УДК 531.36

© 2004 г. В. В. Козлов

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ АРТИНА

Установлены новые связи между спектром линейной системы и индексами инерции ее квадратичного интеграла. Подробно изучается случай, когда положительный и отрицательный индексы инерции квадратичного интеграла совпадают. Найдены условия, при которых сингулярные плоскости будут лагранжевыми относительно некоторой естественной симплектической структуры. Они тесно связаны с условиями сильной устойчивости линейной системы. Результаты общего характера применяются к классической задаче о гироскопической стабилизации.

1. Линейные системы с квадратичным интегралом и пространства Артина. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

с невырожденным оператором $A(|A| \neq 0)$, допускающую первый интеграл в виде невырожденной квадратичной формы

$$f = (Bx, x)/2, \quad |B| \neq 0 \tag{1.2}$$

Было показано [1], что уравнения (1.1) гамильтоновы. Симплектическая структура ω задается кососимметрической матрицей

$$\Omega = BA^{-1}(\omega(x', x'') = (\Omega x', x''))$$

а функция Гамильтона совпадает с квадратичной формой (КФ) f:

$$i_v\omega = \omega(v, dx) = df, \quad v = Ax$$

В частности, n четно ($n = 2k$) и спектр оператора A симметричен относительно вещественной и мнимой осей. Последний факт отмечен ранее в [2].

Особый интерес представляет случай, когда индекс инерции КФ (1.2) равен $n/2 = k$. Если КФ (1.2) принять в качестве псевдоевклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$, то $(\mathbb{R}^n, f)$ будет *пространством Артина* [3]. С другой стороны, в $\mathbb{R}^n$ имеется естественная симплектическая структура ω. Это позволяет развить симплектическую геометрию пространства Артина. Первые шаги сделаны в [1], где при $n = 4$ вопрос о расположении вполне сингулярных плоскостей относительно трехмерного семейства лагранжевых плоскостей был увязан со строением спектра и собственных векторов оператора A. Некоторые из результатов [1] распространяются ниже не случай произвольного n.

Напомним, что k-мерная плоскость Λ^k (содержащая точку $x = 0$) называется *лагранжевой* если $\omega(x', x'') = 0$ для всех $x', x'' \in \Lambda$. Плоскость Λ^k называется *сингулярной*, если она целиком лежит в изотропном конусе $\{f(x) = 0\}$. Наконец, плоскость Λ называется *инвариантной*, если проходящая через каждую точку Λ траектория системы (1.1) целиком лежит в Λ.

Предложение 1. Сингулярные лагранжевы плоскости являются инвариантными плоскостями.

Доказательство. Надо доказать, что если $x \in \Lambda$, то $\dot{x} = Ax \in \Lambda$. Это означает, что $\omega(Ax, z) = 0$ для всех векторов $z \in \Lambda$. Однако

$$\omega(Ax, z) = (BA^{-1}(Ax), z) = (Bx, z)$$

С другой стороны,

$$2(Bx, z) = (B(x+z), x+z) - (Bx, x) - (Bz, z) = 0$$

ввиду предположения о сингулярности Λ. Что и требовалось.

Аналогично доказывается, что инвариантные лагранжевы плоскости являются сингулярными плоскостями.

Пример. Линеаризованные уравнения движения механической системы с k степенями свободы, находящейся под действием потенциальных и гироскопических сил, имеют вид

$$\ddot{z} + \Gamma\dot{z} + Pz = 0, \quad z \in \mathbb{R}^k \tag{1.3}$$

Здесь $\Gamma^T = -\Gamma$ – матрица гироскопических сил, а $V = (Pz, z)/2$ – потенциальная энергия. Уравнения (1.3) представимы в виде уравнений Лагранжа с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{z}, \dot{z}) + \frac{1}{2}(\dot{z}, \Gamma z) - \frac{1}{2}(Pz, z)$$

С помощью преобразования Лежандра можно перейти к уравнениям Гамильтона с квадратичным гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\dot{z}, \dot{z}) + V = \frac{1}{2}(y, y) - \frac{1}{2}(y, \Gamma z) + \frac{1}{2}(Pz, z) - \frac{1}{8}(z, \Gamma^2 z)$$

где $y = \dot{z} + \Gamma z/2$. Ясно, что индекс инерции интеграла H будет равен $k = n/2$, если потенциальная энергия V имеет в положении равновесия $z = 0$ строгий максимум (матрица P отрицательно определена).

Пусть $\Lambda = \{y = Dz\}$ – k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^{2k}$, содержащая состояние равновесия $z = y = 0$. Эта плоскость будет сингулярной, если

$$(Dz, Dz) - (Dz, \Gamma z) + (Pz, z) - (z, \Gamma^2 z)/4 = 0$$

Другими словами,

$$\frac{D^T D + DD^T}{2} - \frac{D^T\Gamma - \Gamma D}{2} + P - \frac{\Gamma^2}{4} = 0 \tag{1.4}$$

Плоскость Λ лагранжева (относительно стандартной симплектической структуры в $\mathbb{R}^{2k}$), если матрица D симметрична. В этом случае уравнение (1.4) слегка упрощается:

$$D^2 - \frac{D\Gamma - \Gamma D}{2} + P - \frac{\Gamma^2}{4} = 0 \tag{1.5}$$

Как известно (см. [4]), оно является критерием инвариантности плоскости Λ. В частности, лагранжева сингулярная плоскость будет инвариантной (как и утверждает предложение 1).

