УДК 531/532:534.1

© 2004 г. А. Г. Петров

ОБ ИНВАРИАНТНОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ НЕАВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Предлагается новый метод построения канонических замен переменных в параметрическом виде, отличный от существующих в гамильтоновой механике конструктивных методов: метода производящих функций и метода генераторов. Формулируется критерий существования параметрического представления канонической замены переменных и выводится закон преобразования гамильтониана. Развитый метод применяется для нахождения нормальной формы гамильтонианов. Используется определение нормальной формы [1, 2], которое не требует разделения на автономный – неавтономный, резонансный – нерезонансный случаи и осуществляется в рамках единого подхода. Для асимптотик нормальной формы выводится система уравнений, аналогичная цепочке уравнений, полученной ранее в [1, 2]. Вместо метода генератора и производящего гамильтониана используется параметризованная производящая функция [3], что позволяет без приведения системы к автономной, как и ранее [1, 2], получить цепочку уравнений непосредственно для неавтономных гамильтонианов.

1. Параметрическая форма канонических преобразований. Общий результат параметризации канонической замены переменных в гамильтоновых системах сформулируем в виде теоремы [3].

Теорема 1. Пусть преобразование переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ записано в параметрической форме

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{x} - \frac{1}{2}\Psi_y, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{x} = \frac{1}{2}\Psi_y \\ \mathbf{p} &= \mathbf{y} + \frac{1}{2}\Psi_x, \quad \mathbf{P} = \mathbf{y} - \frac{1}{2}\Psi_x \end{aligned} \tag{1.1}$$

Тогда при любой функции $\Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$

1) якобианы двух преобразований $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ тождественны:

$$\frac{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = J(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{1.2}$$

2) в области $J > 0$ преобразование (1.1) переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ переводит гамильтонову систему $H = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ в гамильтонову систему $\tilde{H} = \tilde{H}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ по следующему закону:

$$\Psi_t(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{H}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) \tag{1.3}$$

где аргументы $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ и $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ в гамильтонианах H и $\tilde{H}$ выражены через параметры $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ по формулам (1.1).

Зададимся целью исследовать, для каких канонических преобразований существует параметризация.

2. Производящие функции. Каноническое преобразование можно представить также через производящие функции $S_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})$ и $S_2(t, \mathbf{Q}, \mathbf{p})$

$$dS_1 = \mathbf{p}d\mathbf{q} + \mathbf{Q}d\mathbf{P} + (\tilde{H} - H)dt, \quad \det S_{1\mathbf{qP}} \neq 0$$

$$dS_2 = -\mathbf{q}d\mathbf{p} + \mathbf{P}d\mathbf{Q} + (\tilde{H} - H)dt, \quad \det S_{2\mathbf{pQ}} \neq 0$$

Введем новую производящую функцию

$$\Phi = \frac{1}{2}[S_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}) - \mathbf{qP} + S_2(t, \mathbf{Q}, \mathbf{p}) + \mathbf{Qp}] \tag{2.1}$$

Ее дифференциальная форма такова:

$$d\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} Q_i - q_i & P_i - p_i \\ dQ_i + dq_i & dP_i + dp_i \end{vmatrix} + (\tilde{H} - H)dt \tag{2.2}$$

При $dt = 0$ дифференциальная форма $d\Phi$ была приведена Пуанкаре (см. [4] с. 191, [5], с. 337) и показано, что если $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – каноническое преобразование, то $d\Phi$ – полный дифференциал, и функция $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ существует.

Разрешим уравнения (1.1) относительно $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и Φ_y, Ψ_x. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{Q}), \quad \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{P}) \\ \Psi_{\mathbf{y}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{q}, \quad \Psi_{\mathbf{x}} = -\mathbf{P} + \mathbf{p} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Отсюда при условии, что якобиан замены (2.3) отличен от нуля ($\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \neq 0$), следует равенство $d\Phi = d\Psi$ и тождественность функций Φ и Ψ:

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Psi\left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{2}, \frac{\mathbf{p} + \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{2}\right) = \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

Из соотношений (1.2) и (2.3) следует

$$\frac{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \frac{1}{J} = 2^{-2n}\det(E + A), \quad A = \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})}$$

и условие невырожденности замены (2.3) можно записать так: $\det(E + A) \neq 0$, где A – матрица Якоби и E – единичная матрица соответственно.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Если в области $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Omega$ преобразование $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – каноническое, и ни одно из собственных значений матрицы Якоби A не равно -1, то в области Ω существует параметризация (1.1).

