по θ_3.

Соотношения (4.10), (4.11) описывают однопараметрическое семейство (роль параметра играет постоянная энергии h) π-периодических по θ_3 аналитических по величине $\varepsilon^{1/3}$ решений системы с тремя степенями свободы с гамильтонианом (4.3). Таких семейств в зависимости от параметра χ модельной системы может быть одно или три.

В исходных переменных имеем следующее π-периодическое по φ (углу собственного вращения) аналитическое по $\varepsilon^{1/3}$ семейство движений спутника:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \varepsilon^{1/3} n_{11}\sqrt{2\kappa_{1*}\rho_{1*}}\cos(\theta_{1*} + \sigma_1 - 2\varphi) + O(\varepsilon^{2/3}) \\ \psi &= -\varepsilon^{1/3} n_{23}\sqrt{2\kappa_{1*}\rho_{1*}}\sin(\theta_{1*} + \sigma_1 - 2\varphi) + O(\varepsilon^{2/3})\end{aligned} \tag{4.12}$$

При этом изменение переменной φ от τ описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Omega + \varepsilon^{1/3} g_1(\varphi)$$

$$g_1(\varphi) = (m_1 n_{11} + m_2 n_{41})\sqrt{2\kappa_{1*}\rho_{1*}}\cos(\theta_{1*} + \sigma_1 - 2\varphi) + O(\varepsilon^{1/3})$$

Период движений (4.12) по τ равен

$$T = 2\pi/\Omega^*, \quad \Omega^* = \Omega + \varepsilon^{1/3}\bar{g}_1 = \Omega + O(\varepsilon^{2/3})$$

где $\bar{g}_1$ – среднее за период π значение функции $g_1(\varphi)$.

Если пренебречь слагаемыми $O(\varepsilon^{2/3})$, то соотношения (4.12) определяют такое движение спутника, когда единичный вектор его оси описывает на единичной сфере с центром в центре масс спутника замкнутую пространственную кривую, проекция которой на плоскость $GX'Y'$ (описанную в разд. 3.2) представляет собой эллипс

$$\frac{X'^2}{(\varepsilon^{1/3}\sin\theta_0 n_{23}\sqrt{2\kappa_{1*}\rho_{1*}})^2} + \frac{Y'^2}{(\varepsilon^{1/3} n_{11}\sqrt{2\kappa_{1*}\rho_{1*}})^2} = 1$$

с полуосями порядка $\varepsilon^{1/3}$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости найденных периодических движений. Движения, рождающиеся из неустойчивого положения равновесия модельной системы с гамильтонианом H', будут неустойчивыми, так как характеристическое уравнение линеаризованной приближенной системы имеет положительный вещественный корень.

Для решения вопроса об устойчивости движений, рождающихся из устойчивых положений равновесия модельной системы, зададим возмущения переменных системы с гамильтонианом (4.3) относительно их значений на периодических движениях при помощи следующего канонического преобразования (аналогичного (3.6)):

$$\theta_1 = \tilde{\theta}_1 + X_1, \quad \rho_1 = \tilde{\rho}_1 + Y_1, \quad x_2 = \tilde{x}_2 + X_2, \quad y_2 = \tilde{y}_2 + Y_2, \quad \theta_3 = w$$

$$\rho_3 = \tilde{\rho}_3 + X_1\frac{d\tilde{\rho}_1}{dw} - Y_1\frac{d\tilde{\theta}_1}{dw} + X_2\frac{d\tilde{y}_2}{dw} - Y_2\frac{d\tilde{x}_2}{dw} + r_3^*$$

Далее осуществим нормализацию возмущенного гамильтониана до членов четвертого порядка включительно. В "полярных" координатах φ_i, r_i (i = 1, 2, 3) нормализованный гамильтониан примет вид

$$H = \varepsilon^{2/3}\beta\omega^* r_1 + \omega_2^* r_2 + \Omega^* r_3 + \varepsilon^{2/3}\sum e_{ij} r_i r_j + O(\varepsilon)$$

где

$$\omega^* = \omega + O(\varepsilon^{1/3})(\omega^2 = (6\rho_{1*} - \chi)(2\rho_{1*} - \chi)), \quad \omega_2^* = \omega_2 + O(\varepsilon^{2/3}), \quad \Omega^* = \Omega + O(\varepsilon^{2/3})$$

