

УДК 531.539

© 2004 г. Э. В. Теодорович

МЕТОД РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

“Ренормгруппа? Это очень просто”.

Н.Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, “Природа”, 1984, № 8

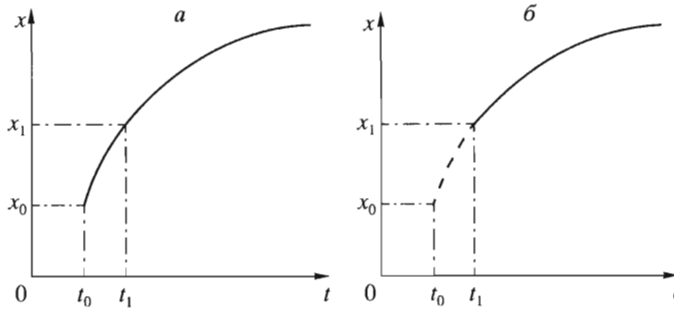
В обзоре излагаются основополагающие идеи метода ренормализационной группы (РГ). В частности, объясняется понятие ренормализационной инвариантности, следствием которой является функциональное и дифференциальное уравнение РГ. Излагаются способы решения дифференциального уравнения РГ, а также некоторые технические аспекты метода РГ, такие, как метод ϵ -разложения. Приведенные примеры, относящиеся к рассмотрению различных проблем механики, служат для иллюстрации метода РГ и должны способствовать лучшему его пониманию.

При построении решений сложных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных большую помощь могут оказать соображения симметрии. Если уравнения, а также начальные и граничные условия задачи инвариантны относительно некоторой группы преобразований, то решение должно строиться в терминах инвариантов этой группы – автомодельных переменных. Использование автомодельных переменных позволяет понизить порядок уравнения, а в ряде случаев перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Заложенный работами Софуса Ли метод нахождения групп симметрии дифференциальных уравнений и построения инвариантных решений путем перехода к автомодельным переменным в настоящее время достаточно хорошо разработан [1, 2].

Однако существует некоторая дополнительная группа преобразований симметрии, не связанная непосредственно с формой дифференциальных уравнений, а вытекающая из произвола в способе задания начальных и граничных условий задачи. Совокупность оставляющих инвариантным решение задачи преобразований, описывающих переход от одного способа задания начальных или граничных условий к другому, образует группу симметрии, называемую ренормализационной группой (РГ) или сокращенно – ренормгруппой, а применение РГ для построения решений дифференциальных уравнений называется методом РГ. Во многих случаях применение метода РГ дает тривиальные результаты. Однако в случае нелинейных многомодовых систем, когда моды всех масштабов одинаково существенны для понимания происходящих явлений, методы классической механики и математической физики, в которых обычно рассматривается конечное число взаимодействующих мод, оказываются бессильными. В этом случае метод РГ представляет собой мощный математический инструмент описание подобных систем. В ряде случаев описываемое тот ли иной физический процесс уравнение может оказаться неизвестным, и требование ренормализационной инвариантности способно заменить это недостающее уравнение.

Первоначально метод РГ возник в квантовой теории поля, и свойство ренормгрупповой инвариантности оказалось связанным с неоднозначностью процедуры перенормировок, используемой для устранения расходимостей в рамках теории возмущений [3]. Затем этот метод получил новое развитие в работах Вилсона и был успешно применен для описания критических явлений при фазовых переходах второго рода [4, 5].

Автор поставил перед собой цель в максимально простой форме изложить для широкого круга исследователей, работающих в области прикладной математики и механики, сущность и характерные черты метода на основе простых и наглядных примеров, не обращаясь к квантовой теории поля и теории критических явлений. В силу указанного характера данного обзо-



Фиг. 1

ра ссылки даются в основном не на оригинальные работы, а на обзоры и учебники. Приведенные примеры описания различных механических процессов носят иллюстративный характер и в значительной степени основаны на работах автора.

1. Ренормгрупповая инвариантность. Для первоначального ознакомления с понятием ренормгрупповой инвариантности (РГ-инвариантности) рассмотрим несколько простых примеров, которые назовем тривиальными. Смысл термина “тривиальный” будет пояснен несколько позднее.

1°. Пусть задано некоторое дифференциальное уравнение

$$dx/dt = V(x) \quad (1.1)$$

которое может быть интерпретировано как уравнение траекторий материальной точки, движущейся в заданном стационарном поле скоростей.

Однозначное решение этого уравнения определяется двумя числовыми параметрами – заданием начального момента времени t_0 и начального значения координаты x_0 (фиг. 1,а). В силу инвариантности уравнения относительно сдвига времени решение будет зависеть только от разности времен

$$x(t) = X(t - t_0; x_0) \quad (1.2)$$

и функция $X(t - t_0; x_0)$ удовлетворяет вытекающему из начального условия соотношению

$$X(0; x_0) = x_0 \quad (1.3)$$

Если в качестве начального момента времени выбрать некоторый момент t_1 и в качестве начального значения выбрать соответствующую этому значению точку на траектории движения (см. фиг. 1,б), т.е.

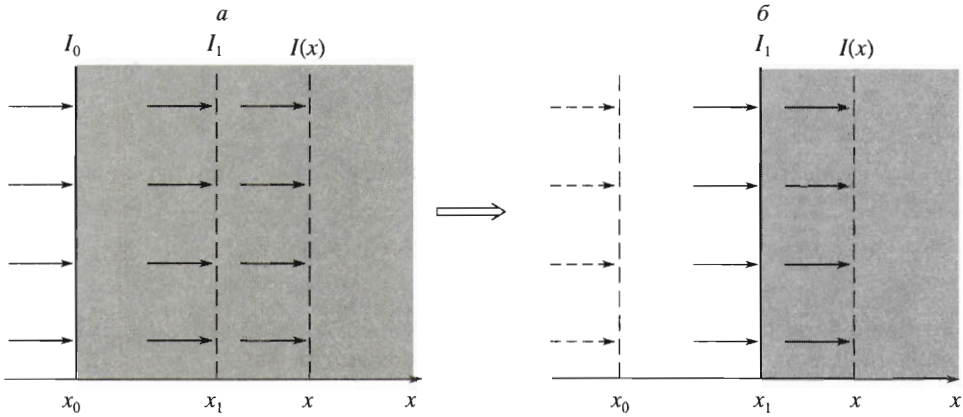
$$x_1 = X(t_1 - t_0; x_0) \quad (1.4)$$

то форма траектории при $t \geq t_1$ не изменится, и решение может быть представлено в виде