В монографии [5] обращается внимание на “удручающую неинвариантность” производящих функций по отношению к выбору базиса канонической системы координат и инвариантность дифференциальной формы Пуанкаре (2.2). Отсюда следует, что и параметрическая функция $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также имеет инвариантный характер. Если функция $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ существует в каких либо переменных, то она будет существовать и при любой канонической замене переменных. Условие ($J \neq 0$) существования параметрического представления (1.1) инвариантно по отношению к выбору канонических переменных, тогда как условие $\det S_{1\mathbf{qP}} \neq 0$ зависит от выбора канонических переменных. Условие $\det S_{1\mathbf{qP}} \neq 0$ может нарушиться при канонической замене переменных. Кроме того, класс параметризуемых канонических преобразований существенно шире класса канонических преобразований через производящую функцию. Так, поворот на 90° : $q = -P$, $p = Q$ нельзя представить через производящую функцию $S(q, P)$, а через параметрическую функцию можно: $\Psi = x^2 + y^2$. Эти и другие преимущества параметризации перед методом производящих функций уже отмечались [3].

Покажем, как уравнение (1.3) приводит к развитому ранее [1, 2] методу инвариантной нормализации гамильтонианов.

3. Инвариантная нормализация гамильтонианов. В гамильтоновой системе нормальная форма гамильтониана называется нормальной формой Биркгофа [6]. Наиболее компактное определение этой формы см. в [7]. Во всех случаях порождаемый гамильтониан выбирается в виде простейшей квадратичной формы для линейной колебательной системы, а определение нормальной формы привязывается к выбору порождаемого гамильтониана и имеет неинвариантный характер [5–9].

В литературе наиболее распространены два способа построения канонических замен, приводящих систему к нормальной форме. Один способ основан на использовании производящих функций. Так поступал Биркгоф [6]. В другом способе вместо производящих функций применяются генераторы Ли, что удобнее, поскольку не требует обращения степенных рядов, необходимого в случае производящих функций.

Был предложен [1, 2] общий критерий нормальной формы Биркгофа для возмущенного гамильтониана

$$\bar{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \varepsilon) = H_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) + \bar{F}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \varepsilon), \quad \bar{F}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \varepsilon) = \varepsilon \bar{F}_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) + \varepsilon^2 \bar{F}_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) + \ldots$$

Определение. Возмущенный гамильтониан имеет нормальную форму тогда и только тогда, когда возмущение является первым интегралом невозмущенной части $\partial F/\partial t + \{H_0, F\} = 0$, где $\{f, g\} = f_\mathbf{p} g_\mathbf{q} - f_\mathbf{q} g_\mathbf{p}$ – скобки Пуассона.

Преимущество такого определения перед известными [5–9] обусловлено тремя причинами.

1°. Решение полной системы дифференциальных уравнений Гамильтона с гамильтонианом в нормальной форме получается суперпозицией решений невозмущенной системы и решения системы с автономным гамильтонианом, равным $F(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \varepsilon)$. Этот результат был сформулирован в виде теоремы [2]

Теорема В.Ф. Журавлева. Если система с гамильтонианом $\bar{H}$ удовлетворяет условию нормальной формы, то для построения общего решения соответствующих уравнений Гамильтона, достаточно:

А) найти общее решение порождающей системы с гамильтонианом $H_0(t, p, q)$;

Б) найти общее решение системы, определяемой только возмущением $F(0, p, q, \varepsilon)$, при условии, что в этой системе явно входящее в гамильтониан время положено равным нулю.

Тогда общее решение исходной неавтономной системы представляется композицией в произвольном порядке полученных решений (вместо произвольных постоянных в решении второй системы подставляются решения первой или наоборот).

2°. Инвариантный характер критерия позволяет осуществлять нормализацию без предварительного упрощения невозмущенной части и без разделения на случаи автономный – неавтономный, резонансный – нерезонансный.

3°. Асимптотики нормальной формы и замены переменных, приводящей гамильтониан к нормальной форме, находятся последовательными квадратурами от известных на каждом шаге функций.

4. Алгоритм инвариантной нормализации с помощью параметрической замены. Покажем, как уравнение (1.3) теоремы 1 преобразуется к аналогу метода нормализации В.Ф. Журавлева.

Пусть дан гамильтониан

$$H(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) = H_0(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) + F(t,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon),\quad F(t,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon) = \varepsilon F_1(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) + \varepsilon^2 F_2(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) + \ldots$$

который требуется привести к нормальной форме. Пусть $\bar{H}^{(k)}(t,\mathbf{Q},\mathbf{P},\varepsilon) = H_0(t,\mathbf{Q},\mathbf{P}) + \bar{F}^{(k)}(t,\mathbf{Q},\mathbf{P},\varepsilon)$ – асимптотика k-го порядка нормальной формы $\bar{F}^{(k)}(t,\mathbf{q},\mathbf{p},\varepsilon) = \varepsilon\bar{F}_1(t,\mathbf{Q},\mathbf{P}) + \ldots + \varepsilon^k\bar{F}_k(t,\mathbf{Q},\mathbf{P})$ с канонической заменой (1.1) и $\Psi^{(k)}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon) = \varepsilon\Psi_1(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) + \ldots + \varepsilon^k\Psi_k(t,\mathbf{x},\mathbf{y})$ – асимптотика k-го порядка функции $\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon)$ в соотношениях (1.1).