а коэффициенты e_{ij} (если отбросить в них слагаемые порядка $\varepsilon^{1/3}$ и выше) вычисляются по формулам

$$e_{11} = \frac{\beta}{4}\left[2(a_6 + 3a_5 + 3a_7) - \frac{3a_3^2 + 6a_3a_4 + 15a_4^2}{\omega}\right], \quad e_{12} = -\frac{\beta c_1}{\omega}(a_3 + 3a_4)$$

$$e_{13} = -\frac{\beta c_2}{\omega}(a_3 + 3a_4), \quad e_{22} = \alpha_1 - \frac{\beta c_1^2}{2\omega}, \quad e_{23} = \alpha_2 - \frac{\beta c_1 c_2}{\omega}, \quad e_{33} = \alpha_3 - \frac{\beta c_2^2}{2\omega}$$

$$a_3 = -\frac{\chi - 2\rho_{1*}}{2}s, \quad a_4 = \frac{\chi - 2\rho_{1*}}{8\rho_{1*}^2 s^3}, \quad a_5 = \frac{\rho_{1*}(\chi - 2\rho_{1*})}{12}s^4$$

$$a_6 = \frac{\chi - 2\rho_{1*}}{8\rho_{1*}}, \quad a_7 = -\frac{5(\chi - 2\rho_{1*})}{64\rho_{1*}^3 s^4}, \quad c_1 = \frac{b_2}{s}, \quad c_2 = \frac{b_3}{s}$$

$$s = \left[\frac{6\rho_{1*} - \chi}{4\rho_{1*}^2(2\rho_{1*} - \chi)}\right]^{1/4}$$

Коэффициенты e_{ij} зависят от параметра χ модельной системы, а также от положения точки $(\alpha, \theta_0(\alpha))$ на РК.

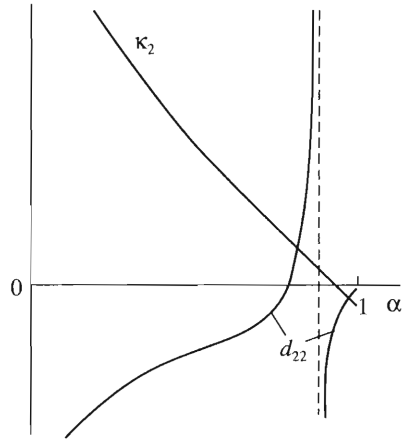
Проверим условия, аналогичные (3.10), для всех допустимых значений параметров χ и α. Расчеты показывают, что для периодических движений, рождающихся при $\chi > 3/2$ из устойчивых положений равновесия модельной системы, которым отвечают $\rho_{1*} = \rho_1^{(1)}$ или $\rho_{1*} = \rho_1^{(3)}$, указанные условия выполняются, и эти движения орбитально устойчивы для большинства начальных условий. В случае $\chi < 3/2$ для периодических движений, рождающихся из устойчивого положения равновесия модельной системы, которому отвечает $\rho_{1*} = \rho_1^{(0)}$, эти условия нарушаются в единственной точке $\alpha = 0.626\ldots$, $\chi = -0.459\ldots$, где $D_3 = D_4 = 0$; для остальных допустимых значений параметров α, χ рассматриваемые движения орбитально устойчивы для большинства начальных условий.

4.2. Случай $\omega_2 \simeq -2\Omega$. Аналогичным образом могут быть получены периодические движения спутника, возникающие в окрестности его конической прецессии, при резонансе $\omega_2 \simeq -2\Omega$.

На РК $\omega_2 = -2\Omega$ существует счетное множество точек, для которых имеем $\omega_1/\omega_2 = N$ ($N = 2, 3, \ldots$) (случаям $N = 2$ и $N = 3$ отвечают точки пересечения кривой $\omega_2 = -2\Omega$ с кривыми $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ соответственно, см. фиг. 1). Эти случаи кратного резонанса далее не рассматриваем.

Вне указанных точек и их малых окрестностей вид периодических движений определяют резонансный коэффициент $\kappa_2 = \sqrt{2}(a_2 + 2b_2)/4$ и коэффициент $d_{22} = c_{22} + {}+2c_{23} + 4c_{33}$ в членах четвертой степени гамильтониана, аналогичного (4.2).

Графики функций $\kappa_2 = \kappa_2(\alpha)$ и $d_{22} = d_{22}(\alpha)$ на РК $\omega_2 = -2\Omega$ представлены на фиг. 6. Эти функции имеют нули при $\alpha = 0.925\ldots$ и $\alpha = 0.844\ldots$ соответственно. Кроме того,



Фиг. 6

функция $d_{22} = d_{22}(\alpha)$ имеет разрыв при $\alpha = 0.888\ldots$ (в точке пересечения РК $\omega_2 = -2\Omega$ и $\omega_1 = 2\omega_2$). Эти значения α также исключим из рассмотрения.

