УДК531.36:36

© 2004 г. В. Н. Тхай

РЕЗОНАНСНЫЕ ЛЯПУНОВСКИЕ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ОБРАТИМЫХ СИСТЕМ

Изучаются локальные периодические движения обратимой системы в окрестности нулевого положения равновесия. В невырожденном случае каждой паре чисто мнимых корней $\pm\lambda_j$ отвечает симметричное ляпуновское семейство L_j, если нет резонанса $\lambda_j + p\lambda_k = 0$ ($p \in \mathbf{N}$). Исследован сценарий исчезновения семейства L_k при $\varepsilon \to 0$ (ε – расстройка резонанса). Показано возникновение резонансных симметричных ляпуновских семейств LR_α, получены конструктивные условия существования LR_α как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon \neq 0$. При $p = 1$ обнаружено существование двух циклов; циклы симметричны друг другу относительно неподвижного множества обратимой системы и находятся каждый на расстояние $O(\sqrt{\varepsilon})$ от нуля. Для обратимой системы, записанной в стандартной для теории колебаний форме в переменных "амплитуда–угол", установлена общая теорема о существовании симметричных периодических движений в негрубом случае; теорема является основной для изучения семейств LR_α.

1. Предварительные замечания. Автором [1] разрабатывалась идея Ляпунова об использовании порождающей системы, содержащей малый параметр, при изучении негрубых случаев теории периодических движений (ПД). В частности, для системы стандартного вида доказано общее утверждение ([1], теорема 5) о существовании ПД; с точностью до факта отсутствия кратных корней системы амплитудных уравнений получены необходимые и достаточные условия. Теорема использовалась при изучении цикла в различных случаях, близких к резонансным [2], в системе общего вида и в системе Ляпунова. Для обратимых систем теорема нуждается в естественном дополнении, ибо в этом случае система амплитудных уравнений, как правило, допускает семейство решений. Некоторые важные частные случаи утверждения для обратимой системы рассмотрены ранее [1].

При изучении локальных ПД автономной системы (системы Ляпунова, обратимой системы, системы общего вида) в окрестности положения равновесия полезен прием, в котором изменением масштаба задача сводится к задаче о продолжении движения по малому параметру. Так доказывается существование однопараметрических семейств ПД, примыкающих к нулю, в системе Ляпунова [3] и обратимой системе [4,5], так исследуется цикл в системе Ляпунова и системе общего вида [2]. В резонансной системе имеем [2,4,5] негрубый случай теории ПД системы с малым параметром.

Гладкая автономная обратимая система

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\
&\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n (l \geq n) \qquad (1.1) \\
&\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \quad \mathbf{U}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – постоянные матрицы, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ – нелинейные члены) при известных ограничениях допускает [5] в окрестности нуля ляпуновские семейства ПД. Они симметричны относительно неподвижного множества $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ обратимой системы, образуют $(l - n + 1)$ – семейство и существуют, если: а) характеристическое уравнение линейного приближения имеет пару чисто мнимых корней, б) среди других корней нет корней, равных $\pm ip\omega$ ($p \in \mathbf{N}$), в) $\mathrm{rank}\mathbf{B} = n$.

Возникает вопрос о существовании ляпуновских семейств при нарушении одного из перечисленных выше условий. Условие *а* не может быть нарушено, ибо ляпуновское семейство близко, по определению, к колебаниям линейной системы, обусловленным парой чисто мнимых корней. Случай нарушения условия *б* исследован [6] для векторных полей. При этом рассматривался случай $\dim\mathbf{U} = \dim\mathbf{V}$, а при рассмотрении кратных корней предполагалось наличие жордановой клетки. Наконец, некоторые случаи с $\mathrm{rank}\mathbf{B} = n - 1$ изучены недавно [5]. Здесь, в частности, обнаружен эффект "неголономной связи", заключающийся во влиянии размерности вектора $\mathbf{u}$ на существование ляпуновских семейств.

Ниже для обратимой системы, записанной в стандартной для теории колебаний форме в переменных "амплитуда–угол", установлена теорема о существовании симметричных ПД в негрубом случае. Далее изучается исчезновение ляпуновских семейств в ситуации, близкой к резонансной. Наконец, исследуются ляпуновские семейства при двухчастотных резонансах и при переходе через резонанс.

Для всех случаев получены конструктивно проверяемые условия существования искомых семейств, налагаемые на коэффициенты нормальной формы системы.

Вопрос о существовании ляпуновских ПД исследуется при $l \geq n$. Проанализированы как случай точного резонанса, так и случаи, близкие к нему, и получены уравнения, определяющие ляпуновские семейства. Согласно одному из утверждений теоремы из [5], при исследовании случая $l > n$ можно перейти в окрестность выбранной точки многообразия равновесий и получить задачу о движениях в окрестности "нового" нулевого положения равновесия в ситуации, близкой к резонансной. Поэтому задача об эволюции резонансных ляпуновских семейств при переходе от одной точки многообразия к другой его точке и при переходе параметра расстройки резонанса через нуль решается единообразным способом.

В системах общего вида, близких к резонансным системам, правилом является рождение цикла на расстоянии $O(\varepsilon^{\sigma})$ от положения равновесия. При этом $\sigma = 1$ для резонанса 1:2 и $\sigma = 1/2$ для резонансов 1:1 и 1:3 [2]. В системе Ляпунова и гамильтоновой системе циклы рождаются на каждом уровне интеграла энергии и образуют семейство циклов (см. [2] и [7], гл. 8, п. 3.2). Резонансные ляпуновские семейства (при $\varepsilon = 0$) в этих системах тоже существуют [8 –12].

В обратимой системе ПД существуют как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon \neq 0$, образуют ляпуновские резонансные семейства, примыкающие к равновесию. Это общее правило нарушается при резонансе 1:1. Здесь, наряду с симметричным ляпуновским семейством, рождаются два цикла, симметричные друг другу относительно неподвижного множества, и находящиеся каждый на расстоянии $O(\sqrt{\varepsilon})$ от равновесия.

2. Периодические движения обратимой системы, записанной в стандартной форме. При изучении системы с малым параметром, когда порождающая система допускает семейство ПД, удобно использовать стандартную форму записи системы в переменных "амплитуда–угол". В случае обратимой системы "амплитуды" и "углы" подразделяются на две группы "амплитуд" и две группы "углов". Наконец, заметим, что часто удобно использовать два малых параметра [1], а в общем случае скорость изменения каждой "амплитуды" индивидуальна.

После этих замечаний запишем обратимую систему в виде

$$\dot{u}_{\alpha} = \varepsilon^{p_{\alpha}} U_{\alpha}(\varepsilon, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \mu_{\alpha}(\mu) U_{1\alpha}(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \alpha = 1, \ldots, l_1$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{v}_\beta = \varepsilon^{q_\beta} V_\beta(\varepsilon, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \mu_\beta(\mu) U_{1\beta}(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \beta = 1, \ldots, n_1 \\
&\dot{u}_\nu = U_{0\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \varepsilon U_\nu(\varepsilon, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \mu U_{1\nu}(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \nu = l_1 + 1, \ldots, l \\
&\dot{v}_\lambda = V_{0\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \varepsilon V_\lambda(\varepsilon, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \mu V_{1\lambda}(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \lambda = n_1 + 1, \ldots, n \\
&U_j(\varepsilon, \mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = -U_j(\varepsilon, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \\
&U_{1j}(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = -U_{1j}(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad j = 1, \ldots, l \\
&V_k(\varepsilon, \mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = V_k(\varepsilon, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \\
&V_{1k}(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = V_{1k}(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad k = 1, \ldots, n \\
&U_{0\nu}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = -U_{0\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad V_{0\lambda}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = V_{0\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \\
&\nu = l_1 + 1, \ldots, l; \quad \lambda = n_1 + 1, \ldots, n \quad (l \geq n,\ l_1 \geq n_1)
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

(p_α, $q_\beta \in \mathbf{N}$, $\mu_{\alpha,\beta}(0) = 0$; $\alpha = 1, \ldots, l_1$, $\beta = 1, \ldots, n_1$). Правые части уравнений предполагаются 2π-периодическими по t; ε, μ – малые параметры.