2. Степени устойчивости и индексы инерции. *Степенью устойчивости* s системы (1.1) назовем количество пар чисто мнимых корней характеристического уравнения оператора A (считая их кратности). *Степенью неустойчивости* u назовем количество корней (с кратностями) характеристического уравнения оператора A, лежащих в правой комплексной полуплоскости. Можно ввести еще *вещественную степень неустойчивости* r как число положительных вещественных корней характеристического уравнения. Поскольку спектр оператора инвариантен при отражении относительно вещественной оси, то

$$u \equiv r \bmod 2 \tag{2.1}$$

Пусть $i^+(i^-)$ – положительный (отрицательный) индекс инерции квадратичной формы (1.2). Ввиду ее невырожденности, $i^+ + i^- = n$. Очевидно, что $i^+ - i^-$ всегда четно. Было установлено [1] сравнение

$$u \equiv i^- \bmod 2 \tag{2.2}$$

Ввиду соотношения (2.1) оно эквивалентно сравнению $r \equiv i^- \bmod 2$. В частности, если i^- нечетно, то равновесие $x = 0$ системы (1.1) неустойчиво. Это утверждение обобщает классическую теорему Томсона о невозможности гироскопической стабилизации равновесия системы (1.3) с нечетной степенью неустойчивости по Пуанкаре.

Пример. Пусть система (1.1) и интеграл (1.2) зависят от параметра ε и пусть при малых $\varepsilon < 0$ КФ (1.2) положительно определена ($i^- = 0$); при $\varepsilon = 0$ она становится вырожденной, а при малых $\varepsilon > 0$ ее индекс инерции i^- равен 1. Тогда при переходе параметра ε через нуль система (1.1) теряет устойчивость. Отметим, что этот *принцип смены устойчивости* не зависит от размерности фазового пространства, поэтому (при надлежащих естественных условиях) он справедлив и в бесконечномерном случае.

Дополним сравнение (2.2) простым утверждением, относящимся к степени устойчивости.

Теорема 1. Степень устойчивости четна в том и только в том случае, когда $i^+ \equiv i^- \bmod 4$.

Следствие. Если разность индексов инерции $i^+ - i^-$ не делится на 4, то имеется хотя бы одна пара чисто мнимых корней.

Доказательство теоремы 1 использует тот факт, что $|A||B| > 0$. Действительно, матрица $\Omega = BA^{-1}$ невырождена и кососимметрична. Следовательно, n четно и $|\Omega| > 0$. Так как спектр оператора A симметричен относительно вещественной и мнимой осей, его характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ на самом деле является многочленом от $\mu = \lambda^2$ степени $n/2 = k$. Он имеет вид

$$g(\mu) = \mu^k + \ldots + g_k, \quad g_k = |A|$$

Поскольку КФ (1.2), по предположению, невырождена, $i^+ = k + m$, $i^- = k - m$ и, следовательно, $i^+ - i^- = 2m$. Ясно, что $\operatorname{sign}|B| = (-1)i^- = (-1)^{k-m}$. Так как $|A||B| > 0$, то $\operatorname{sign} g_k = (-1)^{k-m}$.

Пусть k четно. Тогда $\mu^k \to +\infty$ при $\mu \to -\infty$ и $\operatorname{sign} g_k = (-1)^m$. Следовательно, при четном (нечетном) m число s отрицательных корней (с кратностями) многочлена g четно (нечетно).

Пусть теперь k нечетно. Тогда $\mu^k \to -\infty$ при $\mu \to -\infty$ и $\operatorname{sign} g_k = -(-1)^m$. Следовательно, при четном (нечетном) m число s также четно (нечетно). Что и требовалось доказать.

Пример. Пусть система (1.3) имеет две степени свободы ($k = 2$) и степень неустойчивости по Пуанкаре равна единице. Тогда $i^+ = 3$, $i^- = 1$ и, следовательно, $i^+ - i^i$ не делится на 4. Таким образом, по теореме 1 всегда имеется пара чисто мнимых корней. По теореме Томсона остальные два корня будут вещественными числами противоположных знаков.

В типичном случае, когда собственные числа оператора A различны, можно указать простые соотношения между степенями устойчивости и неустойчивости и индексами квадратичного интеграла, из которых вытекают сформулированные выше утверждения. Поскольку система (1.1) гамильтонова, по теореме Вильямсона $\mathbb{R}^n$ распадается в прямую сумму кососортогональных (относительно билинейной формы ω) инвариантных подпространств, так что интеграл (1.2) представляется в виде сумм КФ на этих подпространствах. Эти КФ обычно называются частичными гамильтонианами. Простой вещественной паре собственных чисел a, $-a$ соответствует частичный гамильтониан apq с сигнатурой $+-$, чисто мнимой паре $\pm ib$ – гамильтониан $\pm b(p^2 + q^2)/2$ с сигнатурой $++$ или $--$, четверке собственных чисел $\pm a \pm ib$ – гамильтониан $-a(p_1q_1 + p_2q_2) + b(p_1q_2 - p_2q_1)$ с сигнатурой $++--$.