Тогда согласно теореме 1 асимптотика $\Psi^{(k)}$ будет удовлетворять уравнению (1.3), которое можно записать так:

$$\frac{\partial\Psi^{(k)}}{\partial t} + H_0\left(t,\mathbf{x}-\frac{1}{2}\Psi^{(k)}_{\mathbf{y}},\mathbf{y}+\frac{1}{2}\Psi^{(k)}_{\mathbf{x}}\right) - H_0\left(t,\mathbf{x}+\frac{1}{2}\Psi^{(k)}_{\mathbf{y}},\mathbf{y}-\frac{1}{2}\Psi^{(k)}_{\mathbf{x}}\right) +$$

$$+ F^{(k)}\left(t,\mathbf{x}-\frac{1}{2}\Psi^{(k)}_{\mathbf{y}},\mathbf{y}+\frac{1}{2}\Psi^{(k)}_{\mathbf{x}}\right) = \bar{F}^{(k)}\left(t,\mathbf{x}+\frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}},\mathbf{y}-\frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}\right) \tag{4.1}$$

Отсюда следует цепочка уравнений для определения коэффициентов разложений канонических замен Ψ_i и нормализованных гамильтонианов $\bar{F}_i$

$$\frac{\partial\Psi_i}{\partial t} + \{H_0,\Psi_i\} + R_i = \bar{F}_i,\quad \frac{\partial\bar{F}_i}{\partial t} + \{H_0,\bar{F}_i\} = 0;\quad i = 1,2,\ldots \tag{4.2}$$

Функции R_i вычисляются последовательно по формулам

$$R_1 = F_1,\quad R_2 = F_2 + \frac{1}{2}\{F_1+\bar{F}_1,\Psi_1\},\ \ldots \tag{4.3}$$

Если H_0 – полином не выше второй степени по $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$, то R_i, $i \le k$, будут коэффициентами разложения по степеням ε функции

$$\begin{gathered}F\left(t,\mathbf{x}-\frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}},\mathbf{y}+\frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}\right) - \bar{F}^{(k)}\left(t,\mathbf{x}+\frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}},\mathbf{y}-\frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}\right) + \bar{F}^{(k)}(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \\ = \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \varepsilon^3 R_3 + \ldots\end{gathered} \tag{4.4}$$

Аналогичная цепочка уравнений (4.2) получена ранее [1, 2]; уравнения названы гомологическими и записаны в следующей форме:

$$R_i = \bar{F}_i - \frac{d\Psi_i}{dt},\quad \frac{d\bar{F}_i}{dt} = 0;\quad i = 1,2,\ldots \tag{4.5}$$

Здесь полные производные d/dt вычисляются по правилу дифференцирования сложных функций $\Psi_i(t,\mathbf{x},\mathbf{y})$, $F_i(t,\mathbf{x},\mathbf{y})$, в которых $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ как функции времени определяются из решения задачи для невозмущенной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{0_{\mathbf{y}}},\quad \dot{\mathbf{y}} = -H_{0_{\mathbf{x}}},\quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \tag{4.6}$$

Если в соотношения (4.5) вместо $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ подставить решение системы (4.6), то из второго уравнения (4.5) следует, что функция $\bar{F}_i$ не зависит от времени t. Тогда интеграл по времени первого уравнения будет иметь вид

$$\int_{t_0}^{t} R_i(t)dt = (t-t_0)\bar{F}_i(t_0,\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) + \Psi_i(t_0,\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) - \Psi_i(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{4.7}$$

Он и дает ключ к полному решению проблемы: квадратура (4.7) определяет нормальную форму и функции Ψ_i в замене переменных (1.1).

К сожалению, представить интеграл от функции R_i в виде (4.7) единственным образом не всегда возможно. Единственность будет, если функция R_i после подстановки в нее решения (4.6) окажется квазипериодической (суммой периодических по t функций). В этом случае интеграл от R_i равен линейной функции и квазипериодической $f(t)$. Из $f(t)$ можно вычесть не зависящую от времени среднюю часть $\bar{f}(t)$ и отнести ее ко второму слагаемому правой части (4.7). Представление (4.7) тогда будет единственным образом определять $\bar{F}_i(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ и функцию $\Psi_i(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ с нулевым средневременным значением: $\overline{\Psi_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))} = 0$. Условие квазипериодичности R_i накладывает ограничения на параметры, при которых существует нормальная форма.

Сформулируем полученный результат.

Основная теорема. Асимптотики k-го приближения нормальной формы и замены переменных, приводящей к ней, существуют и единственны, если после подстановки решения (4.6) в функции $R_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ они окажутся квазипериодическими по времени функциями. Тогда в правой части интеграла (4.7) $\bar{F}_i(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ – коэффициент линейного по t слагаемого, $\bar{\Psi}_i(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ – не зависящее от времени слагаемое.