Пусть при $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$ система

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{U}_0(\mathbf{A}, \mathbf{u}_2, \mathbf{0}, \mathbf{v}_2, t), \quad \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{V}_0(\mathbf{A}, \mathbf{u}_2, \mathbf{0}, \mathbf{v}_2, t), \quad \mathbf{A} = \mathrm{const} \\
&\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2); \quad \mathbf{u}_1 \in \mathbf{R}^{l_1}, \quad \mathbf{v}_1 \in \mathbf{R}^{n_1}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

допускает симметричные относительно неподвижного множества $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 : \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}\}$ 2π-периодическое движение: $\mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}, t)$, $\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t)$. Тогда необходимые и достаточные условия 2π – периодичности симметричного относительно неподвижного множества $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ решения обратимой системы (2.1) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&v_\beta(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}^0, \mathbf{0}, \pi) = 0, \quad \beta = 1, \ldots, n_1 \\
&v_\lambda(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}^0, \mathbf{0}, \pi) = 0, \quad \lambda = n_1 + 1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

($\mathbf{u}^0$ – начальное значение переменной $\mathbf{u}$). При этом первая группа уравнений (2.3) удовлетворяется тождественно по $\mathbf{u}^0$ при $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$. Поэтому, учитывая пропорциональность скорости изменения переменной v_β величине ε^{q_β}, систему (2.3) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&\xi_\beta(\mathbf{u}^0) + \xi_{1\beta}(\varepsilon, \mathbf{u}^0) + \mu_\beta \varepsilon^{-q_\beta} f_\beta(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}^0) = 0, \quad \beta = 1, \ldots, n_1 \\
&\eta_\lambda(\mathbf{u}^0) + \eta_{1\lambda}(\varepsilon, \mathbf{u}^0) + \mu_\lambda g_\lambda(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}^0) = 0, \quad \lambda = n_1 + 1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

где функции $\xi_{1\beta}(\varepsilon, \mathbf{u}^0)$, $\eta_{1\lambda}(\varepsilon, \mathbf{u}^0)$ обращаются в нуль при $\varepsilon = 0$. Отсюда следует, что при выборе $\mu_\beta = o(\varepsilon^{q_\beta})$, $\mu = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, система (2.4) совместна при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$, если решения системы уравнений

$$
\xi_\beta(\mathbf{u}^0) = 0, \quad \eta_\lambda(\mathbf{u}^0) = 0, \quad \beta = 1, \ldots, n_1, \quad \lambda = n_1 + 1, \ldots, n \tag{2.5}
$$

существуют, и для них

$$
\mathrm{rank}\left\|\partial\xi_\beta/\partial\mathbf{u}^0,\ \partial\eta_\lambda/\partial\mathbf{u}^0\right\| = n \tag{2.6}
$$

Вторая группа уравнений (2.5) при любом $\mathbf{u}_1^0 = \mathbf{A}$ допускает решение $\mathbf{u}_2^0 = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}, \mathbf{0})$. Поэтому задача отыскания корней уравнений (2.5) приводит к совместности системы

$$\xi_\beta(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}, \mathbf{0})) = 0, \quad \beta = 1, \ldots, n_1 \tag{2.7}$$

Функции ξ_β определяются в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_\beta = V_\beta(0, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}, t), \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t), t), \quad \beta = 1, \ldots, n_1$$

на отрезке $[0, \pi]$. Следовательно, корни уравнений, вычисляются из системы амплитудных уравнений

$$I_\beta(\mathbf{A}) = \int_0^\pi V_\beta(0, \mathbf{A}, \varphi(\mathbf{A}, t), \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t), t)dt = 0, \quad \beta = 1, \ldots, n_1 \tag{2.8}$$

Каждому корню $\mathbf{A}^*$ этих уравнений, удовлетворяющему условию $\mathrm{rank}\|\partial\eta_\lambda/\partial\mathbf{u}_2^0\| = n - n_1$ при $\mathbf{u}_1^0 = \mathbf{A}^*$, $\mathbf{u}_2^0 = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}^*, \mathbf{0})$, отвечает при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$ решение системы (2.4), если

$$\mathrm{rank}\|\partial\mathbf{I}(\mathbf{A}^*)/\partial\mathbf{A}^*\| = n_1 \tag{2.9}$$

Это решение зависит от $l - n$ произвольных параметров, в качестве части которых выбираются $l_1 - n_1$ из множества $\{A_1, \ldots, A_{l_1}\}$; остальные $k = l - n - (l_1 - n_1)$ при каждом $\mathbf{A}$ определяют k-семейство симметричных 2π – периодических решений системы (2.2).

Таким образом, доказывается существование 2π-периодических движений в системе (2.1). Эти движения описываются формулами

$$u_\alpha = A_\alpha^* + \varepsilon^{p_\alpha}\int_0^t U_\alpha(0, \mathbf{A}^*, \varphi(\mathbf{A}^*, t), \mathbf{0}, \psi(\mathbf{A}^*, t), t)dt + o(\varepsilon^{p_\alpha}), \quad \alpha = 1, \ldots, l_1$$

$$\upsilon_\beta = \varepsilon^{q_\beta}\int_0^t V_\beta(0, \mathbf{A}^*, \varphi(\mathbf{A}^*, t), \mathbf{0}, \psi(\mathbf{A}^*, t), t)dt + o(\varepsilon^{q_\beta}), \quad \beta = 1, \ldots, n_1 \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u}_2 = \varphi(\mathbf{A}^*, t) + \mathbf{O}(\varepsilon), \quad \boldsymbol{\upsilon}_2 = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}^*, t) + \mathbf{O}(\varepsilon)$$

и образуют $(l - n)$ – семейство.

Теорема 1. Каждому корню $\mathbf{A}^*$ амплитудного уравнения (2.8) отвечает единственное $(l - n)$ – семейство (2.10) симметричных 2π-периодических движений системы (2.1), если: а) выполняется условие (2.9), б) уравнения в вариациях для решения $\mathbf{u}_2 = \varphi(\mathbf{A}, t)$, $\boldsymbol{\upsilon}_2 = \psi(\mathbf{A}, t)$ системы (2.2) при $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ имеют не более $l - n - (l_1 - n_1)$ корней характеристического уравнения, равных единице, в) $\mu_\alpha = o(\varepsilon^{p_\alpha})$, $\mu_\beta = o(\varepsilon^{q_\beta})$, $\mu = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Следствие. Метод Чезари [13,14]. Каждому простому корню A^* амплитудного уравнения

$$\mathbf{I}(\mathbf{A}) = \int_0^\pi \mathbf{V}(0, \mathbf{A}, \mathbf{0}, t)dt = 0$$

обратимой, 2π-периодической по t системы

$$\dot{\mathbf{u}} = \mu\mathbf{U}(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mu\mathbf{V}(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t); \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$$

$$\mathbf{U}(\mu, \mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = -\mathbf{U}(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{V}(\mu, \mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = \mathbf{V}(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$$

с малым параметром μ, отвечает 2π-периодическое, симметричное относительно неподвижного множества $\{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$, близкое к постоянному, решение

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^* + \mu\int_0^t \mathbf{U}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^*, \mathbf{0}, t)dt + o(\mu), \quad \mathbf{v} \equiv \mu\int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^*, \mathbf{0}, t)dt = o(\mu)$$

Замечание. В случае, когда система (2.1) – 2π-периодическая по части переменных, теорема устанавливает существование 2π – периодических вращательных движений (см.[1, 15]).

3. Исчезновение одного из двух ляпуновских семейств при приближении системы к резонансной. В случае rank$\mathbf{B} = n$ система (1.1) невырожденным линейным преобразованием приводится [5] к виду

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{P}\mathbf{y} + \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{l-n} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}\mathbf{y} + \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{x} + \mathbf{Y}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \tag{3.1}$$

($\mathbf{P}$ – постоянная матрица, $\mathbf{J}$ – действительная жорданова матрица с действительными собственными значениями $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ – квадратами корней характеристического уравнения; $\boldsymbol{\Xi}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ – нелинейные члены). Предположим, что имеется две пары чисто мнимых корней и рассмотрим ситуацию, близкую к случаю наличия однократного двухчастотного резонанса

$$\lambda_1 + p\lambda_2 = i\kappa\varepsilon, \quad \kappa = \text{const}, \quad p \in \mathbf{N} \tag{3.2}$$

(ε – расстройка резонанса). Остальные корни удовлетворяют условию *б* в системе (1.1). Тогда, согласно теореме из [5], при $\varepsilon \neq 0$ в системе (3.1) всегда имеется два ляпуновских семейства, а при $\varepsilon = 0$, $p > 1$ существует только семейство, отвечающее корню λ_1; условия существования второго семейства не выполнены. При $p = 1$, $\varepsilon = 0$ не выполнены условия существования ни одного из указанных выше при $\varepsilon \neq 0$ семейств.