Пусть $s^+(s^-)$ – число пар чисто мнимых собственных значений, которым отвечают частичные гамильтонианы с сигнатурой $++(--)$. Очевидно, $s^+ + s^- = s$. Ввиду невырожденности КФ f

$$u = 2s^+ = i^+, \quad u + 2s^- = i^- \tag{2.3}$$

Отсюда сразу вытекает сравнение (2.2). Вычитая второе соотношение (2.3) из первого, получаем

$$2(s^+ - s^-) = i^+ - i^- \tag{2.4}$$

Так как четности чисел $s^+ - s^-$ и $i^+ - i^-$ совпадают, из равенства (2.4) получаем заключение теоремы 1. Из равенства (2.4) вытекает также полезное неравенство

$$\left|i^+ - i^-\right| \le 2s \tag{2.5}$$

Пример. При выполнении условий справедливости принципа смены устойчивости появляется простая пара вещественных собственных чисел, а остальные собственные числа остаются чисто мнимыми. Действительно, здесь $i^- = 1$, $i^+ = n - 1$. Следовательно, согласно неравенству (2.5), $s \ge k - 1$, где $k = n/2$. Таким образом, $s = k - 1$.

Было бы полезным распространить эти наблюдения на случай кратных корней с нетривиальными жордановыми клетками.

3. Сильная устойчивость. Равновесие $x = 0$ системы (1.1) назовем *сильно устойчивым*, если собственные числа оператора A чисто мнимы и различны. Свойство сильной устойчивости сохраняется при малом возмущении системы (1.1). Ясно, что сильно устойчивое равновесие будет устойчивым по Ляпунову. Обратное, конечно, неверно. Однако условия совпадения чисто мнимых собственных чисел оператора A определяют границу области устойчивости.

Вернемся к исследованию случая, когда псевдоевклидово пространство $(\mathbb{R}^n, f)$ будет артиновым ($i^- = i^+$). Совокупность всех $k = n/2$-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку $x = 0$, образует грассманово гладкое многообразие G размерности k^2. Множество всех k-мерных лагранжевых (сингулярных) плоскостей составляет гладкое подмногообразие $L(S)$ в G размерности $k(k + 1)/2$ ($k(k - 1)/2$ соответственно). Так как $\dim G = \dim L + \dim S$, естественно поставить вопрос об условиях пересечения подмногообразий L и S.

Теорема 2. Если равновесие системы (1.1) сильно устойчиво, то L и S не пересекаются.

Для случая $n = 4$ этот результат отмечен ранее [1]. Теорема 1 становится неверной, если заменить сильную устойчивость обычной устойчивостью по Ляпунову (примеры указаны в [1]).

Следствие. Если найдется сингулярная лагранжева $n/2$-мерная плоскость, то равновесие $x = 0$ не будет сильно устойчивым.

Доказательство. Так как собственные числа оператора A чисто мнимы и различны и система (1.1) гамильтонова, найдутся канонически сопряженные координаты $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$ $(2k = n)$, в которых функция Гамильтона имеет вид

$$f = \lambda_1(p_1^2 + q_1^2)/2 + \ldots + \lambda_k(p_k^2 + q_k^2)/2 \tag{3.1}$$

где $|\lambda_j|$ – частота малых колебаний, причем $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$ (см., например, [5]). Гамильтониан (3.1) – это КФ (1.2), представленная в новых переменных. В частности, индексы инерции КФ (1.2) и (3.1) совпадают. Так как линейное пространство $\mathbb{R}^{2k}$ с псевдоевклидовой метрикой (3.1) является пространством Артина, количества положительных и отрицательных коэффициентов λ_j в соотношении (3.1) равны между собой. В частности, k четно, и поэтому размерность фазового пространства должна делиться на 4.

Замечание. На первый взгляд, последний вывод противоречит примеру механической системы с гироскопическими силами и нечетным числом степеней свободы (см. разд. 1). Однако если $P < 0$ (только в этом случае полная энергия порождает структуру пространства Артина), то равновесие системы (1.3) будет неустойчивым согласно классической теореме Томсона (ввиду нечетности степени неустойчивости Пуанкаре).

Пусть Λ – лагранжева плоскость. Сначала рассмотрим случай, когда уравнение Λ можно представить в виде, разрешенном относительно импульсов:

$$p = Mq \tag{3.2}$$

где $M = \|m_{ij}\|$ – симметричная $(k \times k)$-матрица. Предположим, что плоскость Λ сингулярная. Подставляя соотношение (3.2) в выражение для функции Гамильтона (3.1), переходим к уравнению

$$(Jq, q) + (JMq, Mq) = 0 \tag{3.3}$$

где $J = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Поскольку КФ-форма (3.3) должна обращаться в нуль при всех $q \in \mathbb{R}^k$,

$$MJM = -J \tag{3.4}$$

Отметим, что, если уравнение (3.4) заменить более общим $M^TJM = -J$, оно всегда разрешимо в более широком классе невырожденных $(k \times k)$-матриц (поскольку индекс инерции КФ (Jq, q) равен $k/2$). Надо показать, что это уравнение не имеет симметричных решений.