$$x(t) = X(t - t_1; x_1) = X(t - t_0; x_0) \quad (1.5)$$

Таким образом, решение уравнения (1.1) обязано удовлетворять некоторому функциональному соотношению, вытекающему из свойства независимости траектории движения от выбора начальной точки на этой траектории, т.е. от способа задания начальных условий. В соответствии с равенствами (1.4), (1.5) это соотношение при $t_0 = 0$ и $t_1 = \tau$ имеет вид

$$X(t; x_0) = X(t - \tau; X(\tau; x_0)) \quad (1.6)$$



Фиг. 2

Если рассматривается уравнение движения второго порядка

$$d^2x/dt^2 = F(x) \tag{1.7}$$

то решение этого уравнения зависит от трех числовых параметров $x_0, v_0 = dx(t)/dt|_{t=t_0}, t_0$, определяющих начальные условия задачи, т.е.

$$x(t) = X(t - t_0; x_0, v_0) \tag{1.8}$$

и соответственно для скорости будем иметь

$$v(t) = dx/dt = V(t - t_0; x_0, v_0) \tag{1.9}$$

При этом

$$X(0; x_0, v_0) = x_0, \quad V(0; x_0, v_0) = v_0 \tag{1.10}$$

Независимость вида траектории от способа задания начальных условий (наличие произвола при выборе начала траектории) приводит в случае уравнения второго порядка к двум функциональным уравнениям

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t; x_0, v_0) = X(t - \tau; X(\tau; x_0, v_0), V(\tau; x_0, v_0)) \\ v(t) &= V(t; x_0, v_0) = V(t - \tau; X(\tau; x_0, v_0), V(\tau; x_0, v_0)) \end{aligned} \tag{1.11}$$

удовлетворяющих условиям (1.10)

Обратим внимание на то обстоятельство, что функциональные уравнения (1.6), (1.11) не зависят от вида функций $V(x)$ в (1.1) и $F(x)$ в (1.7), т.е. представляют свойства решений уравнений, принадлежащих к некоторому определенному классу.

2°. В качестве второго тривиального примера рассмотрим плоскую задачу переноса излучения в однородной поглощающей среде [6]. Пусть на границу, имеющую координату x_0 , падает излучение с интенсивностью I_0 (см. фиг. 2,а). При распространении излучения в среде его интенсивность изменяется по некоторому закону

$$I(x) = f(x - x_0; I_0) \tag{1.12}$$

и в точке x_1 интенсивность будет иметь значение

$$I_1 = f(x_1 - x_0; I_0) \tag{1.13}$$

В соответствии с принципом В.А. Амбарцумяна при $x > x_1$ можно принять, что на расположенную в точке x_1 границу падает излучение интенсивности I_1 (фиг. 2,б), при этом интенсивность в точке $x > x_1$ будет определяться соотношением

$$f(x - x_0; I_0) = f(x - x_1; I_1) \quad (1.14)$$

Использование соотношений (1.13), (1.14) приводит к тому, что функция f должна удовлетворять функциональному уравнению

$$f(x - x_0; I_0) = f(x - x_1; f(x_1 - x_0; I_0)) \quad (1.15)$$

совпадающему с полученным выше уравнением (1.6).

3°. Еще одним примером, иллюстрирующим свойство РГ инвариантности, является решение начальной задачи Коши для уравнения диффузии

$$[\partial_t - \kappa \Delta]C(\mathbf{r}, t) = 0, \quad C(\mathbf{r}, t_0) = \varphi_0(\mathbf{r}) \quad (1.16)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в форме интеграла Дюамеля

$$C(\mathbf{r}, t) = \int D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) \varphi_0(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 \quad (1.17)$$

где функция $D(\mathbf{r}, t)$ – решение уравнения диффузии (1.16), удовлетворяющее начальному условию $D(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r})$. Она связана с функцией Грина уравнения диффузии соотношением $G(\mathbf{r}, t) = H(t)D(\mathbf{r}, t)$, ($H(t)$ – функция Хевисайда). В момент времени t_1 имеем

$$C(\mathbf{r}, t_1) = \int D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t_1 - t_0) \varphi_0(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 = \varphi_1(\mathbf{r}) \quad (1.18)$$

При $t > t_1$ можно рассматривать задачу Коши для начального момента времени t_1 при начальном условии (1.18).

Снова записывая решение в форме интеграла Дюамеля, получим с учетом соотношения (1.18)

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}, t) &= \int D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) \varphi_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = \\ &= \int D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, t_1 - t_0) \varphi_0(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_0, \quad t > t_1 > t_0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Сопоставляя выражения (1.16) и (1.19), найдем

$$D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) = \int D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, t_1 - t_0) d\mathbf{r}_1, \quad t > t_1 > t_0 \quad (1.20)$$

Решение уравнения (1.16) в d -мерном случае дает

$$D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) = \frac{1}{\pi^{d/2} R(t - t_0)^d} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{R(t)} \right\}, \quad R^2(t) = 4\kappa(t - t_0) \quad (1.21)$$

Прямой расчетом (см., например, [7]) можно убедиться, что функция (1.21) удовлетворяет соотношению (1.20), называемому полугрупповым свойством.