Пусть $\varepsilon \neq 0$. Выделим переменные, отвечающие корням $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, и заменой $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\boldsymbol{\xi}, \mu\mathbf{x}, \mu\mathbf{y})$ введем малый параметр μ. Получим

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mu\mathbf{P}\mathbf{y} + \mu\boldsymbol{\Xi}^*(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1^2 y_1 + \mu X_1^*(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{y}_1 = x_1 + \mu Y_1^*(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2^2 y_2 + \mu X_2(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{y}_2 = x_2 + \mu Y_2^*(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{J}_s\mathbf{y}_s + \mu\mathbf{X}_s(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{y}}_s = \mathbf{x}_s + \mu\mathbf{Y}_s^*(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad s = 3, \ldots, s^*; \quad s^* \le n$$

($\mathbf{x}_s$, $\mathbf{y}_s$ – векторы с размерностью жордановой клетки $\mathbf{J}_s$, отвечающей собственному значению $\boldsymbol{\lambda}_s^2$). При $\mu = 0$ система (3.3) допускает симметричное относительно неподвижного множества $\{\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ семейство периодических решений

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^0 \ (\boldsymbol{\xi}^0 = \text{const})$$

$$x_\alpha = \omega_\alpha a_\alpha \cos\omega_\alpha t, \quad y_\alpha = a_\alpha \sin\omega_\alpha t, \quad \lambda_\alpha = -(-1)^\alpha i\omega_\alpha(\omega_\alpha > 0), \quad a_\alpha = \text{const}; \quad \alpha = 1, 2$$

$$x_\beta = \sum_{j=3}^n a_j^* \varphi_{\beta j}(t), \quad y_\beta = \sum_{j=3}^n a_j \psi_{\beta j}(t); \quad \varphi_{\beta j}(-t) = \varphi_{\beta j}(t), \quad \psi_{\beta j}(-t) = -\psi_{\beta j}(t)$$

$$a_j^*, a_j = \text{const}, \quad \beta, j = 3, \ldots, n$$

причем, в силу наличия при $\varepsilon = 0$ только единственного однократного резонанса, имеем

$$\det\|\psi_{\beta j}(\pi/\omega_{1,2})\| \neq 0 \tag{3.4}$$

Необходимые и достаточные условия существования симметричного, $2T$-ПД системы (3.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} & a_\alpha \sin\omega_\alpha T + \mu y_\alpha^*(\mu, \xi^*, a_1, \ldots, a_n, T) = 0, \quad \alpha = 1, 2 \\ & \sum_{j=3}^n a_j \psi_{\beta j}(T) + \mu y_\beta^*(\mu, \xi^*, a_1, \ldots, a_n, T) = 0, \quad \beta = 3, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.5}$$

При $\mu = 0$ система (3.5) относительно постоянных $a_1, \ldots, a_n$ имеет два очевидных решения, в которых $a_\beta = 0$ ($\beta = 3, \ldots, n$), а одно из a_α отлично от нуля ($T = \pi/\omega_\alpha$). Поэтому, учитывая условия (3.5), получаем: при $\mu \neq 0$ система (3.5) имеет решение, в котором

$$a_1 = O(1), \quad T = \pi/\omega_1 + O(\mu); \quad a_2, \ldots, a_n = O(\mu)$$

(a_1 – произвольное число). Значит, ляпуновское семейство, отвечающее паре корней $\pm\lambda_1$, всегда существует.

При $\mu = 0$ система (3.5) имеет также ненулевое решение $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \ldots = a_n = 0$, $T = \pi/\omega_2$. Запишем два первых уравнения системы (3.4) в виде

$$\begin{aligned} & (-1)^p a_1 \sin(p\omega_2\Delta T + \varepsilon T) + \mu y_1^*(\mu, \xi^*, a_1, \ldots, a_n, T) = 0 \\ & -a_2 \sin(\omega_2 \Delta T) + \mu y_2^*(\mu, \xi^*, a_1, \ldots, a_n, T) = 0, \quad \Delta T = T - \pi/\omega_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что при $\mu \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ система (3.5) имеет решение, в котором

$$a_1 = O(\mu/\varepsilon), \quad a_2 = 1, \quad a_3 = O(\mu), \ldots, a_n = O(\mu), \quad \Delta T = O(\mu) \tag{3.7}$$

В уравнениях (3.6) параметры ε и μ независимы друг от друга. Более того, при фиксированном ε имеем $a_1 = O(\mu)$. Значит, решение (3.7) системы (3.5) существует при $\mu < \mu_0$, $\mu_0 = o(\varepsilon)$. Отсюда получаем, что вместе с ε амплитуда периодических колебаний, отвечающих частоте ω_2, стремится к нулю: ляпуновское семейство исчезает.

Теорема 2. Пусть характеристическое уравнение системы (3.1) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$, причем выполнено соотношение (3.2), а остальные корни не кратны λ_2. Тогда наибольшая амплитуда A_2 колебаний на ляпуновском семействе, отвечающем корням, $\pm\lambda_2$ равна $A_2 = O(\varepsilon)$, и при $\varepsilon \to 0$ это семейство стягивается к равновесию $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ и исчезает.

Замечание. Согласно теореме из [5] система (3.2) имеет многообразие положений равновесий, зависящее от $\boldsymbol{\xi}^*$, к каждой точке которой примыкает ляпуновское семейство. Все семейства, отвечающие корням $\pm\lambda_2$, исчезают при $\varepsilon \to 0$.

4. Резонанс третьего порядка 1:2. В дальнейшем при изучении конкретных резонансов в системе (3.1) ограничимся только подсистемой, отвечающей резонансным корням $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$.

Приведем систему (3.1) к нормальной форме до членов нужного (второго или третьего) порядка. Для этого в системе (3.1), близкой к резонансной системе, применим, как и ранее [2], нормализующее преобразование, непрерывное по параметру ε. Далее, используя масштабирование, введем малый параметр μ.

В комплексно-сопряженных переменных z, $\bar{z}$ получим

$$\dot{z}_s = \lambda_s z_s + \mu i B_s \prod_{\alpha=1}^{2} \bar{z}_\alpha^{p_\alpha - \delta_{s\alpha}} + \mu^2 Z_s(\mu, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad s = 1, 2$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = i\kappa\varepsilon; \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2; \quad Z_s(\mu, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$$

(B_s – действительные постоянные). Рассмотрим невырожденный случай, когда $B_s \neq 0$ ($s = 1, 2$), и по формулам

$$z_s = \sqrt{|B_s| r_s}\exp(i\theta_s), \quad \bar{z}_s = \sqrt{|B_s| r_s}\exp(-i\theta_s); \quad s = 1, 2$$

перейдем к полярным координатам (r_s, θ_s). Получим обратимую систему

$$\dot{r}_s = 2\mu B \operatorname{sign} B_s \sqrt{r_1} r_2 \sin\theta + o(\mu)$$

$$\dot{\theta}_s = -i\lambda_2 + \frac{\mu B \operatorname{sign} B_s}{2ir_s^{1/2}} \prod_{\alpha=1}^{2} r_\alpha^{p/2 - \delta_{s\alpha}} \cos\theta + o(\mu); \quad s = 1, 2 \tag{4.1}$$

$$B = \sqrt{|B_1|}|B_2|$$

инвариантную относительно замены: $(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) \to (-t, \mathbf{r}, -\boldsymbol{\theta})$.