Перечислим основные особенности предлагаемого алгоритма, отличающего его от основных особенностей алгоритма В.Ф. Журавлева [1, 2], приведенных в фигурных скобках.

1°. Исходная система $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ неавтономна. {Система $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ автономна, если же исходная система неавтономна, то она приводится сначала к автономной с повышением ее порядка.}

2°. Для канонической замены используется функция $\Psi(t, \varepsilon, \mathbf{x}, \mathbf{y})$. {Для этой цели используется производящий гамильтониан $G(\varepsilon, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$}.

3°. Каноническая замена $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \Rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ищется в параметрической форме (1.1). {Каноническая замена ищется на фазовом потоке гамильтоновой системы.}

Связь производящего гамильтониана G и функции Ψ. В методе В.Ф. Журавлева [1, 2] замена $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to Q, \mathbf{P}$ ищется на фазовом потоке гамильтоновой системы

$$d\mathbf{X}/d\tau = G_Y, \quad dY/d\tau = -G_X$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{q}, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{p}; \quad \mathbf{X}(\varepsilon) = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Y}(\varepsilon) = \mathbf{P} \tag{4.8}$$

где $\tau \in [0, \varepsilon]$ – вспомогательный параметр, аналог времени t.

Эта же замена в предлагаемом алгоритме осуществляется с помощью параметризации. Функция Ψ, определяющая отображение на фазовом потоке гамильтоновой системы (4.8), находится из решения задачи

$$\Psi_\tau(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = G\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Psi_\mathbf{y}, \mathbf{y} - \frac{1}{2}\Psi_\mathbf{x}\right), \quad \Psi(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

С точностью до $\tau^3 = \varepsilon^3$ получим $\Psi = \varepsilon G$. Поэтому асимптотики $\Psi_1 = G_0$, $\Psi_2 = G_1$ первых двух приближений в обоих методах совпадают, а следовательно R_1 и R_2 в обоих методах также тождественны. Остальные приближения для $R_3, R_4, \ldots$ будут различаться. Сама же нормальная форма от выбора метода не зависит.

5. Алгоритм инвариантной нормализации для асимптотического определения последовательности точек Пуанкаре. Предложенный выше алгоритм позволяет найти асимптотику общего решения k-го порядка. Алгоритм допускает еще большее упрощение для периодических во времени гамильтонианов. В этом случае полезно получить не траектории движения $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{p}(t)$, а выделить на ней последовательность точек $\mathbf{q}_m = \mathbf{q}(Tm)$, $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}(Tm)$ в кратные периоду T моменты времени $t = t_m = Tm$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$). Эту последовательность точек на траектории будем называть точками последования Пуанкаре ТПП.

Асимптотическое решение для ТПП строится так. Из квадратур (4.7) при $i = 1, \ldots$ $\ldots, k$ находим функции $\bar{F}_i(0, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ и $\Psi_i(0, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, причем последнюю квадратуру можно упростить, полагая в равенстве (4.7) $t_0 = 0$. Таким образом, находим асимптотики k-го приближения

$$\bar{F}^{(k)}(0, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, \varepsilon) = \varepsilon\bar{F}_1(0, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \ldots + \varepsilon^k F_k(0, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$$

$$\bar{\Psi}^{(k)}(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) = \varepsilon\bar{\Psi}_1(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \ldots + \varepsilon^k\Psi_k(0, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

После этого применяется теорема В.Ф. Журавлева.

Пусть $\mathbf{Q}(Tm, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{P}(Tm, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ – ТПП невозмущенной системы. Пусть $\mathbf{X}(Tm, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{Y}(Tm, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0)$ – ТПП, найденные из решения системы уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{Y}}\bar{F}^{(k)}(0, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \varepsilon), \quad \dot{\mathbf{Y}} = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}\bar{F}^{(k)}(0, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \varepsilon), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{P}_0$$

Тогда ТПП $\mathbf{Q}_m$, $\mathbf{P}_m$ полной гамильтоновой системы в новых переменных $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ получаются подстановкой $\mathbf{a} = \mathbf{X}(Tm, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{b} = \mathbf{Y}(Tm, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0)$ в функции $\mathbf{Q}(Tm, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{P}(Tm, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ ($m = 0, 1, \ldots$).