Функция $D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0)$ может быть интерпретирована как вероятность обнаружения броуновской частицы в точке \mathbf{r} в момент времени t при условии, что в начальный момент времени t_0 она находилась в точке \mathbf{r}_0 (так называемая условная или переходная вероятность). При такой интерпретации соотношение (1.20) представляет собой не что иное, как уравнение Эйнштейна–Смолуховского–Колмогорова–Чепмена [8]. Это уравнение отражает марковский характер процесса случайного блуждания броуновской частицы, заключающийся в том, что поведение случайного мар-

ковского процесса после момента t при заданном распределении в момент t не зависит от его поведения в прошлом (до момента t). Отметим, что при выводе соотношения (1.20) фактически уравнение диффузии в явном виде не использовалось, а была только использована возможность записи решения в форме интеграла Дюамеля. Пользуясь стандартными методами [8], из уравнения (1.20) можно получить два дифференциальных уравнения для функции $D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0)$, называемых прямым и обратным уравнениями Колмогорова, частный случай которых – уравнение диффузии.

Во всех рассмотренных выше примерах мы имели дело со свойством независимости функциональной формы решения от способа задания начальных или граничных условий. Это свойство получило название функциональной автомодельности [9], оно является обобщением свойства масштабного подобия и связанного с этим подобием метода размерного анализа.

В отличие от свойства масштабного подобия, заключающегося в неизменности формы решения при растяжении координат (изменении масштаба), при функциональной автомодельности форма решения неизменна при растяжении координат (или сдвиге их начала) и соответствующем изменении (перенормировке) некоторых числовых параметров задачи. В этом смысле, например, все эллипсы функционально подобны, поскольку они различаются значением масштаба (размером главной полуоси) и числового параметра (эксцентриситета).

В рассмотренных выше случаях условие функциональной автомодельности заключается в неизменности (инвариантности) формы решения при преобразовании (сдвиге) аргумента t или x и некоторого числового параметра g (такими параметрами были x_0 и I_0 в примерах 1° и 2°, а в примере 3° в качестве такого параметра фигурирует ширина начального распределения $R(t_0)$).

Операция совместного преобразования координат (сдвига или растяжения) и перенормировки числового параметра, при которых форма решения сохраняется, может быть представлена в виде

$$t \Rightarrow t_1 = t - \tau, \quad g \Rightarrow g_1 = f(\tau, g) \tag{1.22}$$

Преобразования (1.22) удовлетворяют групповому закону композиции, согласно которому последовательное выполнение двух преобразований с групповыми параметрами τ_1, τ_2 представляет собой преобразование того же вида с параметром $\tau_1 + \tau_2$. Этот закон следует из функционального уравнения (1.6)

$$g_2 = f(\tau_1 + \tau_2, g) = f(\tau_2, f(\tau_1, g)) \equiv f(\tau_2, g_1) \tag{1.23}$$

Совокупность преобразований (1.22) образует однопараметрическую непрерывную группу, при этом тождественному элементу группы соответствует преобразование с групповым параметром $\tau = 0$, а обратному – с параметром $(-\tau)$. Эта группа преобразований, включающая сдвиг аргумента и согласованное с ним изменение (перенормировку) числового параметра или системы параметров, образует ренормализационную группу. Для широкого класса моделей физических систем описывающие их поведение уравнения обладают инвариантностью относительно РГ преобразований [9, 10].

Более часто используется формулировка не с аддитивным законом преобразования группового параметра, а с мультипликативным. Для перехода к мультипликативной формулировке выполним замену переменных $t = \ln x, \tau = \ln \lambda$ и введем обозначение $f(\ln x, g) = F(x, g)$. Тогда уравнение (1.6) запишется в форме

$$F(x, g) = F(x/\lambda, F(\lambda, g)) \tag{1.24}$$

При мультипликативном варианте совокупность РГ преобразований будет содержать операцию растяжения (изменения масштаба) и преобразование числового параметра

$$x \Rightarrow x' = x/\lambda, \quad g \Rightarrow g' = F(\lambda, g), \quad F(1, g) = g \tag{1.25}$$

Обобщением преобразования (1.25) на случай, когда в задаче имеется некоторый дополнительный параметр с размерностью длины, будет преобразование

$$x \Rightarrow x' = x/\lambda, \quad y \Rightarrow y' = y/\lambda, \quad g \Rightarrow g' = F(\lambda, y, g) \quad (1.26)$$

При этом функция $F(x, y, g)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(x, y, g) = F(x/\lambda, y/\lambda, F(\lambda, y, g)), \quad F(1, y, g) = g \quad (1.27)$$

Из функционального уравнения (1.27) можно найти дифференциальное уравнение для функции $F(x, y, g)$. Если продифференцировать (1.27) по λ и затем положить $\lambda = 1$, то получим дифференциальное уравнение РГ (компенсационное уравнение Овсянникова [3], в западной литературе называемое также уравнением Каллана–Симанчика)

$$\left\{ -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} F(x, y, g) = 0 \quad (1.28)$$

где функция $\beta(y, g)$ (называемая РГ-функцией, функцией Гелл-Манна и Лоу [11], функцией Вилсона [4]) определена соотношением

$$\beta(y, g) = \partial F(x, y, g) / \partial x |_{x=1} \quad (1.29)$$

При аддитивном варианте дифференциальное уравнение РГ получается из уравнения (1.6) и имеет вид

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} f(t, g) = 0; \quad \beta(g) = \partial f(t, g) / \partial t |_{t=0} \quad (1.30)$$

Если продифференцировать уравнение (1.6) по τ и затем положить $\tau = t$, то с учетом соотношения (1.3) получим уравнение другого типа – так называемое эволюционное уравнение РГ Боголюбова–Ширкова

$$\partial f(\tau, x_0) / \partial \tau = \beta[f(\tau, x_0)] \quad (1.31)$$

которое можно рассматривать как уравнение движения безынерционной частицы с координатой $X(\tau) = f(\tau, x_0)$ в заданном неоднородном стационарном потоке $\beta(X)$ (см. уравнение (1.1)).