Два последних уравнения для θ_s заменим одним уравнением для угла $\theta = \theta_1 + 2\theta_2$

$$\dot{\theta} = \kappa\varepsilon + \mu B\left(\operatorname{sign} B_1 r_1^{-1/2} r_2 + 2\operatorname{sign} B_2 r_1^{1/2}\right)\cos\theta + o(\mu) \tag{4.2}$$

и выберем в качестве новой независимой переменной угол θ_2. В результате полученная, периодическая по θ, θ_2, система третьего порядка имеет очевидное решение

$$r_s = r_s^0 \ (r_s^0 = \text{const}), \quad \theta = \kappa\varepsilon\theta_2 + \theta^0, \quad \theta^0 = \text{const}; \quad s = 1, 2 \tag{4.3}$$

При $\varepsilon = 0$ это решение будет постоянным, при $\sin\theta^0 = 0$ оно будет симметричным относительно неподвижного множества

$$\mathbf{M}_* = \{r_1, r_2, \theta, \theta_2 : \sin\theta = 0, \sin\theta_2 = 0\}$$

Пусть $\varepsilon = \mu^\sigma$, $\sigma \geq 1$. Тогда из теоремы 1 следует, что постоянным решениям амплитудного уравнения

$$\kappa^* \sqrt{r_1} + B(\operatorname{sign} B_1 r_2 + 2\operatorname{sign} B_2 r_1)\cos\theta = 0 \tag{4.4}$$

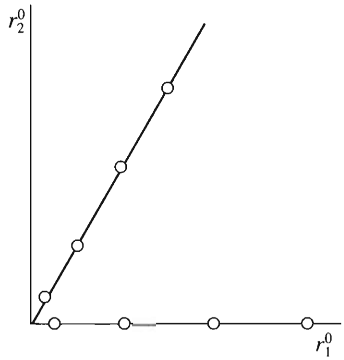
($\kappa^* = \kappa$ при $\sigma = 1$ и $\kappa^* = 0$ при $\sigma > 1$) отвечает при $\mu < \mu_1$ (μ_1 – некоторое конечное число) симметричное периодическое решение

$$r_s = r_s^0 + O(\mu), \quad s = 1, 2, \quad \theta = \theta^0 + O(\mu) \tag{4.5}$$

($\theta^0 = 0$ или π). Учитывая, что в системе (3.1)

$$\lambda_s = i[-(-1)^s\omega_s + \kappa_s\varepsilon], \quad \kappa_s = \text{const}; \quad s = 1, 2; \quad \kappa_1 + p\kappa_2 = \kappa \tag{4.6}$$

получим вид решения в системе (3.1)



Фиг. 1

$$x_s = \mu[\omega_s - (-1)^s \kappa_s \mu^\sigma] a_s \cos\theta_s, \quad y_s = \mu a_s \sin\theta_s, \quad a_s^2 = |B_s| r_s^0 + O(\mu); \quad s = 1, 2$$
$$\theta = \theta^0 + O(\mu), \quad \theta_1 = \theta - 2\theta_2, \quad \theta_2 = [-\omega_2 + \kappa_2 \mu^\sigma + O(\mu)]t + \theta_2^0 \tag{4.7}$$

(r_1^0, r_2^0 связаны уравнением (4.4)).

При $\kappa = 0$ имеем точный резонанс. В этом случае система (4.1) не зависит от параметра ε. Формулы (4.7) дают резонансное семейство ляпуновских симметричных движений, примыкающие к равновесию. Как видно из амплитудного уравнения (4.4), такое семейство существует только в окрестности устойчивого равновесия ($B_1 B_2 < 0$ [16]). На плоскости (r_1^0, r_2^0) резонансное семейство представляется прямой $r_2^0 = 2r_1^0$ (фиг. 1); ляпуновское семейство, отвечающее корням $\pm\lambda_1$, лежит на оси абсцисс.

При $\kappa \neq 0$ на каждой кривой $\varepsilon = \mu^\sigma$ имеем периодическую систему, зависящую от μ. Здесь система (3.1) также допускает при $\mu < \mu_1$ семейство ПД (4.7). При каждом фиксированном μ система (3.1), содержащая $\varepsilon = \mu^\sigma$, имеет семейство (4.7), зависящее от одного произвольного параметра – амплитуды r_1^0.

Таким образом, при любом $\varepsilon \geq 0$ имеем ляпуновское семейство, примыкающее к равновесию. В этом принципиальное различие между локальными ПД в обратимой системе и других системах – общего вида, системах Ляпунова и Гамильтона.

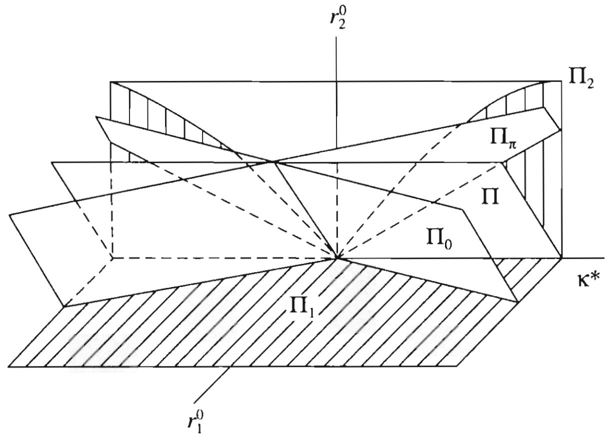
Рождение при $\varepsilon \neq 0$ отделенного от нуля ПД наблюдалось в системе общего вида – как цикла, а в системах Ляпунова и Гамильтона – как семейства циклов на каждом уровне энергии [2].

Только при $\varepsilon = 0$ в системе Ляпунова и Гамильтона существуют резонансные ляпуновские семейства, примыкающие к равновесию [8–12].

В случае $\sigma > 1$ амплитудное уравнение (4.4) не зависит от ε и семейство (4.7) существует только в окрестности устойчивого равновесия. При $\sigma = 1$ решение уравнения (4.4) имеет различный вид в зависимости от того, имеется ли устойчивое или неустойчивое равновесие.

Пусть рассматривается устойчивое равновесие ($B_1 B_2 < 0$). В пространстве (r_1, r_2, θ) амплитудное уравнение (4.4) принимает вид

$$r_2^0 = 2r_1^0 - \kappa^* \sqrt{r_1^0}/(B\cos\theta^0), \quad \sin\theta^0 = 0 \tag{4.8}$$



Фиг. 2

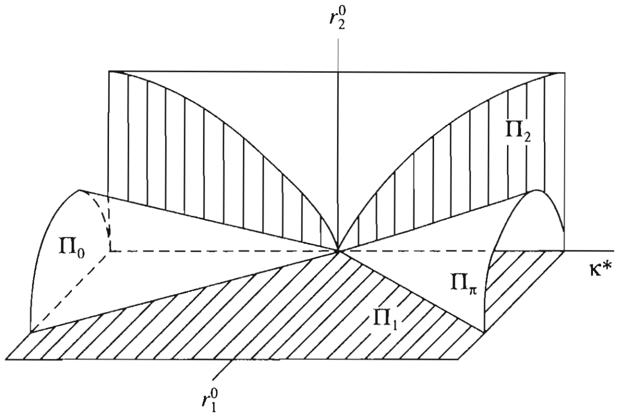
и допускает два семейства решений: $\theta^0 = 0$ и $\theta^0 = \pi$ (фиг. 2). При $\kappa^* = 0$ (точный резонанс) ляпуновское семейство изображается прямой $r_2^0 = 2r_1^0$ на плоскости (r_1^0, r_2^0). Это семейство существует также при $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \mu^\sigma$, $\sigma > 1$) и изображено плоскостью П в пространстве (r_1^0, r_2^0, κ^*). Оно по-прежнему примыкает к нулю $r_1^0 = 0$, $r_2^0 = 0$. При $\kappa^* > 0$ семейство $r_1^0 = 2r_2^0$ расщипляется на три семейства, одно из которых представляется плоскостью П. Два остальных семейства задаются уравнением (4.8). Одно из них – $\Pi_\pi(\theta^0 = \pi)$ примыкает к оси κ^*, а другое – $\Pi_0(\theta^0 = 0)$ к точкам $\kappa^* = 2B\sqrt{r_1^0}$. На плоскости (r_1^0, κ^*) существует ляпуновское семейство, отвечающее корням $\pm\lambda_1$. На прямой $\kappa^* = 2B\sqrt{r_1^0}$ это семейство раздваивается и переходит в семейство Π_0. Очевидно, и на плоскости (r_2^*, κ^*) при $\kappa^* > 0$ существует ляпуновское семейство, отвечающее $\pm\lambda_2$.

Нерезонансные ляпуновские семейства, установленные ранее [5], на фиг. 2 выделены штриховкой.

Перейдем к случаю неустойчивого равновесия ($B_1B_2 > 0$). В этом случае амплитудное уравнение имеет вид

$$r_2^0 = -2r_1^0 - \kappa^*\sqrt{r_1^0}/(B\cos\theta^0), \quad \sin\theta^0 = 0 \tag{4.9}$$

Очевидно, при точном резонансе ляпуновское семейство отсутствует. Аналогичная ситуация имеет место при $\varepsilon = \mu^\sigma(\sigma > 1)$. При $\sigma = 1$ семейство $\theta^0 = 0$ существует только для $\kappa^* < 0$, а семейство $\theta^0 = \pi$ – для $\kappa^* > 0$ (фиг. 3). Соответствующие поверхности расположены над плоскостью (r_1^0, κ^*) и пересекает ее по оси κ^* и прямым $\kappa^* = \pm 2B\sqrt{r_1^0}$. Семейства примыкают к нулю и одновременно пересекают семейство Π_1, отвечающее корням $\pm\lambda_1$. Семейство Π_1 раздваивается на прямых $\kappa^* = \pm B\sqrt{r_1^0}$. При каждом фиксированном $\kappa^*\varepsilon$ семейство ляпуновских движений представляется точками кривой, параллельной плоскости (r_1^0, r_2^0) и содержит, в частности, точки, близ-



Фиг. 3

кие к равновесию $r_1^0 = 0$, $r_2^0 = 0$. Колебания происходят с амплитудой $O(\varepsilon A)$, а число A зависит от выбранной точки кривой (фиг. 3).