В исходных переменных ТПП находится с помощью параметрической замены с функцией $\bar{\Psi}^{(k)}(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon)$. В этой замене параметры $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ можно исключить, выразив их через $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{1}{4}\{\Psi, \Psi_{\mathbf{p}}\} + \ldots$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \frac{1}{4}\{\Psi, \Psi_{\mathbf{q}}\} + \ldots$$

Новые переменные выражаются через старые так:

$\mathbf{Q} = 2\mathbf{x}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathbf{q}$, $\mathbf{P} = 2\mathbf{y}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathbf{p}$

В результате получим связь новых переменных со старыми

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathbf{q} + \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{1}{2}\{\Psi, \Psi_{\mathbf{p}}\} + \ldots \\ \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathbf{p} - \Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \frac{1}{2}\{\Psi, \Psi_{\mathbf{q}}\} + \ldots \end{aligned} \tag{5.1}$$

Чтобы выразить старые переменные через новые, достаточно в формулах (4.9) их заменить друг на друга и затем изменить знак у Ψ на противоположный. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= \mathbf{Q} - \Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \frac{1}{2}\{\Psi, \Psi_{\mathbf{P}}\} + \ldots, \\ \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= \mathbf{P} + \Psi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) - \frac{1}{2}\{\Psi, \Psi_{\mathbf{Q}}\} + \ldots \end{aligned} \tag{5.2}$$

Заметим, что в методе инвариантной нормализации [1, 2] для этой цели применяются формулы Кемпбелла–Хаусдорфа, которые до второго приближения совпадают с формулами (5.1) и (5.2) с точностью до замены Ψ на производящий гамильтониан G.

6. Примеры асимптотических решений. Весьма поучительные примеры [1, 2] демонстрируют существенные упрощения перед всеми известными ранее. Данный метод по простоте эквивалентен методу В.Ф. Журавлева [1, 2], но отличается тем, что цепочка уравнений для асимптотик записывается в исходной гамильтоновой системе независимо от того, автономная система или неавтономная. В методе В.Ф. Журавлева [1, 2] неавтономную систему надо свести к автономной с повышением порядка системы и потом для нее писать цепочку уравнений для асимптотик.

Продемонстрируем предлагаемый метод на двух примерах решения задач о вынужденных колебаниях в резонансе. Для решения этих задач классическим методом приходится вводить другое определение нормальной формы [7]. Данным методом этого делать не требуется. Нормальная форма вычисляется непосредственно из квадратуры и затем находится решение. Покажем это.

Пример 1. Найти общее решение уравнения, описывающего вынужденные колебания линейного осциллятора при резонансе: $\ddot{q} + q = \varepsilon \sin t$.

Пример 2. В задаче о вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора Дуффинга $\ddot{q} + q = \varepsilon(\sin t - q^3 + 2\lambda q)$ найти значение λ, при котором решение периодично по времени с периодом 2π. Исследовать устойчивость этого решения.

В обоих примерах уравнения гамильтоновы имеют один и тот же невозмущенный гамильтониан $H_0 = (q^2 + p^2)/2$ и одно и то же решение соответствующей ему невозмущенной системы уравнений

$$q = q_0\cos(t - t_0) + p_0\sin(t - t_0), \quad p = -q_0\sin(t - t_0) + p_0\cos(t - t_0) \tag{6.1}$$

Оно является базовым для построения нормальной формы в обоих примерах.

Найдем первое приближение в примере 1. Подставляя в выражение $R_1 = F_1 = -q\sin t$ решение (4.11), получим периодическую по времени функцию $R_1(t)$, интеграл которой имеет вид

$$\int_{t_0}^{t} R_1(t)dt = \bar{F}_1(t_0, q_0, p_0)(t - t_0) + \bar{\Psi}_1(t_0, q_0, p_0) + f(t) =$$

$$= -\frac{1}{2}(q_0\sin t_0 + p_0\cos t_0)(t - t_0) - \frac{1}{4}(q_0\cos t_0 + p_0\sin t_0) + f(t)$$

Отсюда найдем первые коэффициенты $\bar{F}_1$ и $\bar{\Psi}_1$ и разложения нормальной формы $\bar{H} = H_0 + \varepsilon\bar{F}_1$ и функции $\bar{\Psi} = \varepsilon\Psi_1$

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) + \bar{F}(t, Q, P, \varepsilon), \quad \bar{F}(t, Q, P, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2}(Q\sin t + P\cos t)$$

$$\Psi(t, Q, P, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{4}(Q\cos t + P\sin t)$$

Решение первого приближения получаем, используя теорему В.Ф. Журавлева [2]. Возмущенной части гамильтониана $\bar{F}(0, Q, P) = -\varepsilon P/2$ соответствует система $\dot{Q} = -\varepsilon/2$, $\dot{P} = 0$ и решение

$$Q = Q_0 - \varepsilon t/2, \quad P = P_0$$

Подставим Q и P вместо q_0 и p_0 в решение (4.11) и положим в нем $t_0 = 0$. Получим решение системы уравнений в переменных Q, P

$$Q = (Q_0 - \varepsilon t/2)\sin t + P_0 \sin t, \quad P = -(Q_0 - \varepsilon t/2)\sin t + P_0 \cos t$$

Решение системы уравнений в исходных переменных q, p получается так. Подставляя функцию $\Psi(t, Q, P, \varepsilon)$ в формулы (5.2), найдем замену

$$q = Q + \frac{\varepsilon}{4}\sin t, \quad p = P - \frac{\varepsilon}{4}\cos t$$

и, пользуясь ей, найдем решение в исходных переменных

$$q = \left(Q_0 - \frac{\varepsilon}{2}t\right)\cos t + \left(P_0 + \frac{\varepsilon}{4}\right)\sin t = \left(q_0 - \frac{\varepsilon}{2}t\right)\cos t + \left(p_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin t$$

В линейной задаче все последующие члены ряда по ε равны нулю, поэтому первое приближение является точным решением.