Так как $\lambda_j \neq 0$, то $|J| \neq 0$. Следовательно, $|M| \neq 0$, в частности, матрица M имеет обратную. Умножая равенство (3.4) слева и справа на M^{-1}, получаем

$$M^{-1}JM^{-1} = -J \tag{3.5}$$

Перемножая левые и правые части равенств (3.4) и (3.5), приходим к соотношению

$$MJ^2M^{-1} = J^2$$

или, что то же самое, матрицы M и J^2 коммутируют: $MJ^2 = J^2M$.

Покажем, что матрица M тоже диагональная. Действительно, пусть

$$J^2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k), \quad \mu_j = \lambda_j^2$$

Тогда

$$MJ^2 = \|\mu_j m_{ij}\|, \quad J^2M = \|\mu_i m_{ij}\|$$

Следовательно, $\mu_i m_{ij} = \mu_j m_{ij}$ для всех i, j. Поскольку $\mu_i \neq \mu_j$ $(i \neq j)$, то $m_{ij} = 0$ при всех $i \neq j$.

Итак, $M = \mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_k)$. Но тогда матричное уравнение (3.4) сводится к противоречивым соотношениям $\lambda_j m_j^2 = -\lambda_j$. Поэтому уравнение (3.4) вообще не имеет симметричных решений.

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение лагранжевой плоскости не представимо в виде (3.2), разрешенном относительно импульсов. В самом общем случае всегда можно выбрать некоторый набор канонических координат

$$p_{i_1}, \ldots, p_{i_m}, \quad q_{j_1}, \ldots, q_{j_{k-m}} \tag{3.6}$$

так что

1) $(i_1, \ldots, i_m)(j_1, \ldots, j_{k-m})$ – разбиение множества $(1 \ldots n)$ на две непересекающиеся части,

2) уравнение лагранжевой k-мерной плоскости Λ имеет вид

$$\begin{gathered} p_{i_1} = m_{1,1}q_{i_1} + \ldots + m_{1,m}q_{i_m} + m_{1,m+1}p_{j_1} + \ldots + m_{1,k}p_{k-m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -q_{j_{k-m}} = m_{n,1}q_{i_1} + \ldots + m_{k,m}q_{i_m} + m_{k,m+1}p_{j_1} + \ldots + m_{k,k}p_{k-m} \end{gathered} \tag{3.7}$$

где $\|m_{r,s}\|$ – симметричная $(k \times k)$-матрица. Отметим, что одна из двух непересекающихся частей множества индексов $1, \ldots, n$ может быть пустой.

Считая плоскость Λ сингулярной, подставим выражения (3.7) в формулу (3.1) для гамильтониана и приравняем полученную КФ нулю. В результате для симметричной матрицы M снова получим уравнение (3.4), которое (как показано выше) не имеет симметричных решений, если среди чисел $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_k^2$ нет равных. Теорема 2 доказана полностью.

4. Некоторые обобщения. Рассмотрим более общий случай, когда все собственные числа невырожденного оператора A чисто мнимые и (в случае кратных собственных значений) без жордановых клеток. Этот случай отвечает свойству устойчивости по Ляпунову равновесного состояния системы (1.1). В некоторых подходящих канонических координатах $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots q_k$ функция Гамильтона снова имеет вид (3.1). Без ущерба для общности можно считать, что

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_k| \tag{4.1}$$

По-прежнему считаем, что индекс инерции невырожденной КФ (3.1) равен k. Опишем все случаи, когда имеется лагранжева сингулярная k-мерная плоскость.

Пусть

$$\begin{gathered} \mu_1 = |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{k_1}|, \quad \mu_2 = |\lambda_{k_1+1}| = \ldots = |\lambda_{k_2}| \\ \mu_m = |\lambda_{k_{m-1}+1}| = \ldots = |\lambda_k| \end{gathered} \tag{4.2}$$

Линейное пространство $\mathbb{R}^{2k}$ разбивается в прямую сумму m подпространств $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$ размерности $k_1, k_2 - k_1, \ldots, k - k_{m-1}$ соответственно; пространство Π_j определяется линейными соотношениями

$$p_1 = q_1 = \ldots = p_{k_j-1} = q_{k_j-1} = 0, \quad p_{k_j+1} = q_{k_j+1} = \ldots = p_k = q_k = 0.$$

Ясно, что все эти подпространства инвариантны относительно фазового потока линейной гамильтоновой системы с гамильтонианом (3.1) (следовательно, и исходной системы (1.1)).

Теорема 3. Система (1.1) с интегралом (1.2) допускает сингулярно лагранжеву плоскость тогда и только тогда, когда индекс инерции ограничения КФ f на каждую плоскость Π_j равен $\dim\Pi_j/2$.

В частности, размерности подпространства $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ должны быть кратны четырем. Если неравенства в цепочке (4.1) строгие, то из теоремы 3 вытекает теорема 2.

Доказательство. Проверим сначала достаточность условий теоремы 3. Для этого в свою очередь достаточно рассмотреть случай, когда $n = 4$ и гамильтониан имеет вид

$$a(p_1^2 + q_1^2)/2 - a(p_2^2 + q_2^2)/2, \quad a > 0 \tag{4.3}$$

Как уже ранее отмечалось, в общем случае k кратно 4 и матрицу M из уравнения (3.4) можно найти в виде блочной матрицы, по диагонали которой находятся симметричные (4×4)-матрицы, задающие уравнения лагранжевой сингулярной плоскости для системы с гамильтонианом (4.3).