Теорема 3. В обратимой системе с резонансом $\lambda_1 + 2\lambda_2 = i\kappa\varepsilon$ ($\kappa = \text{const}$, ε – малое неотрицательное число), в зависимости от знака чисел B_1, B_2, имеются следующие ляпуновские семейства ПД.

В окрестности устойчивого ($B_1B_2 < 0$) равновесия при $\varepsilon = 0$ (точный резонанс) имеем резонансное семейство ($r_2^0 = 2r_1^0$), примыкающее к равновесию. При $\kappa\varepsilon \neq 0$ это семейство расщепляется на три поверхности, одна из которых отвечает $\theta^0 = 0$ (Π_0), другая – $\theta^0 = \pi(\Pi_\pi)$; на третьей – плоскости П имеем $r_2^0 = 2r_1^0$. Периодические колебания на них описываются формулами (4.7), причем $\varepsilon = \mu^\sigma$ ($\sigma > 1$) на плоскости П, на остальных поверхностях имеем $\varepsilon = \mu$. При $\kappa^* > 0$ (<0) семейство $\Pi_0(\Pi_\pi)$ отделено от равновесия (примыкает к равновесию). На координатных плоскостях существуют ляпуновские семейства Π_1 и Π_2, отвечающие парам корней $\pm\lambda_1$ и $\pm\lambda_2$, причем семейство Π_2 существует только при $\varepsilon \neq 0$.

В окрестности неустойчивого ($B_1B_2 > 0$) равновесия резонансное ляпуновское семейство отсутствует. При $\kappa^* < 0$ существует только семейство Π_0, а при $\kappa^* > 0$ – только семейство Π_π; движения описываются формулами (4.7) с $\sigma = 1$. Семейства Π_1 и Π_2 по-прежнему существуют.

5. Устойчивость локальных ПД при резонансе 1:2. В периодической по θ_2 и θ системе третьего порядка

$$\frac{dr_s}{d\theta_2} = \frac{\mu}{\Phi_2}[2B\operatorname{sign}B_s\sqrt{r_1}r_2\sin\theta + \sqrt{r_s}R_s]$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_2} = \frac{1}{\Phi_2}\left\{\kappa\mu^\sigma + \mu\left[B\left(\operatorname{sign}B_1\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} + 2\operatorname{sign}B_2\sqrt{r_1}\right)\cos\theta + \frac{\Theta_1}{\sqrt{r_1}} + 2\frac{\Theta_2}{\sqrt{r_2}}\right]\right\} \tag{5.1}$$

$$\Phi_2 = -\omega_2 + \kappa_2\mu^\sigma + \mu\left(2B\operatorname{sign}B_2\sqrt{r_1} + \frac{\Theta_2}{\sqrt{r_2}}\right), \quad R_s, \Theta_s = o(\mu); \quad s = 1, 2$$

для решения

$$\begin{aligned} & r_s = r_s^0 + O(\mu), \quad s = 1, 2; \quad \theta = \theta^0 + O(\mu), \quad \sin\theta^0 = 0 \\ & \kappa\mu^{\sigma - 1}\sqrt{r_1^0} + 2B(\operatorname{sign}B_1 r_2^0 + \operatorname{sign}B_2 r_1^0) = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

составим в первом приближении по μ уравнения в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta r_s)}{d\theta_2} &= -\frac{2\mu}{\omega_2}B\operatorname{sign}B_s\sqrt{r_1^0}r_2^0\cos\theta^0\Delta\theta \\ \frac{d(\Delta\theta)}{d\theta_2} &= -\frac{\mu B}{2r_1^0\sqrt{r_1^0}\omega_2}[(2\operatorname{sign}B_2 r_1^0 - \operatorname{sign}B_1 r_2^0)\Delta r_1 + 2\operatorname{sign}B_1 r_1^0\Delta r_2]\cos\theta^0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Характеристическое уравнение системы (5.3) имеет один нулевой корень, а два других корня определяются соотношением

$$\rho^2 = \mu^2 B^2 r_2^0(\omega_2 r_1^0)^{-1}(4r_1^0\operatorname{sign}B_1 B_2 + r_2^0) \tag{5.4}$$

Отсюда сразу следует, что в окрестности неустойчивого ($B_1B_2 > 0$) равновесия все ПД семейств Π_0 и Π_π неустойчивы.

При вычислении ρ для устойчивого ($B_1B_2 < 0$) равновесия в соотношении (5.4) учтем уравнение (4.4). Получим

$$\rho^2 = -\mu^2 B^2 r_2^0(\omega_2\sqrt{r_1^0})^{-1}[2\sqrt{r_1^0} + \kappa^*/(B\cos\theta^0)]$$

Значит, при точном резонансе ляпуновское семейство устойчиво. Оно остается устойчивым, если $\varepsilon = \mu^\sigma$, $\sigma > 1$ (семейство П). Если $\sigma = 1$, то при $\kappa > 0$ устойчиво семейство Π_0, а при $\kappa < 0$ – семейство Π_π. Наконец, в зависимости от совместного влияния в системе (3.1) нелинейности и величины расстройки, получим: семейство $\Pi_0(\Pi_\pi)$ устойчиво при $\kappa < 0$ $(\kappa > 0)$, если $|\kappa| < 2B\sqrt{r_1^0}$, в противном случае – неустойчиво. Здесь обнаруживается факт примыкания к устойчивому нулю семейства неустойчивых ПД.

Теорема 4. В случае резонанса 1:2 ляпуновские ПД в окрестности неустойчивого ($B_1B_2 > 0$) равновесия имеют гиперболический характер. Если равновесие устойчиво, то резонансное ляпуновское семейство устойчиво и переходит в устойчивые семейства П, $\Pi_0(\kappa > 0)$ и $\Pi_\pi(\kappa < 0)$. Семейства $\Pi_0(\kappa < 0)$, $\Pi_\pi(\kappa > 0)$ устойчивы при $|\kappa| > 2B\sqrt{r_1^0}$ и носят гиперболический характер при $|\kappa| < 2B\sqrt{r_1^0}$.

Замечания. 1°. Семейство называется устойчивым, если оно состоит из устойчивых ПД.

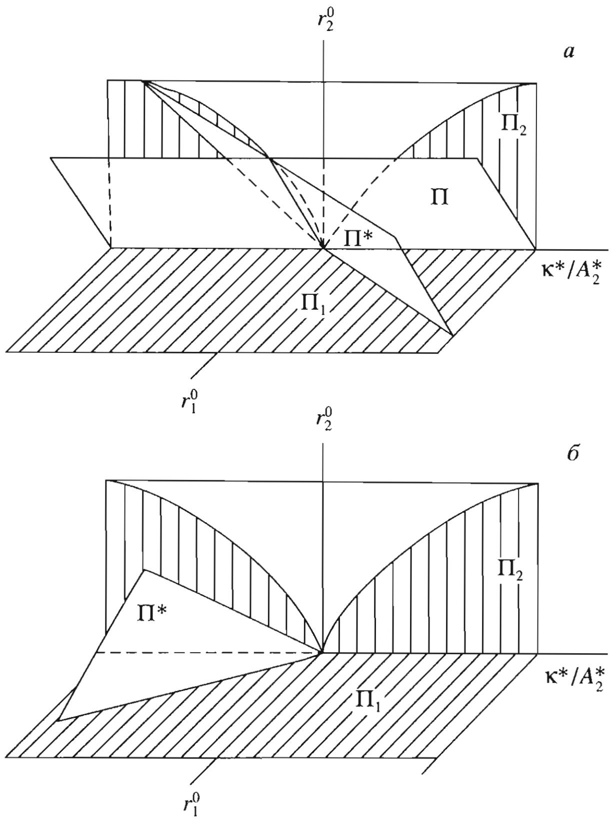
2°. Устойчивость решения (5.2) системы (5.1) исследовалась в первом приближении по переменным r_1, r_2, θ и по параметру μ. Выводы теоремы 3 о гиперболическом характере гарантируют неустойчивость ПД по Ляпунову.