Решение примера 2 методом усреднения приведено ранее [1, 2]. Для сравнения приведем решение методом нормальной формы.

Опять пользуемся квадратурой (4.7). Подставляя в выражение $R_1 = F_1 = -q\sin t - \lambda p^2 + q^4/4$ решение (4.11), получим подынтегральную функцию $R_1(t)$. Из квадратуры (4.7) найдем коэффициент разложения нормальной формы $\bar{F}_1(t, Q, P)$ и, полагая в нем $t = 0$, получим

$$\bar{F}_1(0, Q, P) = -\frac{1}{2}P - \frac{\lambda}{2}(Q^2 + P^2) + \frac{3}{32}(Q^2 + P^2)^2$$

Периодическому решению будет соответствовать неподвижная точка. Ее координаты Q, P, удовлетворяют системе

$$\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial Q} = Q\left(-\lambda + \frac{3}{8}A^2\right) = 0, \quad \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial P} = -\frac{1}{2} + P\left(-\lambda + \frac{3}{8}A^2\right) = 0$$

Отсюда находим $Q = 0$, $P = \pm A$ при $\lambda = \frac{3}{8}A^2 \pm \frac{1}{2A}$, где $A = \sqrt{Q^2 + P^2}$ – амплитуда. Зависимость $\omega = 1 - \varepsilon\lambda$ от A называется амплитудно-частотной характеристикой.

Неподвижная точка будет устойчивой, если функция F_1 в ней достигает строгого минимума или максимума. Отсюда находим условие устойчивости периодического решения

$$\left(\lambda - \frac{3}{8}A^2\right)\left(\lambda - \frac{9}{8}A^2\right) > 0$$

что согласуется с аналогичным условием, полученным методом усреднения.

В приводимом ниже третьем примере для получения решения необходимо находить высокие приближения. Решение классическим методом потребовало бы проведения громоздких выкладок. Данным методом решение получается существенно проще.

Пример 3. Найти ТПП в моменты времени $t_n = 2\pi n$ для нелинейного уравнения $\ddot{q} = \varepsilon^2 \cos t' \cos q$ с точностью до $O(\varepsilon^6)$.

Это уравнение описывает разные задачи механики и физики. Одна из них – вибрационное движение сферической частицы в жидкости, в которой создается плоская стоячая акустическая волна [10, 11]. Пусть имеется вертикальная труба с жесткой горизонтальной крышкой. В трубе возбуждается стоячая волна, в которой скорость жидкости изменяется по закону $v = A\omega\sin\omega t\cos kz$, где ω – частота волны, k – волновое число, z – ось, направленная вертикально вверх, A – амплитуда перемещения частиц жидкости, которая считается малой. Частота и волновое число связаны со скоростью звука в жидкости $\omega = kc$. Если для частицы радиуса a выполняется условие $\mu/(\rho kca^2) \ll 1$, то сила трения Стокса и наследственная сила Бассэ пренебрежимо малы по сравнению с силами инерции. Тогда уравнение движения частицы имеет вид

$$(\rho + 2\rho_0)\ddot{z}_0 = 3\rho w - 2(\rho_0 - \rho)g; \quad w = \partial v + v\partial v/\partial z \approx \partial v/\partial t = A\omega^2\cos\omega t\cos kz$$

Здесь ρ и ρ_0 – плотности жидкости и твердой частицы, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости.

Для частицы нейтральной плавучести ($\rho = \rho_0$) уравнение приводится к уравнению примера 3, в котором $q = kz_0$, $t' = \omega t$, $\varepsilon = Ak$.

Для решения этого уравнения применялся [10, 11] классический метод усреднения [12]. Разложение проводилось по параметру ε. Для исследования задачи требуется три приближения. Решение получается в виде

$$q = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + O(\varepsilon^4).$$

Покажем, как получить решение предлагаемым методом. Разложение будет вестись по параметру $\delta = \varepsilon^2$. Поэтому для достижения существенно большей точности, порядка ε^6, требуется всего два приближения с гораздо меньшими выкладками.