2. Обсуждение рассмотренных примеров. При заданной функции $\beta(g)$ решение дифференциального уравнения (1.30) позволяет получить вид функции $f(t, g)$. Решение находится методом характеристик, при этом соответствующее уравнение для характеристики имеет вид

$$-\frac{dt}{1} = \frac{dg}{\beta(g)} \quad (2.1)$$

Если положить $g = x$, $\beta = -V(x)$, то приходим к исходному дифференциальному уравнению задачи (1.1). Таким образом, в примере 1° использование соображений РГ инвариантности (функциональной автомодельности) не дает новой информации о системе и в этом смысле рассмотренные выше примеры 1° и 3° тривиальны. В примере 2° уравнение для интенсивности вообще не фигурировало, а использовался только “принцип Амбарцумяна”. В данном случае уравнение для характеристики (2.1) показывает, каким может быть это неизвестное уравнение – оказывается, что оно должно быть дифференциальным уравнением первого порядка вида

$$dI/dx = -\beta(I)$$

Фактически и в примере 3° вид уравнения для концентрации не использовался при получении функционального уравнения (1.20), а использовалось только соотношение Эйнштейна–Смолуховского–Колмогорова–Чепмена, отражающее марковский характер диффузионного случайного процесса. В этой задаче уравнение для характеристики дифференциального уравнения РГ будет соответствовать обратному уравнению Колмогорова теории случайных процессов. Общность всех рассмотренных примеров состоит в том, что в них эволюция по временной или пространственной переменной описывается *дифференциальным уравнением*.

Использование дифференциального уравнения означает, что временная (или пространственная) производная определяется состоянием в данный момент времени (или в данной точке пространства) и не зависит от состояния системы в предшествующие моменты времени (предыстории процесса). Такие эволюционные процессы называются марковскими. При марковском процессе эволюции на конечном интервале может рассматриваться как последовательность эволюций на всех промежуточных этапах, и решение представимо в виде интеграла по времени от начального момента времени до конечного. Аналогичным образом при рассмотрении “пространственной эволюции” (пример 2°) переход от одной точки к другой осуществляется в виде последовательности переходов от данной точки к ближайшей соседней через все промежуточные точки. Такие процессы можно условно называть марковскими в обобщенном смысле. Примером подобного процесса может быть рассмотрение эволюции волнового фронта на основе принципа Гюйгенса–Френеля в теории распространения волн в пространстве нечетного числа измерений или описание каскадного процесса переноса энергии по спектру волновых чисел в теории развитой турбулентности.

3. Нетривиальные примеры ренормгрупповой инвариантности. В приведенных выше примерах уравнения характеристик дифференциального уравнения РГ оказались совпадающими с исходными уравнениями задачи, и в этом смысле данные примеры были названы тривиальными. Нетривиальны случаи, когда уравнение РГ или уравнение характеристик не совпадает с исходными уравнениями системы, или эти уравнения вообще неизвестны. В основном эти случаи связаны с исследованием эволюции в пространстве масштабов.

В качестве такого примера приведем исследование влияния экранирования на эффективный заряд в диэлектрической среде. Этот подход впервые был использован в применении к квантовой электродинамике, где роль диэлектрической среды играет физический вакуум [11].

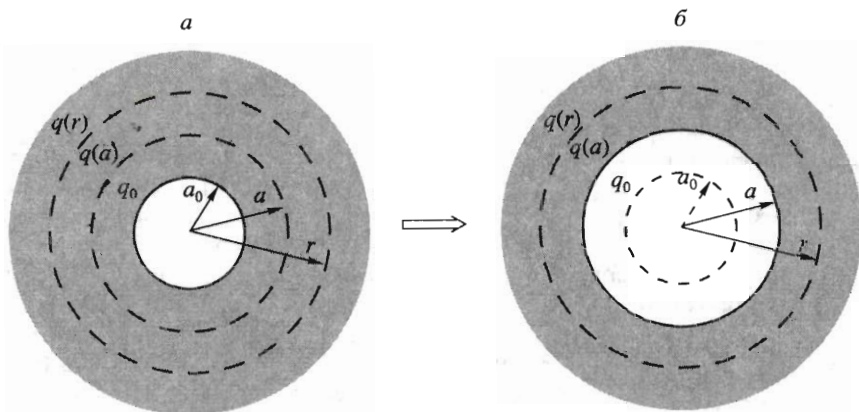
При помещении распределенного внутри сферы радиуса a_0 заряда величины q_0 в диэлектрическую среду в ней за счет эффектов поляризации возникает экранирующий заряд, в результате чего расположенный внутри сферы радиуса $r > a_0$ заряд q будет равен сумме исходного заряда q_0 и экранирующего заряда противоположного знака, т.е. $q(r) = q_0 + \delta q$ (фиг. 3,а). Суммарный эффективный заряд будет некоторой функцией от величины исходного заряда q_0 , радиуса исходного заряда a_0 и других характерных параметров задачи L , имеющих размерность длины,

$$q(r) = f(r; L, a_0, q_0), \quad f(a_0; L, a_0, q_0) = q_0 \quad (3.1)$$

Суммарный заряд, расположенный внутри сферы радиуса $a > a_0$, будет в соответствии с формулой (3.1) определяться соотношением

$$q(a) = f(a; L, a_0, q_0)$$

Однако если взять расположенный внутри сферы радиуса a заряд $q(a)$ (перенормированный заряд) и поместить его в диэлектрическую среду (фиг. 3,б), то в области $r > a$ он будет создавать такое же поле, как и заряд q_0 , расположенный внутри сферы



Фиг. 3

радиуса a_0 , и вследствие этого для результирующего заряда $q(r)$ должно иметь место соотношение

$$q(r) = f(r; L, a_0, q_0) = f(r; L, a, q(a)) = f(r; L, a, f(a; L, a_0, q_0)) \quad (3.2)$$

Используя соображения размерности, представим $q(r)$ в виде

$$q(r) = q_0 \Phi\left(\frac{r}{a_0}, \frac{L}{a_0}, \frac{q(a_0)}{q_0}\right) = q_0 \Phi\left(\frac{r}{a}, \frac{L}{a}, \frac{q(a)}{q_0}\right) \quad (3.3)$$

Из соотношения $q(a) = q_0 \Phi(r/a, L/a, q(a)/q_0)|_{r=a}$ следует, что функция $\Phi(x, y, g)$ должна подчиняться "условию нормировки" $\Phi(1, y, g) = g$.