6. Вырожденный случай. В механических задачах обычно возникает вырожденный случай $B = 0$. Здесь в нормальной форме члены второго порядка равны нулю, а система (3.1) в переменных $\mathbf{z}$, $\bar{\mathbf{z}}$ принимает вид

$$\dot{z}_s = \lambda_s z_s + i\mu^2[A_{s1}|z_1|^2 + A_{s2}|z_2|^2]z_s + \mu^3 Z_s(\mu, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad s = 1, 2 \tag{6.1}$$

(A_{sj} – действительные постоянные).

Нормальная форма обратимой системы имеет вид (6.1), и в случае отсутствия резонансов 1:1, 1:2, 1:3. Следовательно, имеем общую задачу о семействе ляпуновских ПД в вырожденных случаях указанных резонансов и для резонансов $1:p$, $p > 3$.



Фиг. 4

Амплитудное уравнение в исследуемых случаях записывается следующим образом:

$$\kappa^* + (A_1^* r_1 + A_2^* r_2) = 0, \quad \sin\theta^0 = 0, \quad A_s^* = A_{s1} + pA_{s2}, \quad s = 1, 2$$
$$\lambda_1 + p\lambda_2 = i\kappa\varepsilon \quad (\kappa = \text{const}), \quad p = 1, 2, \ldots \tag{6.2}$$

($\kappa^* = \kappa$ при $\varepsilon = \mu^2$ и $\kappa^* = 0$ при $\varepsilon = \mu^{\sigma+1}$, $\sigma > 1$).

Рассмотрим два случая. Когда $A_1^* A_2^* < 0$, поверхности ляпуновских семейств изображены на фиг. 4, *а*. Резонансное семейство ($\kappa^* = 0$) существует и примыкает к нулю. На нем пересекаются семейства П ($\varepsilon = \mu^{\sigma+1}$, $\sigma > 1$) и П*($\varepsilon = \mu^2$), которые имеются как при $\theta^0 = 0$, так и при $\theta^0 = \pi$.

В случае $A_1^* A_2^* > 0$ (фиг. 4, *б*, $A_2^* > 0$) резонансное семейство отсутствует, а при $\kappa \neq 0$ есть только семейство П*.

Все ПД описываются формулами (4.7) с заменой μ на μ^2 и устойчивы. Семейства $П_1$, $П_2$ по-прежнему выделены штриховкой. Из теоремы 1 выводим следующую теорему.

Теорема 5. В вырожденных случаях резонансов 1:1, 1:2, 1:3 и при резонансе 1:p ($p > 3$) семейства ляпуновских ПД определяется амплитудным уравнением (6.2). При $A_1^* A_2^* < 0$ существует резонансное семейство, через которое проходят плоскости – семейства П и П*. При $A_1^* A_2^* > 0$ резонансного семейства нет, а при $\kappa^*/A_2^* < 0$ существует только семейство П*.

7. Резонанс четвертого порядка 1:3. В исследуемом случае нормальная форма системы до членов третьего порядка включительно с учетом масштабирования имеет вид

$$\dot{z}_s = \lambda_s z_s + i\mu^2\left[(A_{s1}|z_1|^2 + A_{s2}|z_2|^2)z_s + iB_s\prod_{\alpha=1}^{2}\bar{z}_\alpha^{p_\alpha - \delta_{s\alpha}}\right] + \mu^3 Z_s(\mu, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad s = 1, 2 \quad (7.1)$$

(A_{sj}, B_s – действительные числа). Как в разд. 4, рассмотрим невырожденный случай $B_1B_2 \neq 0$ и введем полярные координаты. Далее, примем за θ угол $\theta = \theta_1 + 3\theta_2$ и, учитывая выражение (4.5) с $p = 3$, запишем периодическую по θ и θ_2 систему третьего порядка

$$\frac{dr_1}{d\theta_2} = \frac{1}{\Phi_2}\left\{2\mu^2 \operatorname{sign} B_s\sqrt{r_1 r_2^3}\sin\theta + O(\mu^3)\right\}$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_2} = \frac{1}{\Phi_2}\left\{\kappa\varepsilon + \mu^2 B\left[A_1^* r_1 + A_2^* r_2 + \left(\operatorname{sign}B_1 r_1^{-1/2} r_2^{3/2} + 3\operatorname{sign}B_2 r_1^{1/2} r_2^{1/2}\right)\cos\theta + O(\mu^3)\right.\right. \quad (7.2)$$

$$\Phi_2 = -\omega_2 + \kappa_2\mu^\sigma + \mu^2(A_{21}B_1 r_1 + A_{22}B_2 r_2 + 3B\operatorname{sign}B_2 r_1^{1/2} r_2^{1/2}\cos\theta) + O(\mu^3)$$

$$A_s = A_{s1} + 3A_{s2}, \quad A_s^* = A_s B_s/B, \quad B = \sqrt{|B_1||B_2|^3}$$

Составим амплитудное уравнение для системы (7.2)

$$\kappa^* + B\left[A_1^* r_1^0 + A_2^* r_2^0 + (\operatorname{sign}B_1 r_2^0 + 3\operatorname{sign}B_2 r_1^0)\sqrt{\frac{r_2^0}{r_1^0}}\cos\theta^0\right] = 0, \quad \sin\theta^0 = 0$$

(постоянная κ^* равна нулю при $\varepsilon = \mu^{\sigma+1}(\sigma > 1)$ и $\kappa^* = \kappa$ при $\varepsilon = \mu^2$). Согласно теореме 1, из уравнения (7.2) определяются все ляпуновские семейства при резонансе 1:3.

Теорема 6. В случае резонанса 1:3 все ляпуновские семейства симметричных ПД определяются амплитудным уравнением (7.2). В исходной системе (3.1) указанные ПД описываются формулами

$$\begin{gathered} x_s = \mu[\omega_s - (-1)^s\kappa_s\mu^{\sigma+1}]a_s\cos\theta_s, \quad y_s = \mu a_s\sin\theta_s, \quad a_s^2 = |B_s|r_s^0 + O(\mu^2), \quad s = 1, 2 \\ \theta = \theta^0 + O(\mu^2), \quad \theta_1 = \theta - 3\theta_2, \quad \theta_2 = [-\omega_2 + \kappa_2\mu^{\sigma+1} + O(\mu^2)]t + \theta_2^0 \end{gathered} \quad (7.3)$$

($\theta_2^0 = \text{const}$, $\sigma \geq 1$; κ_s определены в (4.6)). В зависимости от коэффициентов A_1^*, A_2^*, B_1 и B_2 семейства существуют как при точном резонансе ($\varepsilon = 0$), так и при $\varepsilon \neq 0$. Условия существования семейств при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \mu^{\sigma+1}(\sigma > 1)$ совпадают, а при $\varepsilon = \mu^2$ в (7.2) имеем $\kappa^* = \kappa$.

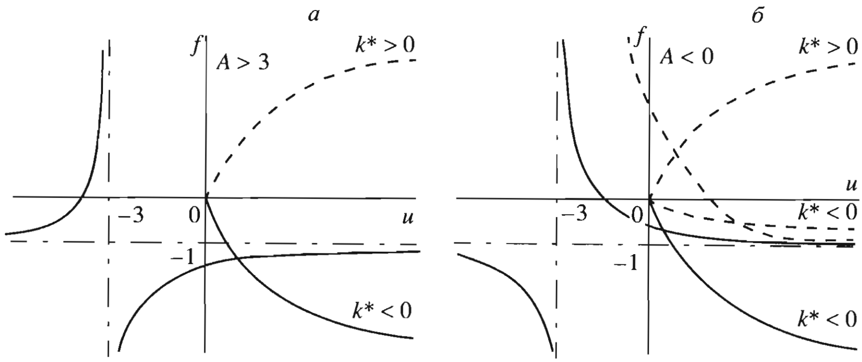
Проанализируем условия существования ляпуновских семейств при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \mu^{\sigma+1}(\sigma > 1)$. В этом случае $\kappa^* = 0$.

1°. $B_1B_2 > 0$. Амплитудное уравнение (7.2) принимает вид

$$A_1^* + A_2^* u + (3 + u)\sqrt{u} = 0, \quad \cos\theta^0 = 0, \quad \sin\theta^0 = 0, \quad u = r_2^0/r_1^0 \quad (7.4)$$

В случае $A_2^* = 0$ семейство всегда сушествует, причем только одно, и определяется из уравнения

$$(3 + u)\sqrt{u} = |A_1^*|$$



Фиг. 5

В другом частном случае $|A_1^* + A_2^*| = 4$ корень уравнения (7.4) равен $u = 1$. Этот случай соответствует границе области устойчивости равновесия [16] и дает ляпуновское семейство $r_1^0 = r_2^0$, примыкающее к равновесию.