Опишем все двумерные сингулярные лагранжевы плоскости для гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.3):

$$\Lambda_\alpha^\pm : p_1 = \operatorname{sh}\alpha q_1 \pm \operatorname{ch}\alpha q_2, \qquad p_2 = \pm\operatorname{ch}\alpha q_1 + \operatorname{sh}\alpha q_2$$

$$\Lambda_\infty^\pm : p_1 = \pm p_2 \quad q_1 = \mp q_2$$

Здесь α – вещественный параметр. При $\alpha \to \pm\infty$ плоскость $\Lambda_\alpha^\pm$, очевидно, стремится к лагранжевой сингулярной плоскости $\Lambda_\infty^\pm$. В действительности объединение двух непрерывных семейств плоскостей $\Lambda_\infty^\pm$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и двух особых плоскостей $\Lambda_\infty^\pm$ в четырехмерном грассмановом многообразии G представляет топологическую окружность $\mathbb{T}^1$ (как гипербола в проективной плоскости является на самом деле овалом).

В общем случае $k = 4s$, $s \in N$ и лагранжевы сингулярные плоскости образуют s-мерное многообразие, которое параметризуется точками s-мерного тора $\mathbb{T}^s$.

Необходимость доказывается так же, как и теорема 2. Надо решить матричное уравнение (3.4), из которого вытекает, в частности, что матрица M и J^2 коммутируют. Пусть $J^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_k^2)$, причем числа λ_j удовлетворяют условиям (4.2). Тогда $M = \operatorname{diag}(M_1, M_2, \ldots, M_m)$, где $M_1, M_2, \ldots, M_m$ – квадратичные симметричные матрицы порядка $k_1, k_2 - k_1, \ldots k - k_{m-1}$ соответственно. Этот факт сразу вытекает из сопоставления явного вида матриц MJ^2 и J^2M.

Таким образом, задача сводится к исследованию разрешимости уравнений

$$M_jJ_jM_j = -J_j, \quad M_j^T = M_j \tag{4.4}$$

на каждом из подпространств Π_j. Отметим, что матрица J_j в (4.4) имеет диагональный вид, причем каждый диагональный элемент равен одному из чисел $\pm\lambda_j(\lambda_j \neq 0)$.

Остается заметить, что количества положительных и отрицательных диагональных элементов совпадают, иначе (согласно закону инерции) с помощью линейной подстановки, определяемой матрицей M_j, КФ (J_jx, x), $x \in \Pi_j$ нельзя привести к КФ $-(J_jx, x)$. Теорема доказана.

5. Полная неустойчивость. Систему (1.1) с максимально возможным значением степени неустойчивости ($u = n/2$) назовем *вполне неустойчивой*. В этом случае спектр оператора A вообще не имеет чисто мнимых собственных значений.

Основной результат составляет

Теорема 4. Если все собственные значения оператора A простые, то лагранжева сингулярная плоскость существует тогда и только тогда, когда система (1.1) вполне неустойчива.

Совпадение собственных значений – явление исключительное, поэтому, если найдется хотя бы одна сингулярная лагранжева плоскость, то почти наверное равновесие $x = 0$ будет неустойчивым.

Доказательство. Достаточность условий теоремы 4 вытекает из теории нормальных форм Вильямсона [5]. Если невырожденная система (1.1) вполне неустойчива, то спектр оператора A содержит либо вещественные пары $\pm a(a > 0)$, либо комплексные четверки $\pm a \pm ib(a, b > 0)$. При этом гамильтониан распадается в сумму частичных гамильтонианов, отвечающих этим парам и четверкам, а сама система (1.1) будет прямым произведением гамильтоновых подсистем, функции Гамильтона которых – эти частичные гамильтонианы. Как отмечено в разд. 2, в неустойчивом случае индексы инерции частичных гамильтонианов равны половине размерности соответствующих фазовых пространств. Оказывается, каждая из этих подсистем имеет сингулярную лагранжеву плоскость. Действительно, частичный гамильтониан пары вещественных собственных чисел $\pm a$ равен

$$apq \tag{5.1}$$

и поэтому имеются две такие плоскости: $p = 0$ и $q = 0$. Четверке собственных значений $\pm a \pm ib$ отвечает частичный гамильтониан

$$-a(p_1q_1 + p_2q_2) + b(p_1q_2 - p_2q_1) \tag{5.2}$$

Здесь также имеются две сингулярные лагранжевы плоскости: $p_1 = p_2 = 0$ и $q_1 = q_2 = 0$. Искомые сингулярные лагранжевы плоскости системы (1.1) – это прямые произведения указанных сингулярных лагранжевых плоскостей ее подсистем.