Тем самым оказывается, что функция $\Phi(x, y, g)$ должна удовлетворять функциональному уравнению РГ

$$\Phi(x, y, g) = \Phi(x/\lambda, y/\lambda, \Phi(\lambda, y, g)) \quad (3.4)$$

совпадающему с (1.6), (1.15).

Функциональная автомодельность в данном случае выражает неизменность вида функции, определяющей зависимость величины экранированного заряда, от выбора положения границы (радиуса сферы) при соответствующем задании значения функции на границе (перенормированного заряда внутри сферы). Если входящий в функциональное уравнение (3.4) произвольный радиус a выбрать в качестве единицы масштаба, будем иметь уравнение, описывающее эволюцию экранированного (эффективного) заряда в пространстве масштабов. Уравнение (3.4) и следующее из него дифференциальное уравнение РГ не **совпадает с исходной** системой уравнений макроскопической электродинамики, и в этом смысле рассмотренный пример нетривиален.

Если исходя из соображений размерности, принять $dq/dr = -q/L$, то решение уравнения РГ (см. ниже) будет иметь вид

$$q(r) = q_0 \exp(-(r - a_0)/L) = q(a) \exp(-(r - a)/L)$$

Выполнение условий РГ инвариантности (3.2) очевидно.

Второй пример относится к задаче подсеточного моделирования в теории турбулентности. Согласно современным представлениям [12] реализующееся при больших числах Рейнольдса состояние развитой турбулентности характеризуется возбуждением очень большого числа (порядка $Re^{9/4}$) мод различных масштабов. При стационарном режиме подкачка энергии к системе осуществляется в области круп-

ных масштабов, эта энергия передается путем каскадной последовательности взаимодействий мод близких масштабов в область все более мелких масштабов (перенос энергии по спектру волновых чисел) и в дальнейшем диссипирует в мелкомасштабной области за счет молекулярной вязкости. При прямом численном моделировании развитой турбулентности мощности современных компьютеров оказываются недостаточными для описания всех определяющих турбулентный режим масштабов, и часть масштабов оказывается вне пределов разрешимости конечно-разностной сетки, т.е. мелкомасштабные (подсеточные) моды оказываются неучтенными. Однако подсеточные моды нельзя просто отбросить, поскольку они определяют сток турбулентной энергии, обеспечивающий существование стационарного неравновесного режима. Таким образом, возникает задача прямого численного моделирования крупномасштабных (надсеточных) мод с учетом усредненного влияния подсеточных мод (использование ячейки конечных размеров соответствует усреднению по объему ячейки). Это усредненное влияние моделируется введением зависящей от масштаба сетки подсеточной вязкости, подобно тому как усредненное влияние молекулярных движений учитывается с помощью эмпирически определяемых коэффициентов переноса. Вид зависимости подсеточной вязкости от масштаба сетки $a = 2\pi/\Lambda$ неизвестен, но он может быть определен на основе соображений ренормализационной инвариантности [13].

В обсуждаемой проблеме численного моделирования крупномасштабных процессов свойство ренормализационной инвариантности заключается в естественном требовании независимости поведения решения в крупномасштабной области от масштаба сетки при соответствующем выборе зависимости коэффициента подсеточной вязкости от масштаба. Если $F(k, \omega, L; v, \Lambda)$ – некоторая функция, описывающая поведение системы, то должно удовлетворяться соотношение

$$F(k, \omega, L; v, \Lambda) = F(k, \omega, L; v_1, \Lambda_1) \tag{3.5}$$

$$v_1 = f(v, L, \Lambda, \Lambda_1), \quad f(v, L, \Lambda, \Lambda) = v$$

где L – набор характерных числовых параметров задачи (в теории турбулентности Колмогорова таким единственным параметром в инерционном интервале спектра является скорость диссипации энергии). Дифференцируя равенство (3.5) по Λ_1 и положим затем $\Lambda_1 = \Lambda$, получим дифференциальное уравнение РГ

$$dF/d\Lambda = [\partial/\partial\Lambda + \beta(v, L, \Lambda)\partial/\partial v]F(k, \omega, L; v, \Lambda) = 0 \tag{3.6}$$

$$\beta(v, L, \Lambda) = \partial f(v, L, \Lambda, \Lambda_1)/\partial\Lambda_1|_{\Lambda_1 = \Lambda}$$

Отсюда следует, что решение уравнения (3.6) должно лежать на характеристике, удовлетворяющей уравнению

$$dv/d\Lambda = \beta(v, L, \Lambda) \tag{3.7}$$

Функция $\beta(v, L, \Lambda)$ может быть определена путем расчета вклада в подсеточную вязкость δv мод из узкого интервала $\delta\Lambda$ пространства волновых чисел, для расчета этой величины достаточно учесть небольшое число мод. Знание $\beta(v, L, \Lambda)$ позволяет найти зависимость подсеточной вязкости от масштаба сетки путем решения уравнения для характеристики.

4. Решение уравнений ренормгруппы. Для нахождения решения уравнения РГ (1.32) необходимо знать РГ-функцию $\beta(v, g)$. Вид этой функции согласно соотношению (1.33) определяется поведением решения в окрестности точки $x = 1$ (точки нормировки). Тем самым с помощью требования РГ инвариантности на основе знания поведения функции в ограниченной области удается найти ее поведение во всей области определения. Здесь уместно привести аналогию с теорией непрерывных групп Ли, когда

знание операторов инфинитезимальных преобразований (генераторов группы) позволяет построить операторы конечных преобразований на основании требования выполнения группового закона композиции. В частности, это утверждение можно проиллюстрировать на примере группы операторов трансляционных преобразований

$$\hat{T}(a)f(x) = f(x+a), \quad \hat{T}(0) = \hat{I} \quad (4.1)$$

Оператор бесконечно малых трансляций может быть легко построен

$$\hat{T}(\delta a)f(x) = f(x+\delta a) = f(x) + \delta a df(x)/dx = [\hat{I} + \delta a \hat{p}]f(x) \quad (4.2)$$

$\hat{p} = d/dx$ – инфинитезимальный оператор (генератор группы трансляций).