В случае $A_2^* \neq 0$ перепишем уравнение (7.4) в виде

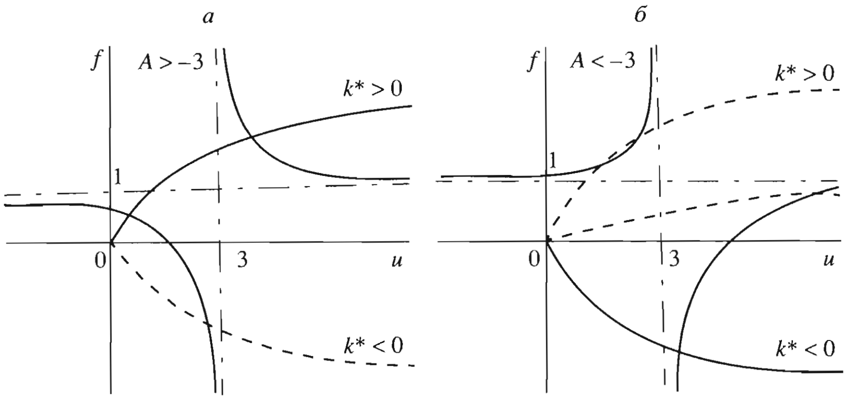
$$
\begin{aligned}
&f(u)\cos\theta^0 = k\sqrt{u} \\
&f(u) = -(A+u)/(3+u), \quad k = 1/A_2^*, \quad A = A_1^*/A_2^*
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

При $A = 3$ имеем $u = |A_2^*|^2$ и ляпуновское семейство существует. При $A \neq 3$ взаимное расположение графиков функций $f(u)$ и $k^*\sqrt{u}$ $(k^* = k\cos\theta^0)$ показано на фиг. 5. Видно, что в случае $A > 0$ (фиг. 5,*а*) существует только одна точка пересечения графиков (при $k^* < 0$), что доказывает существование только одного семейства $\theta^0 = 0$ или $\theta^0 = \pi$.

При $0 < A < 3$ нуль функции $f(u)$ лежит слева от равновесия (фиг. 5, *б*) и графики пересекаются только в одной точке; существует семейство с $k^* < 0$. Случай $A = 0$ тривиален. Здесь $A_1^* = 0$, $A_2^* \neq 0$. Имеется только одно семейство. Если же $A < 0$ (кривая $f(u)$ на фиг. 5,*б* изображена штриховой линией), всегда есть пересечение (при $k^* > 0$). Другое семейство возникает при $k^* < 0$ с уменьшением $|k^*|$.

При $B_1B_2 > 0$ равновесие будет неустойчиво, если $|A_1^* + A_2^*| < 4$ [16]. Из приведенного выше анализа следует, что в этом случае, по крайней мере одно, ляпуновское семейство существует.

2°. $B_1B_2 < 0$ (устойчивое равновесие). Амплитудное уравнение представляется также в виде (7.5), только в этом случае $f(u) = -(A+u)/(3-u)$. Видно, что при $A = -3$ имеется единственное семейство $r_1^0 = r_2^0$. При $A \neq -3$ взаимное расположение графиков функций $f(u)$ и $k^*\sqrt{u}$ показано на фиг. 6. В случае $A > -3$ (фиг. 6, *а*) может быть одно ($k^* < 0$) или два ($k^* > 0$) семейства, причем ни одно из последних не примыкает к равновесию, если $\varepsilon \neq 0$. В случае $A < -3$ всегда есть одно семейство (при $k^* < 0$), а в зависимости от значений величин A и $k^* > 0$ могут существовать одно или два семейства (фиг. 6, *б*).



Фиг. 6

Устойчивость локальных ПД при резонансе 1:3 исследуем на основе уравнений в вариациях. Для решений (r_1^0, r_2^0, θ^0), определяемых амплитудным уравнением (7.2), имеем

$$\frac{d(\Delta r_s)}{d\theta_2} = -\frac{2\mu^2}{\omega} B \operatorname{sign} B_s \sqrt{r_1^0 r_2^{0^3}} \cos\theta^0 \Delta\theta, \quad s = 1, 2$$

$$\frac{d(\Delta\theta)}{d\theta_2} = -\frac{\mu^2}{\omega} B \left\{ A_1^* \Delta r_1 + A_2^* \Delta r_2 + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{r_2^0}{r_1^{0^3}}} \operatorname{sign} B_1 (-r_2^0 \Delta r_1 + 3 r_1^0 \Delta r_2) + \right.\right. \tag{7.6}$$

$$\left.\left. + \frac{3}{\sqrt{r_1^0 r_2^0}} \operatorname{sign} B_2 (r_2^0 \Delta r_1 + r_1^0 \Delta r_2)\right] \cos\theta^0 \right\}; \quad \omega = \omega_2$$

Характеристическое уравнение системы (7.6), имеет один нулевой корень. Два других корня равны $\pm\mu^2 B\omega^{-1}\rho_*$, где

$$\rho_*^2 = \sqrt{r_1^0 r_2^{0^3}}\left[2(A_1^* \operatorname{sign} B_1 + A_2^* \operatorname{sign} B_2)\cos\theta^0 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{\sqrt{u}} + 3\operatorname{sign}(B_1 B_2)\left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}\right) - \sqrt{u^3}\right], \quad u = \frac{r_2^0}{r_1^0}$$

Следовательно, при $\rho_* < 0$ имеем устойчивое ПД, при $\rho_* > 0$ ПД носит гиперболический характер.

8. Резонанс 1:1. В случае кратных корней с простыми элементарными делителями, а также в случае, близком к случаю с простыми корнями, нормальная форма имеет вид

$$\dot{r}_s = 2\mu^2[(B_{s1} r_1 + B_{s2} r_2)\sqrt{r_1 r_2} \sin\theta + b_s r_1 r_2 \sin 2\theta] + O(\mu^3)$$

$$\dot{\theta}_s = (-1)^{s-1}\omega + \kappa_s \varepsilon + \mu^2\left[A_{s1} r_1 + A_{s2} r_2 + (B_{s1} r_1 + B_{s2} r_2)\sqrt{\frac{r_{3-s}}{r_s}} \cos\theta + b_s r_{3-s} \cos 2\theta\right] + O(\mu^3) \tag{8.1}$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa\varepsilon \quad (\kappa_{1,2} = \mathrm{const}), \quad s = 1, 2$$

(A_{sj}, B_{sj}, b_s – постоянные, ε – расстройка резонанса, μ – масштабный коэффициент). В этой системе все симметричные относительно неподвижного множества

$\{r_1, r_2, \theta_1, \theta_2 : \sin\theta_1 = 0, \sin\theta_2 = 0\}$

семейства ПД определяются из амплитудного уравнения

$$\kappa^* + A_1^* r_1^0 + A_2^* r_2^0 + (Br_1^0 r_2^0 + B_{21} r_1^{0^2} + B_{12} r_2^{0^2}) \frac{\cos\theta^0}{\sqrt{r_1^0 r_2^0}} = 0, \quad \sin\theta^0 = 0 \tag{8.2}$$

$$A_1^* = A_1 + b_2, \quad A_2^* = A_2 + b_1, \quad A_s = A_{1s} + A_{2s}, \quad s = 1, 2; \quad B = B_{11} + B_{22}$$

($\kappa^* = 0$ при $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = \mu^{\sigma+1}$, $\sigma > 1$; $\kappa^* = \kappa$ при $\varepsilon = \mu^2$). Это уравнение при $\kappa^* = 0$ сводится к уравнению

$$(A_1^* + A_2^* u)\sqrt{u} + (B_{21} + Bu + B_{12} u^2)\cos\theta^0 = 0, \quad \sin\theta^0 = 0, \quad u = r_2^0 / r_1^0 \tag{8.3}$$

Таким образом, вопрос о существовании симметричных ляпуновских семейств решается нахождением корней уравнения (8.2) или (8.3).

Отличительной особенностью резонанса 1:1 является возможность существования несимметричного изолированного ПД (цикла). В самом деле, уравнения для r_1^0, r_2^0 при $\mu = 0$ имеют постоянные решения, в которых $\sin\theta^0 \neq 0$, а θ^0 определяется из условия $\dot{\theta} = 0$.