Докажем теперь необходимость условий теоремы 4. В нормальных канонических координатах Вильямсона функция Гамильтона системы с простыми собственными значениями имеет вид

$$(KP, Q) + (Jq, p) + (Jp, q) \tag{5.3}$$

Здесь P, Q – совокупность канонических переменных, отвечающих вещественным парам и комплексным четверкам собственных значений оператора A, а канонические переменные p, q соответствуют парам чисто мнимых собственных значений. Матрица J – диагональная с неравными диагональными элементами. Будем искать лагранжевы сингулярные плоскости в виде

$$\left\| \begin{matrix} P \\ p \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} M_1 & N \\ N & M_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q \\ q \end{matrix} \right\|$$

где M_1, M_2 – некоторые симметричные матрицы. Подставляя эти выражения в выражение для гамильтониана (5.3), получим КФ от координат Q и q

$$(RQ, Q) + (SQ, q) + (Tq, q)$$

причем $T = M_2JM_2 + J$. Если эта форма тождественно равна нулю, то, в частности, $T = 0$. Отсюда получаем квадратное матричное уравнение для M_2

$$M_2JM_2 = -J \tag{5.4}$$

Однако, по теореме 2, это уравнение противоречиво, поскольку все элементы диагональной матрицы J различны. Случай, когда уравнение лагранжевой плоскости не разрешимо относительно импульсов, рассматривается точно так же, как и при доказательстве теоремы 2.

Теорема 4 допускает обобщение на случай кратных вещественных пар и комплексных четверок собственных значений оператора A при условии, что кратные пары чисто мнимых собственных значений не имеют жордановых клеток. В этом случае условия существования сингулярных лагранжевых плоскостей сводятся к условиям разрешимости матричного уравнения (5.4), которые описаны в теореме 3. Таким образом, нерассмотренным остался случай наличия кратных пар чисто мнимых собственных значений с нетривиальными жордановыми клетками.

Теорема 5. Если система (1.1) вполне неустойчива и собственные числа оператора A простые, то количество различных сингулярных лагранжевых k-мерных плоскостей равно

$$2^{(k+r)/2} \tag{5.5}$$

где r – вещественная степень неустойчивости системы (1.1).

Так как $k = u$ и числа u, r имеют одинаковую четность, то $(k + r)/2$ – целое. Формула (5.5) связывает количество пар вещественных собственных значений оператора A вполне неустойчивой системы с числом пересечений подмногообразий L и S грассманова многообразия G.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда все собственные числа оператора A вещественные: $\pm\lambda_j$, $\lambda_j \neq 0$. В частности, $r = k$. Тогда функция Гамильтона будет суммой частичных гамильтонианов вида (5.1). Линейным каноническим преобразованием эта функция приводится к виду

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{p_j^2 - q_j^2}{2} \tag{5.6}$$

Поскольку $\lambda_j \neq 0$, индекс инерции КФ (5.6) равен, очевидно, k. Ищем лагранжевы сингулярные плоскости в виде $p = Mq$, где M – симметричная $(k \times k)$-матрица, удовлетворяющая матричному уравнению

$$MJM = J, \quad J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \tag{5.7}$$

Оно похоже на уравнение (3.4) и его можно решить тем же способом. Так как среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ нет равных, матрица M будет диагональной: $M = \operatorname{diag}(m_1, \ldots m_k)$. Следовательно, уравнение (5.7) распадается на k независимых соотношений $m_j^2 \lambda_j = \lambda_j$, $1 \leq j \leq k$. Поскольку $\lambda_j \neq 0$, то $m_j = \pm 1$. Таким образом, имеем 2^k различных лагранжевых сингулярных плоскостей

$$\Lambda = \{p, q : p_j = m_j q_j, 1 \leq j \leq k\}$$

Эти плоскости различаются комбинациями знаков в уравнениях $p_j = \pm q_j$.

В общем случае, когда спектр A содержит комплексные четверки, среди частичных гамильтонианов имеются функции вида (5.2). И в этом случае гамильтониан приводится к виду (5.6), однако соответствующее каноническое преобразование будет комплексным.

Сначала применим каноническое преобразование

$$P_1 = (p_1 - ip_2)/\sqrt{2}, \quad Q_1 = (q_1 + iq_2)/\sqrt{2}$$

$$P_2 = (p_1 + ip_2)/\sqrt{2}, \quad Q_2 = (q_1 - iq_2)/\sqrt{2}$$

В новых переменных P, Q частичный гамильтониан (5.2) принимает вид

$$\lambda P_1 Q_1 + \bar{\lambda} P_2 Q_2, \quad \lambda = -a - ib, \quad \bar{\lambda} = -a + ib. \tag{5.8}$$

Далее линейное каноническое преобразование $P, Q \to u, v$ по формулам

$$P_j = (u_j + v_j)/\sqrt{2}, \quad Q_j = (-u_j + v_j)/\sqrt{2}$$

приводит гамильтониан (5.8) к виду (5.6),

$$\lambda(v_1^2 - u_1^2)/2 + \bar{\lambda}(v_2^2 - u_2^2)/2$$

Поскольку среди собственных чисел λ_j нет равных, лагранжевы сингулярные плоскости снова задаются уравнениями вида

$$p = \pm q, \quad v_1 = m_1 u_1, \quad v_2 = m_2 u_2, \quad m_j^2 = 1$$

Однако уравнения $v_1 = u_1$ и $v_2 = -u_2$, а также $v_1 = -u_1$ и $v_2 = u_2$ задают невещественные лагранжевы плоскости. С другой стороны, уравнения $v_j = u_j$ и $v_j = -u_j$ ($j = 1, 2$) задают вещественные лагранжевы сингулярные плоскости $q_1 = q_2 = 0$ и $p_1 = p_2 = 0$ соответственно для системы с частичным гамильтонианом (5.2).

Таким образом, наличие комплексной четверки в спектре оператора A уменьшает вдвое число лагранжевых сингулярных плоскостей. Следовательно, показатель в формуле (5.5) равен $k - (k-2)/2 = (k+2)/2$. Что и требовалось.