Из группового закона композиции

$$\hat{T}(a+a_1) = \hat{T}(a)\hat{T}(a_1) \quad (4.3)$$

положив $a_1 = \delta a$ и воспользовавшись равенством (4.2), найдем уравнение

$$\delta \hat{T}(a)/\delta a = \hat{p}\hat{T}(a) \quad (4.4)$$

решение которого имеет вид

$$\hat{T}(a) = \exp(a\hat{p}) \quad (4.5)$$

Если принять $a = \sum_i \delta a_i$, то

$$\hat{T}(a) = \prod_i \hat{T}(\delta a_i) \quad (4.6)$$

Таким образом, знание оператора инфинитезимальных преобразований позволяет найти оператор конечных преобразований как последовательность операторов бесконечно малых преобразований.

Аналогичное рассмотрение для оператора растяжения координат (масштабного преобразования), определенного соотношением

$$\hat{L}(\lambda)f(x) = f(\lambda x), \quad \hat{L}(1) = \hat{I}$$

с использованием группового свойства $\hat{L}(\lambda)\hat{L}(\lambda_1) = \hat{L}(\lambda\lambda_1)$ и вида оператора инфинитезимальных преобразований $\hat{p} = xd/dx$ дает

$$\hat{L}(\lambda) = \lambda^{xd/dx}$$

В рассматриваемом случае РГ преобразований (1.25) роль инфинитезимального оператора играет РГ-функция, определяемая согласно соотношению (1.33) поведением системы вблизи точки нормировки $x = 1$, а поведение системы во всей области задания определяется последовательностью операций инфинитезимальных преобразований, находимой путем решения дифференциального уравнения РГ (1.33).

Общее решение уравнения РГ было найдено Л.В. Овсянниковым в 1956 г. [14]. В отсутствие зависимости от y (нет дополнительного характерного масштаба) функция $F(x, g)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ -x \frac{\partial}{\partial x} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} F(x, g) = 0 \quad (4.7)$$

и граничному условию $F(1, g) = g$. В этом случае решение в неявном виде задается формулой Гелл-Манна–Лоу [11]

$$\int_g^{F(x, g)} \frac{dg'}{\beta(g')} = \ln x \quad (4.8)$$

Основной вклад в интеграл (4.8) дает область, в которой β -функция обращается в нуль. Точка g^* , определяемая условием $\beta(g^*) = 0$, называется неподвижной (стационарной, фиксированной) точкой РГ преобразования. Вблизи неподвижной точки β -функция может быть представлена в виде

$$\beta(g) = A(g - g^*) \tag{4.9}$$

и для решения уравнения (4.7) будем иметь

$$F(x, g) \approx g^* + (g - g^*)x^A \tag{4.10}$$

Отсюда следует, что при $A = \partial\beta(g)/\partial g_{g=g^*} > 0$ неподвижная точка будет устойчивой при $x \rightarrow 0$ (инфракрасный предел в случае, когда x имеет смысл волнового числа), а при $A < 0$ она будет устойчивой при $x \rightarrow \infty$ (ультрафиолетовый предел).

Таким образом, поиск асимптотик решения уравнения РГ сводится к нахождению корней уравнения $\beta(g) = 0$ (определяющих положение неподвижных точек) и знаков производных в этих точках, определяющих их устойчивость в инфракрасном или ультрафиолетовом пределе. Поскольку асимптотика не зависит от положения начальной точки (если только она лежит в области притяжения неподвижной точки), имеет место универсальность, т.е. независимость поведения системы в крупномасштабной (или мелкомасштабной) области от свойств системы в области малых (или больших) масштабов. Эта универсальность хорошо известна в теории критических явлений, для полимерных систем, развитой турбулентности и др. Среди неподвижных точек может существовать тривиальная, в которой фактический параметр разложения в ряд теории возмущений (инвариантный заряд) обращается в нуль, и нелинейные межмодовые связи отсутствуют (имеет место асимптотическая свобода). Нетривиальная неподвижная точка описывает асимптотическое поведение системы при наличии межмодовых взаимодействий.

Приведем два частных примера решения уравнения РГ (4.7).

1°. Пусть в окрестности точки $x = 1$ функция $F(x, g)$ линейна по x

$$F(x, g) \approx g + \alpha g(x - 1) + \dots \tag{4.11}$$

Тогда $\beta(g) = \alpha g$ и согласно равенству (4.8) получаем

$$F(x, g) = gx^\alpha \tag{4.12}$$

Таким образом, линейное в окрестности точки $x = 1$ решение при требовании РГ инвариантности оказывается степенной функцией, сингулярной в точке $x = 0$ при $\alpha < 0$ или в точке $x = \infty$ при $\alpha > 0$. При этом оказывается, что формула (4.11) задает нулевой и первый член разложения степенной функции в ряд по степеням логарифма x вблизи точки $x = 1$

$$F(x, g) = gx^\alpha = ge^{\alpha \ln x} \approx g[1 + \alpha \ln x + \dots] \approx g + g\alpha(x - 1) + \dots \tag{4.13}$$

2°. Вблизи точки $x = 1$ функция $F(x, g)$ линейна по x и квадратична по g

$$F(x, g) \approx g + Ag^2(x - 1) + \dots \tag{4.14}$$

После вычисления функции $\beta(g)$ и подстановки ее в равенство (4.8) найдем

$$F(x, g) = \frac{g}{1 - Ag \ln x} \tag{4.15}$$

В результате оказалось, что выражение (4.14) является нулевым и первым членами геометрической прогрессии. Удовлетворяющее свойству РГ инвариантности “ис-

тинное” решение имеет особенность в точке $x = \exp(1/Ag)$ и убывает при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$, что трудно было предполагать на основании знания вида функции $F(x, g)$ в окрестности точки $x = 1$.