Запишем систему амплитудных уравнений [2] для нахождения несимметричных ПД

$$\begin{gathered} B_{s1} r_1^0 + B_{s2} r_2^0 + b_s \sqrt{r_1^0 r_2^0} \cos\theta^0 = 0, \quad s = 1, 2, \quad \sin\theta^0 \neq 0 \\ \kappa^* + A_1 r_1^0 + A_2 r_2^0 + (Br_1^0 r_2^0 + B_{21} r_1^{0^2} + B_{12} r_2^{0^2}) \frac{\cos\theta^0}{\sqrt{r_1^0 r_2^0}} + (b_1 r_2^0 + b_2 r_1^0)\cos 2\theta^0 = 0 \end{gathered} \tag{8.4}$$

Теперь используя переменную $x^2 = r_1^0 / r_2^0$, перепишем первые два уравнения системы (8.4) в виде

$$B_{s1} x^2 + b_s x \cos\theta^0 + B_{s2} = 0, \quad s = 1, 2$$

Далее, умножая эти уравнения соответственно на b_2 и b_1 и вычитая полученные уравнения почленно одно из другого, найдем

$$x^2 = -\frac{B_{12} b_2 - B_{22} b_1}{B_{11} b_2 - B_{21} b_1} > 0 \tag{8.5}$$

Тогда

$$\cos\theta^0 = -\frac{B_{12} B_{21} - B_{11} B_{22}}{B_{21} b_1 - B_{11} b_2} x^{-1} \tag{8.6}$$

Наконец, из третьего уравнения (8.4) с учетом соотношений (8.5), (8.6) найдем

$$r_2^0 = -\kappa^* / G, \quad G = A_1 x^2 + A_2 + (Bx + B_{21} x^2 + B_{12} x^{-1})\cos\theta^0 + (b_1 + b_2 x^2)\cos 2\theta^0 \tag{8.7}$$

Из формулы (8.7) видно, что цикл существует только при $\kappa^* = \kappa \neq 0$, т.е. в ситуации, близкой к резонансной. Отсюда также вытекает, что $\varepsilon = \mu^2$, т.е. цикл возникает на расстоянии $\sqrt{\varepsilon}$ от нуля. Наконец, из формулы (8.5) следует рождение двух циклов, на которых $\theta^0 = \pm\theta^*$.

Теорема 7. В случае резонанса 1:1 в окрестности равновесия обратимой системы существуют локальные симметричные ПД, которые образуют ляпуновские семейства. Эти семейства существуют как при точном резонансе ($\varepsilon = 0$); так и при расстройке $\varepsilon \neq 0$; все семейства определяются амплитудным уравнением (8.2). Наряду с этим, в окрестности $O(\sqrt{\varepsilon})$ рождается два цикла, симметричных друг другу относительно неподвижного множества; циклы задаются формулами (8.5)–(8.7).

Исследуем устойчивость локальных ПД. С этой целью составим уравнения в вариациях для семейства ПД, определяемых формулой (8.2) или формулами (8.5)–(8.6). Далее, запишем характеристическое уравнение. Не приводя явный вид этого громоздкого уравнения, только укажем, что для симметричного решения уравнение всегда имеет один нулевой и пару корней с противоположными знаками: $\rho = \pm\mu^2\omega^{-1}\rho_*$. Поэтому в зависимости от знака числа ρ_*^2 ПД или устойчиво или имеет гиперболический характер.

9. Модель упругого стержня под действием следящей силы [17]. Рассмотрим обратимую механическую систему, состоящую из двух идентичных стержней массы m и длины l, соединенных друг с другом и неподвижным центром при помощи идеальных шарниров и спиральных пружин жесткости c_1 и c_2. На свободный конец второго стержня действует постоянная по величине следящая сила F, направленная вдоль его оси. Недеформированному состоянию пружин отвечает прямолинейная конфигурация системы. Система расположена в горизонтальной плоскости.

Движение системы описывается уравнениями Лагранжа, в которых обобщенными координатами являются углы φ_1, φ_2 – отклонения пружин от равновесного состояния. Разложим правые части уравнений по степеням φ_1, φ_2. Оказывается, квадратичные члены в этих разложениях отсутствуют.

Система устойчива в линейном приближении ([17], с. 212), если

$$a^2 \geq 27c_1c_2, \quad a = 2c_1 + 16c_2 - 5Fl \tag{9.1}$$

Вычислим частоты ω_1, ω_2 линейной системы

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3}{7ml^2}(a \pm \sqrt{a^2 - 27c_1c_2}), \quad \omega_1 \geq \omega_2, \quad \alpha^2 = 27\frac{c_1c_2}{a^2}$$

Тогда при $\alpha = (p-1)/(p+1)$ в системе есть резонанс $1{:}p$. При этом для $p = 1$ имеем непростые элементарные делители, а для $p = 2$ резонанс вырожденный. Отсюда получаем, что теорема 5 полностью решает вопрос о ляпуновских семействах для всех резонансов, исключая случаи $p = 1$ и $p = 3$.

Рассмотрим резонанс 1:3 в случае идентичных пружин ($c_1 = c_2 = c$) и вычислим коэффициенты системы (7.1)

$$A_{11} \approx 4.88d^2, \quad A_{12} \approx 6.34d^2, \quad B_1 \approx 2.12d^2$$

$$A_{21} \approx -3.48d^2, \quad A_{22} \approx 2.51d^2, \quad B_2 \approx 1.07d^2$$

(d^2 – некоторое положительное число). Значит, в системе (7.2) имеем

$$B_1B_2 > 0, \quad B \approx 1.61d^4, \quad A_1^* \approx -7.588, \quad A_2^* \approx 9.218$$

Вычислим $A = A_1^*/A_2^* \approx -0.823$. При точном резонансе и малой расстройке ($\varepsilon = \mu^{\sigma+1}$, $\sigma > 1$) получим случай, изображенный на фиг. 5, *б* штриховыми кривыми. Найдем $k = 1/A_2^* \approx 0.108$. Поэтому $f(u) > k^* \sqrt{u}$ при $k^* < 0$. Следовательно, имеется только семейство $k^* > 0$. Это семейство содержит неустойчивые ПД; семейство носит гиперболический характер.

Таким образом, при резонансе 1:3 прямолинейная конфигурация неустойчива, а при малой деформации пружин возникает семейство колебаний. Характер колебаний – гиперболический; колебания разрушают конфигурацию системы.

Автор благодарит Е.И. Григорьева и С.Н. Круглова (ЗАО ИКГ), М.В. Матвеева (ООО ЭЗОП) и редакцию ПММ за поддержку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00052), программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2000.2003.1) и Министерства образования РФ (ТО2-14.0-1804).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова – Пуанкаре в теории периодических движений // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 355–371.
2. *Тхай В.Н.* Цикл в системе, близкой к резонансной системе // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 254–272.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
4. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к N-планетной задаче // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 56–72.
5. *Тхай В.Н.* Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 46–58.
6. *Sevryuk M.B.* Reversible systems. Lecture Notes in Mathematics. V. 1211. Berlin: Springer, 1986. 319 p.
7. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.
8. *Roels J.* An extension to resonant cases of Liapunov's theorem concerning the periodic solutions near a Hamiltonian equilibrium // J. Different. Equat. 1971. V. 9. № 2. P. 300–324.
9. *Roels J.* Families of periodic solutions near a Hamiltonian equilibrium when the ratio of two eigenvalues is 3 // J. Different. Equat. 1971. V. 10. № 3. P. 431–447.
10. *Sweet D.* Periodic solutions for dynamical systems possessing a first integral in the resonant case // J. Different. Equat. 1973. V. 14. № 1. P. 171–183.
11. *Henrard J.* Liapunov's center theorem for resonant equilibrium // J. Different. Equat. 1973. V. 14. № 3. P. 431–441.
12. *Schmidt D.S.* Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system // Celest. Mech. 1974. V. 9. № 1. P. 81–103.
13. *Cesari L.* Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinari Differential Equations. Berlin, etc.: Spinger, 1959 = *Чезари Л.* Ассимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
14. *Hale J.K.* Oscillations in Nonlinear Systems. N. Y., etc.: McGraw-Hill, 1963 = *Хейл Дж. К.* Колебания в нелинейных системах. М. Мир, 1966. 230 с.
15. *Тхай В.Н.* Вращательные движения механических систем // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 179–195.
16. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
17. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука. 1976. 319 с.

Москва
e-mail: tkhai@ccas.ru

Поступила в редакцию
4.III.2003