Для остальных значений α получим такие семейства π-периодических по φ аналитических по $\varepsilon^{1/3}$ движений спутника:

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta_0 + \varepsilon^{1/3} n_{12}\sqrt{2\kappa_{2*}\rho_{2*}}\cos(\theta_{2*} + \sigma_2 - 2\varphi) + O(\varepsilon^{2/3}) \\
\psi &= -\varepsilon^{1/3} n_{24}\sqrt{2\kappa_{2*}\rho_{2*}}\sin(\theta_{2*} + \sigma_2 - 2\varphi) + O(\varepsilon^{2/3}) \qquad (4.13) \\
\kappa_{2*} &= (\kappa_2/d_{22})^{2/3}, \quad \sigma_2 = \pi(1 - \operatorname{sign}(\kappa_2 d_{22}))/2
\end{aligned}$$

Здесь (θ_{2*}, ρ_{2*}) – положения равновесия модельной системы, определяемые формулами (4.7) и (4.8). Параметр χ модельной системы на периодических решениях (4.13) вычисляется по формуле

$$\chi = -(\tilde{b}_1\tilde{\delta} + \tilde{b}_3 h)$$

$$\tilde{b}_1 = \Omega/\tilde{\beta}, \quad \tilde{\beta} = \tilde{d}_{22}\kappa_{2*}, \quad \tilde{b}_3 = \tilde{d}_{23}/\tilde{d}_{22}, \quad \tilde{d}_{22} = c_{22} + 2c_{23} + 4c_{33}, \quad \tilde{d}_{23} = c_{23} + 4c_{33}$$

где $\tilde{\delta}$ – резонансная расстройка, вводимая по формуле $\omega_2/\Omega = -2 + \varepsilon^{2/3}\tilde{\delta}$.

На решениях (4.13) изменение переменной φ от τ описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Omega + \varepsilon^{1/3} g_2(\varphi)$$

$$g_2(\varphi) = (m_1 n_{12} + m_2 n_{42})\sqrt{2\kappa_{2*}\rho_{2*}}\cos(\theta_{2*} + \sigma_2 - 2\varphi) + O(\varepsilon^{1/3})$$

Период движения (4.13) по τ равен

$$T = 2\pi/\Omega_2^*, \quad \Omega_2^* = \Omega + \varepsilon^{1/3}\bar{g}_2 = \Omega + O(\varepsilon^{2/3})$$

где $\bar{g}_2$ – среднее за период π значение функции $g_2(\varphi)$.

В зависимости от параметра χ модельной системы имеется одно или три периодических семейства вида (4.13).

Движения спутника, рождающиеся (при $\chi > 3/2$) из неустойчивого положения равновесия модельной системы, будут неустойчивыми. Движения, рождающиеся из устойчивых положений равновесия модельной системы, орбитально устойчивы для большинства начальных условий, так как условия, аналогичные (3.10), как показывают расчеты, удовлетворяются для всех допустимых значений параметров α, χ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00831).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холостова О.В.* О внутреннем резонансе в автономной гамильтоновой системе, близкой к системе с циклической координатой // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 366–380.
2. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
4. *Дубошин Г.Н.* О вращательном движении искусственных тел // Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР. 1960. Т. 7. № 7. С. 511–520.
5. *Черноусько Ф.Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 155–157.
6. *Маркеев А.П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 738–744.
7. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
8. *Сарычев В.А.* Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника // Космич. исследования. 1965. Т. 3. Вып. 5. С. 667–673.
9. *Сарычев В.А., Сазонов В.В.* Гравитационная ориентация вращающегося спутника // Космич. исследования. 1981. Т. 19. Вып. 4. С. 499–512.
10. *Чеховская Т.Н.* Резонансные периодические движения осесимметричного спутника на эллиптической орбите // Космич. исследования. 1986. Т. 24. Вып. 1. С. 15–23.
11. *Сазонов В.В., Сидорюк М.Е.* Периодические движения осесимметричного спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 6–16.
12. *Маркеев А.П.* Динамические причины асимметрии расположения люков в поясе астероидов // Письма в Астрон. ж. 2001. Т. 27. № 7. С. 554–559.
13. *Холостова О.В.* О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 167–175.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.2003