К уравнению примера сводится система уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \delta F_1(t, q, p); \quad F_1 = -\cos t\sin q$$

Находим решение невозмущенной системы

$$q = q_0 + p_0(t - t_0), \quad p = p_0$$

и подставляем его в выражение $R_1 = F_1$. Полученную периодическую функцию $R_1(t)$ подставляем в квадратуру (4.7). Имеем

$$\int_{t_0}^{t} R_1 dt = -\frac{\cos(t_0 + q_0)}{2 + 2p_0} + \frac{\cos(-t_0 + q_0)}{2 - 2p_0} + f_1(t)$$

Отсюда находим первое приближение нормальной формы и параметрической замены переменных

$$\bar{F}_1 = 0, \quad \bar{\Psi}_1(t, q, p) = -\frac{\cos(t + q)}{2 + 2p} + \frac{\cos(-t + q)}{2 - 2p} \tag{6.2}$$

Во втором приближении

$$R_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial q}\frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial p} = \frac{1}{4}\cos t\cos q\left(\frac{\cos(t + q)}{(1 + p)^2} + \frac{\cos(t - q)}{(1 - p)^2}\right)$$

Из интеграла (4.7) находим линейное по времени слагаемое, равное F_2 и не зависящее от времени слагаемое, равное Ψ_2. Окончательный вид нормальной формы и функции, определяющей параметрическую замену, таков:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}P^2 + \frac{\delta^2}{16}\left[\frac{1}{(1 + P)^2} + \frac{1}{(1 - P)^2}\right] + O(\delta^3)$$

$$\Psi(0, x, y) = \frac{\delta y}{1 - y^2}\cos x - \frac{\delta^2(1 - 3y^2 - 2y^4)}{16y(1 - y^2)^3}\sin 2x + O(\delta^3)$$

Функция $\Psi(0, x, y)$ имеет знаменатель, обращающийся в нуль при $y = 0, \pm 1$. Из-за этого найденная нормальная форма непригодна для анализа движения с малым импульсом $p \sim \delta$. Это известная проблема малых знаменателей асимптотической теории для гамильтоновых систем, возникающая вследствие того, что невозмущенный гамильтониан выбран неудачно и не отражает качественного поведения системы при малом импульсе. Для устранения малого знаменателя в формулах замены переменных второго приближения нужно изменить невозмущенный гамильтониан, а его изменение отнести к возмущению.

Это общее правило проиллюстрируем на решении рассматриваемого примера.

Уничтожение малого знаменателя $y = 0$. Чтобы уничтожить малый знаменатель y в функции $\Psi_2(x, y)$ примера 3, невозмущенный гамильтониан H_0 и возмущение F представим в виде

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\delta^2}{8}\cos 2q, \quad F = -\delta\cos t\sin q - \frac{\delta^2}{8}\cos 2q$$

Очевидно, гамильтониан системы $H = H_0 + F$ при этом не изменится.

Найдем методом инвариантной нормальной формы асимптотическое решение для ТПП с точностью до малых порядка $\delta^3 = \varepsilon^6$. Решение невозмущенной системы представляем в виде разложения по параметру δ

$$q = a + bt + \delta^2\left(\frac{t}{4b}\cos 2a - \frac{1}{4b^2}(\sin(a + bt) - \sin a)\right) + O(\delta^3)$$

$$p = b + \frac{\delta^2}{4b}(\cos a - \cos(a + bt)) + O(\delta^3); \quad a = q(0), \quad b = p(0), \quad b \neq 0$$

Из квадратуры первого приближения получаем то же, что и в предыдущем решении (4.12). В выражение (4.13) для R_2 добавится слагаемой

$$F_2 = -\frac{1}{8}\cos 2q = -\frac{1}{8}\cos(2a + 2bt)$$

Соответственно изменится и квадратура от R_2. Вычисляя ее, получим нормальную форму

$$\bar{H} = \frac{1}{2}P^2 + \delta^2\left(P^2\frac{3 - P^2}{8(1 - P^2)^2} - \frac{1}{4}\sin^2 Q\right) + O(\delta^3) \tag{6.3}$$

и функцию, определяющую параметрическую замену, с исключенной особенностью при $y \to 0$

$$\Psi(0, x, y) = \delta\Psi_1(0, x, y) + \delta^2\Psi_2(0, x, y) + O(\delta^3)$$
$$\left(\Psi_1(0, x, y) = \frac{y}{(1 - y^2)}\cos x, \quad \Psi_2(0, x, y) = \frac{y^3(5 - y^2)}{16(1 - y^2)^3}\sin 2x\right) \tag{6.4}$$

Нормальная форма позволяет найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость. Из уравнений

$$\partial\bar{H}/\partial Q = 0, \quad \partial\bar{H}/\partial P = 0 \Rightarrow P = 0, \quad \sin Q\cos Q = 0$$

определяем на периоде $Q \in [0, 2\pi)$ координаты четырех неподвижных точек: $M_i(Q_i, P_i) = ((i - 1)\pi/2, 0)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Точки M_2 и M_4 соответствуют минимуму функции $\bar{H}$ и по теореме Лагранжа устойчивы. По теореме Ляпунова они соответствуют устойчивому периодическому решению. M_1 и M_3 – точки гиперболического типа. Функция $\overline{H}$ не имеет в них ни минимума, ни максимума, и следовательно эти точки неустойчивы. Они соответствуют двум неустойчивым периодическим решениям.