Следствие. Если оператор A имеет простые собственные значения, то многообразия S и L либо не пересекаются, либо число их точек пересечения заключено в промежутке $[2^{k/2}, 2^k]$.

Нижняя грань $2^{k/2}$ отвечает случаю, когда все собственные числа объединены в комплексные четверки.

Замечание. Если вполне неустойчивая система имеет равные собственные значения, то число различных сингулярных лагранжевых плоскостей может уменьшиться. Рассмотрим, например, случай, когда $k = 2$ и имеется пара вещественных собственных значений с ненулевой жордановой клеткой. Согласно известному подходу [5], гамильтониан приводится к виду $-a(p_1 q_1 + p_2 q_2) + p_1 q_2$. Можно показать, что здесь имеются только три лагранжевы сингулярные плоскости

$$p_1 = p_2 = 0, \quad q_1 = q_2 = 0, \quad p_1 = q_2 = 0$$

6. Решения квадратного матричного уравнения. Найдем условия разрешимости уравнения (1.5) относительно симметричной матрицы D. Положим $P = -M^2$, где $M = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, причем все $\mu_j > 0$. Будем искать решения в виде степенного ряда по параметру ε, заменяя Γ на $\varepsilon\Gamma$, и затем положим $\varepsilon = 1$. Итак,

$$D = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \ldots \tag{6.1}$$

где коэффициенты D_j, $j \geq 1$ последовательно находятся из рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} D_0 D_1 + D_1 D_0 + (\Gamma D_0 - D_0 \Gamma)/2 = 0 \\ D_0 D_2 + D_2 D_0 + D_1 + (\Gamma D_1 - D_1 \Gamma)/2 - \Gamma^2/4 = 0 \\ D_0 D_3 + D_3 D_0 + D_1 D_2 + D_2 D_1 + (\Gamma D_2 - D_2 \Gamma)/2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{6.2}$$

Невозмущенная матрица D_0 удовлетворяет простому матричному уравнению $D_0^2 = M^2$. Оно имеет 2^k различных решений: $D_0 = \operatorname{diag}(\pm\mu_1, \ldots, \pm\mu_k)$. Решения различаются комбинациями знаков диагональных элементов. Это простое наблюдение соответствует заключению теоремы 5: в отсутствие гироскопических сил все собственные значения системы (1.3) вещественны, если $P < 0$.

Итак, пусть $D_0 = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_k)$, причем $d_j = \pm\mu_j$.

Лемма 1. Если $d_i + d_j \neq 0$ для всех $1 \le i, j \le k$, то уравнение $D_0X + XD_0 = Y$ разрешимо относительно X в классе симметричных матриц, причем

$$\|X\| \le c\|Y\|, \quad c \le \max|d_i + d_j|^{-1} \tag{6.3}$$

где $\|\cdot\|$ – любая матричная норма.

Действительно, если $Y = \|y_{ij}\|$ и $X = \|x_{ij}\|$, то

$$x_{ij} = y_{ij}/(d_i + d_j)$$

Отметим, что условие леммы заведомо выполнено, если среди чисел $\mu_1, \ldots, \mu_k$ нет равных. Оно также справедливо в случаях, когда $D_0 = M$ или $D_0 = -M$.

Лемма 1 гарантирует разрешимость цепочки соотношений (6.2) относительно D_1, $D_2\ldots$. Пусть D_1 – решение первого уравнения цепочки (6.2). Положим

$$\|D_1 - \Gamma/2\| = d^-, \quad \|D_1 + \Gamma/2\| = d^+, \quad 2d = d^+ + d^-$$

Остальные уравнения этой цепочки можно представить в виде

$$\begin{aligned} &D_0D_2 + D_2D_0 + (D_1 + \Gamma/2)(D_1 - \Gamma/2) = 0 \\ &D_0D_3 + D_3D_0 + (D_1 + \Gamma/2)D_2 + D_2(D_1 - \Gamma/2) = 0 \\ &D_0D_4 + D_4D_0 + D_2^2 + (D_1 + \Gamma/2)D_3 + D_3(D_1 - \Gamma/2) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6.4}$$

Отсюда получаем последовательно

$$\|D_2\| \le cd^+d^- \le c(d^+ + d^-)^2/4 = cd^2$$

$$\|D_3\| \le c\|D_2\|(d^+ + d^-) \le 2c^2d^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\|D_m\| \le \kappa_m c^{m-1} d^m$$

Укажем рекуррентное правило для вычисления коэффициентов κ_m, $m \ge 1$:

$$\begin{aligned} &\kappa_2 = 1, \quad k_3 = 2, \quad \kappa_4 = \kappa_2^2 + 2\kappa_3, \quad \kappa_5 = 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_4 \\ &\kappa_6 = \kappa_2^2 + 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_5, \ldots \end{aligned} \tag{6.5}$$

Введем функцию

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \kappa_m z^m, \quad \kappa_1 = 1 \tag{6.6}$$

Лемма 2. Функция f удовлетворяет уравнению $f^2 = f - z$.

Доказательство сразу вытекает из формул (6.5).