В случае наличия дополнительного размерного параметра L искомая функция содержит дополнительный аргумент y и следует искать решение уравнения (1.32), которое также находится методом характеристик [3]. В неявном виде это решение определяется соотношением

$$\Phi(y, g) = \Phi(y/x, F(x, y, g)) \quad (4.16)$$

где функция $\Phi(y, g)$ является решением уравнения характеристики

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dg}{\beta(g, y)} \quad (4.17)$$

записанное в форме

$$\Phi(y, g) = \text{const} \quad (4.18)$$

В качестве примера рассмотрим случай $\beta = -g/y$. Тогда записанное в неявном виде (4.18) решение уравнения для характеристики задается соотношением $\Phi(y, g) = g \exp(1/y)$. Согласно равенству (4.16) найдем

$$F(x, y, g) = g \exp(-(x-1)/y) = g_0 \exp(-x/y) \quad (4.19)$$

Данный пример соответствует рассмотренному в разд. (3) описанию экранировки заряда за счет поляризационных эффектов, при этом в качестве характерного масштаба длины L может фигурировать комптоновская длина волны электрона при рассмотрении эффекта поляризации вакуума в квантовой электродинамике или радиус экранирования Дебая–Хюккеля в теории плазмы. Решению (4.19) в этом случае будет соответствовать $q(r) = q_0 \exp(-r/L)$.

При рассмотрении различных задач методом РГ встречаются также функциональные уравнения другого вида

$$f(x, y, g) = f(t, y, g) f(x/t, y/t, F(t, y, g)), \quad f(1, y, g) = 1 \quad (4.20)$$

$F(x, y, g)$ – решение уравнения (1.32) (это так называемые уравнения второго класса в терминологии [3]).

Дифференцируя уравнение (4.20) по t и положив затем $t = 1$, найдем дифференциальное уравнение РГ для функции f

$$\left\{ -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} f(x, y, g) = -\gamma(y, g) f(x, y, g) \quad (4.21)$$

$$\beta(y, g) = \partial F(x, y, g) / \partial x|_{x=1}, \quad \gamma(y, g) = \partial f(x, y, g) / \partial x|_{x=1}$$

Решение уравнения (4.21) задается соотношением [3]

$$f(x, y, g) = \exp\{\Phi(y/x, F(x, y, g)) - \Phi(y, g)\} \quad (4.22)$$

где $\Phi(y, g)$ – решение уравнения

$$\left\{ -y \frac{\partial}{\partial y} + \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} \Phi(y, g) = -\gamma(y, g) \quad (4.23)$$

5. Метод ренормализационной группы в полевой формулировке. Понятие ренормализационной группы возникло первоначально в квантовой теории поля в связи с рассмотрением системы квантовых взаимодействующих полей. Описание этой системы в рамках теории возмущений, когда в качестве невозмущенной системы рассматриваются не взаимодействующие поля, приводит к интегралам по импульсам (волновым числам) промежуточных состояний. Если скорость убывания подынтегральных выражений выше скорости роста интегральной меры (степень роста которой определяется размерностью пространства), то интегралы сходятся. В противоположном случае возникают расходимости интегралов при больших импульсах (ультрафиолетовые расходимости). В промежуточном случае, когда скорости роста меры интегрирования и убывания подынтегральных функций одинаковы, возникают логарифмические расходимости. В так называемых перенормируемых теориях оказывается возможным интерпретировать расходящиеся величины как добавки к исходным параметрам теории (массам частиц и константам взаимодействия).

Идея устранения расходимостей с помощью перенормировок заключается в предложении рассматривать наблюдаемые (физические) параметры теории как сумму исходного (“затравочного”) параметра и полевой добавки к нему. При наличии расходимости полевой добавки для получения конечного значения физического параметра величина затравочного параметра (ненаблюдаемого) должна быть бесконечной. При формулировке теории в терминах наблюдаемых физических параметров (перенормированной теории) осуществляется переход от затравочных параметров к наблюдаемым (перенормированным). В рассмотренном выше примере экранировки заряда физическим будет экранированный заряд $q(a)$, а затравочным – q_0 , в этом случае константа перенормировки $q_0/q(a)$ конечна. При наличии расходимостей константы перенормировки масс $Z_m = m_0/m$ и зарядов $Z_q = q_0/q$ оказываются бесконечными. После устранения бесконечностей путем перенормировок остается некоторый произвол в выборе наблюдаемого значения параметра; произвол устраняется фиксацией условий определения наблюдаемого параметра (условий нормировки), фактически играющих роль некоторых граничных условий. Тем самым произвол в выборе значений физических параметров переходит в произвол в выборе условий нормировки. Ренормализационная инвариантность означает независимость физического результата от выбора условий нормировки. Совокупность преобразований от одного способа нормировки к другому и образует РГ.

Впервые внимание на то обстоятельство, что совокупность преобразований от одного способа нормировки к другому образует группу, было обращено в 1953 г. [15], а уже в следующем году РГ свойства перенормировок были использованы для улучшения результатов теории возмущений в квантовой электродинамике [11].

Идея использования РГ свойств для улучшения теории возмущений заключается в следующем. При построении перенормированной теории возмущений свойством ренормализационной инвариантности обладает только весь бесконечный ряд, в то время как отдельные члены этого ряда зависят от выбора условий нормировки, т.е. не являются РГ-инвариантными. Изменение условий нормировки соответствует перестройке полного ряда теории возмущений или некоторой его бесконечной подпоследовательности. Тем самым информация об отдельном члене ряда теории возмущений в сочетании с условием РГ инвариантности содержит информацию о бесконечной подпоследовательности ряда.