Инвариантные кривые (ИК), на которых лежат ТПП, находятся из интеграла нормальной формы $\overline{H}(Q_m, P_m) = E$. Наибольший интерес представляют ИК в окрестности неподвижных точек, в которой $E \sim \delta^2$. Сделаем замену $E = \delta^2 C/4$. Тогда с точностью до малых порядка δ^3 получим однопараметрическое семейство ИК для Q_m, P_m $(m = 0, 1, 2, \dots)$

$$P_m^2\left(1 + \delta^2 \frac{3 - P_m^2}{4(1 - P_m^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\delta^2 (C + \sin^2 Q_m)^2 \Rightarrow P_m = \pm\delta\left(1 - \frac{3}{8}\delta^2\right)\sqrt{\frac{1}{2}(C + \sin^2 Q_m)}$$

С помощью замены переменных

$$p = P\left(1 - \delta \sin Q + \frac{1}{2}\delta^2 + O(\delta^3)\right)$$

вытекающей из (4.10) и (4.15), найдем ИК в исходных переменных

$$p_m = \delta\left(1 - \delta \sin Q_m + \frac{1}{8}\delta^2\right)\sqrt{\frac{1}{2}(C + \sin^2 Q_m)}$$

Новую переменную Q следует выразить через старую с помощью замены

$$Q_m = q_m + \delta \cos q_m - \frac{1}{4}\delta^2 \sin 2q_m + O(\delta^3)$$

которая находится из формул замены переменных (4.9). Для $\delta < 0.1$ достаточно пользоваться менее точным приближением

$$p_m = \pm\delta(1 - \delta \sin q_m)\left[\frac{1}{2}(C + \sin^2(q_m + \delta \cos q_m))\right]^{1/2} \tag{6.5}$$

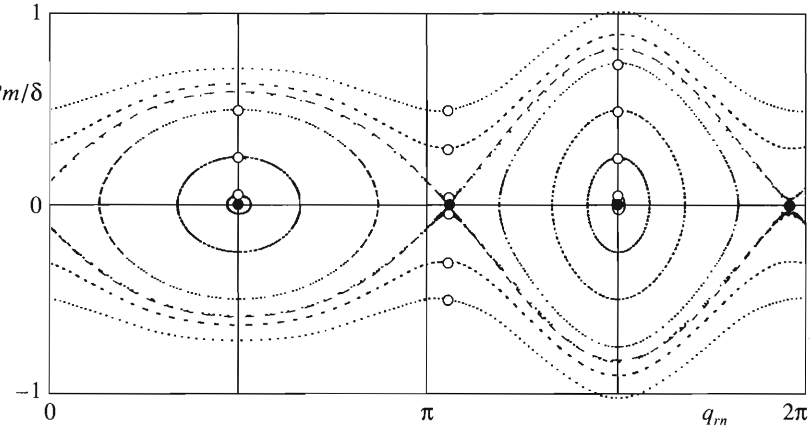
В интервале $-1 \le C < 0$ ТПП лежат на замкнутых ИК. Они соответствуют финитному движению вокруг неподвижной точки M_2 либо M_4. Если учесть как угодно малую силу трения, то эти ИК превратятся в спирали, по которым ТПП будут при $t \to \infty$ стремиться либо к M_2, либо к M_4.

При $C > 0$ ИК соответствуют инфинитному движению. При $C = 0$ получаем уравнение сепаратрисы

$$p_m = \pm\frac{\delta}{\sqrt{2}}(1 - \delta \sin q_m)\left|\sin(q_m + \delta \cos q_m)\right|$$

разделяющей финитное и инфинитное движения.

На фигуре изображены ТПП, полученные численно из исходных уравнений при $\delta = 0.16$. Начальные значения ТПП обозначены светлыми точками. ТПП лежат на ИК, которые неотличимы от кривых, определяемых уравнением (6.5). Темными точками нанесены положения неподвижных точек $M_i (i = 1, 2, 3, 4)$. В переменных q, p их координаты таковы: $M_1(2\pi - \delta, 0)$, $M_2(\pi/2, 0)$, $M_3(\pi + \delta, 0)$, $M_4(3\pi/2, 0)$.



Автор благодарит Д.М. Климова за внимание к работе и В.Ф. Журавлева за обсуждения и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00567).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит, 1997, 320 с.
2. *Журавлев В.Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // ПММ, 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356–365.
3. *Петров А.Г.* Параметрический метод построения отображений Пуанкаре в гидродинамических системах // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 948–967.
4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 408 с.
5. *Биркгоф Д.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
6. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
7. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
8. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
9. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Динамика частиц при воздействии вибраций. Киев: Наук. думка, 1975. 168 с.
10. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
11. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Москва
e-mail: petrov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
6.V.2003