Таким образом,

$$g(z) = [1 - (1 - 4z)^{1/2}]/2$$

и, следовательно, радиус сходимости степенного ряда (6.6) равен 1/4. Отсюда вытекает, что при $\varepsilon = 1$ исходный ряд (6.1) сходится, если

$$cd < 1/4 \tag{6.7}$$

В действительности имеется 2^k условий (6.7) (по числу решений начального матричного уравнения $D_0^2 = -P$). Каждое из них заведомо выполнено, если норма $\|\Gamma\|$ мала. Действительно, согласно первому уравнению (6.2) и лемме 1, норма $\|D_1\|$ мала вместе с $\|\Gamma\|$. Далее $d^{\pm} \le \|D_1\| + \|\Gamma\|/2$. Значит, $d = (d^+ + d^-)/2 \to 0$, если $\|\Gamma\| \to 0$.

Теорема 6. Предположим, что среди чисел $\mu_1, \ldots, \mu_k$ нет равных и выполнены все 2^k условий (6.7). Тогда все собственные числа линейной системы (1.3) вещественные.

Доказательство. Снова заменим Γ на $\varepsilon\Gamma$ и предположим, что параметр ε изменяется на отрезке [0, 1]. Тогда коэффициенты характеристического уравнения

$$\left|\lambda^2 E + \lambda\varepsilon\Gamma + P\right| = 0 \tag{6.8}$$

будут аналитическими функциями от параметра ε. Сначала заметим, что для почти всех $\varepsilon \in [0, 1]$ (кроме, быть может, конечного числа) все корни характеристического многочлена простые.

Действительно, дискриминант характеристического многочлена (6.8) – целая функция от его коэффициентов. Следовательно, дискриминант будет аналитической функцией от вещественного параметра ε, которая отлична от нуля при $\varepsilon = 0$ (так как в отсутствие гироскопических сил корни уравнения (6.8) – различные вещественные пары μ_j). Следовательно, дискриминант может обращаться в нуль лишь в конечном числе точек отрезка [0, 1].

Далее, согласно условиям (6.7), 2^k решений матричного уравнения (1.5) (в котором Γ заменено на $\varepsilon\Gamma$) – аналитические матричные функции от ε на отрезке [0, 1]. Эти функции попарно не совпадают, так как при $\varepsilon = 0$ их значения равны 2^k различным решениям матричного уравнения $D_0^2 = M^2$. Следовательно, для почти всех $\varepsilon \in [0, 1]$ уравнение (1.5) допускает ровно 2^k различных решений в виде симметричных $(k \times k)$-матриц.

Объединяя сказанное и применяя теоремы 4 и 5, получаем, что для почти всех ε все корни характеристического уравнения (6.8) разбиваются на k различных вещественных пар. Так как эти корни непрерывно зависят от параметра ε, то при $\varepsilon = 1$ они обязательно останутся вещественными.

Пример. Оказывается, комплексные четверки собственных чисел у систем с гироскопическими силами (1.3) встречаются уже при $k = 2$. Положим

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Pi = \begin{Vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{Vmatrix}, \quad a > b > 0$$

Если $\gamma = 0$, то имеются две вещественные пары $\pm\sqrt{a}$, $\pm\sqrt{b}$ собственных значений. При увеличении $|\gamma|$ они начинают двигаться навстречу друг другу и сливаются в точках $\pm(ab)^1/_4$, когда $|\gamma| = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Далее они сходят с вещественной оси и при $\sqrt{a}$ – – $\sqrt{b} < |\gamma| < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ имеется комплексная четверка собственных значений. Когда $|\gamma| = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, собственные значения сталкиваются в точках $\pm i(ab)^{1/4}$ мнимой оси. При дальнейшем увеличении $|\gamma|$ они расходятся вдоль мнимой оси и равновесие становится устойчивым.

Укажем границу вещественности собственных значений, которую дают неравенства (6.7). Положим

$$D_0 = \operatorname{diag}(\pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{b})$$

Тогда

$$D_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & \mp\dfrac{\gamma(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\ \mp\dfrac{\gamma(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})} & 0 \end{matrix} \right\|, \quad c = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \tag{6.9}$$

и, следовательно,

$$d = d^{\pm} = |\gamma|\sqrt{a}/(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

Таким образом, неравенство (6.7) дает достаточное условие вещественности

$$|\gamma| < (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2/(4\sqrt{a}) \tag{6.10}$$

Ясно, что правая часть этого неравенства не превосходит $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, если $a \geq b$.

Отметим, что если считать выполненным равенство (6.9), то неравенство (6.7) дает условие

$$|\gamma| < (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2/(4\sqrt{a}) \tag{6.11}$$

которое включает условие (6.10). Однако, по теореме 6, интервал вещественности собственных значений сводится к пересечению интервалов (6.10) и (6.11). Согласно теореме 1, неравенство (6.10) – достаточно условие отсутствия сильной устойчивости равновесия системы (1.3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01059) и в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-136.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
2. *Арнольд В.И.* Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 5. С. 975–978.
3. *Berger M.* Géométrie. Paris: CEDIC. 1977, 1978 = *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 1, 559 с.; Т. 2, 366 с.
4. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1998. 238 с.
5. *Williamson J.* On an algebraic problem, concerning the normal forms of linear dynamical systems // Amer. J. Math. 1936. V. 58. № 1. P. 141–163.

Москва
e-mail: kozlov@pran.ru

Поступила в редакцию
24.VI.2003