Для иллюстрации ренормализационной инвариантности рассмотрим схему построения перенормированной теории возмущений. Пусть в теории имеется некоторый исходный (“затравочный”) параметр m_0 , который входит в уравнение (или в лагранжиан квантово-механической системы) линейным образом. Если в рассматриваемой задаче нет выделенного масштаба с размерностью длины (моды всех масштабов вносят одинаковый вклад в интегралы по импульсам (волновым числам) промежуточных состояний), то соответствующие интегралы расходятся логарифмически в

области больших импульсов. Для устранения расходимостей введем обрезание по импульсам на некотором масштабе Λ . Тогда вычисленная по теории возмущений поправка к исходному значению параметра будет приводить к выражению

$$m(p) = m_0 + Am_0 \ln(p/\Lambda) + \dots \quad (5.1)$$

и при снятии обрезания $\Lambda \rightarrow \infty$ она оказывается бесконечной. Для построения перенормированной теории возмущений запишем m_0 в виде

$$m_0 = m + (m_0 - m) = m + (Z - 1)m \quad (5.2)$$

где $Z = m_0/m$ – константа перенормировки. Пропорциональный $(Z - 1)m$ член (так называемый контрчлен) добавим к части уравнения (лагранжиана), рассматриваемой как возмущение. Таким образом, в невозмущенную часть будет входить не исходный параметр m_0 , а перенормированный параметр m и ряд теории возмущений будет строиться в терминах перенормированного параметра. В результате выражение (5.1) примет вид

$$m(p) = m + Am \ln(p/\Lambda) + (Z - 1)m + \dots \quad (5.3)$$

Постоянные Z и m – произвольные, что отражает произвол в разбиении уравнения (лагранжиана системы) на невозмущенную часть и возмущение.

Для устранения этого произвола потребуем, чтобы при некотором значении импульса $p = \mu$ поправка к перенормированному значению параметра m была равна нулю, т.е. потребуем выполнения условия нормировки

$$m(\mu) = m \quad (5.4)$$

что достигается при выборе константы перенормировки согласно соотношению

$$Z = 1 - A \ln(\mu/\Lambda) + \dots \quad (5.5)$$

Это приводит к тому, что ряд теории возмущений для $m(p)$ примет форму, не содержащую зависимости от импульса обрезания

$$m(p) = m + Am \ln(p/\mu) + \dots \quad (5.6)$$

Из наличия произвола в выборе точки нормировки следует, что при изменении точки нормировки $\mu \rightarrow \mu_1$ и соответствующего изменения перенормированного значения параметра $m \rightarrow m_1$ результат для $m(p)$ не должен меняться, т.е.

$$m(p) = m + Am \ln(p/\mu) + \dots = m_1 + Am_1 \ln(p/\mu_1) + \dots \quad (5.7)$$

Видно, что члены низшего приближения перенормированной теории возмущений при изменении условий нормировки меняются. Для обеспечения ренормализационной инвариантности изменение этих членов при изменении точки нормировки должно компенсироваться членами ряда, соответствующими высшим приближениям. Тем самым, требование ренормализационной инвариантности позволяет судить о структуре высших приближений теории возмущений.

В 1955 г. было предложено [16] использовать свойство РГ инвариантности для улучшения результатов теории возмущений в квантовой теории поля, соответствующий подход получил название метода ренормализационной группы (метода РГ). Если согласно этому методу найти β -функцию в низшем приближении перенормированной теории возмущений и затем использовать эту функцию при решении дифференциального уравнения РГ типа (1.32), то построенное таким образом решение и будет соответствовать суммированию бесконечной подпоследовательности полного ряда теории возмущений. Рассмотренные в разд. 4 примеры являются иллюстрацией данного ут-

верждения. В частности, если бы в примере 2° был явно вычислен следующий член разложения (4.12) в ряд теории возмущений, то из требования ренормализационной инвариантности он должен был бы иметь вид $g^3(\ln x)^2$.

Наиболее эффективным этот метод оказывается в случае системы, содержащей большое число мод различных пространственных и временных масштабов, когда основную роль играют взаимодействия мод близких масштабов (локальность взаимодействия в пространстве масштабов). При этом взаимодействие мод с существенно различающимися масштабами осуществляется путем каскадной последовательности взаимодействий через моды всех промежуточных масштабов. В подобной системе не существует выделенного характерного масштаба и соответствующая теория обладает свойством масштабной инвариантности (скейлингом). В силу отсутствия выделенного масштаба моды всех масштабов равноправны, что и ведет к логарифмически расходящимся выражениям.

Как подчеркнул Вилсон [17, 18], наличие в теории логарифмической расходимости является характерным признаком системы, обладающей свойством масштабной инвариантности. К таким системам относятся, например, мелкомасштабная турбулентность при больших числах Рейнольдса [12], крупномасштабные флуктуации в термодинамической системе вблизи критической точки [5], система, образованная длинными полимерными цепочками [19], совокупность мод, ответственных за поведение динамической системы вблизи точки перехода к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций [20] и многие другие [21]. Перенормированная теория возмущений используется для расчета отдельного звена бесконечной каскадной цепочки (определяющей вид РГ-функции), а свойства всей цепочки находятся суммированием вкладов отдельных звеньев путем решения дифференциального уравнения РГ [22]. Фактически возможность определения интегральных свойств цепочки основывается на использовании того обстоятельства, что отдельные звенья этой цепочки функционально подобны, т.е. различаются только масштабом и значениями числовых параметров. В рассмотренном в начале разд. 4 примере аналогом преобразования, описывающего переход от отдельного звена цепочки к соседнему с ним, является оператор бесконечно малых трансляций, РГ-функция – аналог генератора группы трансляций, а переход к состоящей из бесконечно большого числа звеньев каскадной цепочке может рассматриваться как аналог оператора конечных смещений, представимого в виде бесконечной последовательности операций бесконечно малых трансляций.

6. Аномальные размерности, автомодельности второго рода и метод РГ. Возникающие в теории возмущений расходимости устраняются с помощью некоторой процедуры регуляризации, которая сводится к введению обрезания интегралов по волновым числам в области больших волновых чисел при ультрафиолетовых расходимостях и в области малых – при инфракрасных расходимостях. В результате в теорию вводится некоторый новый параметр с размерностью волнового числа, т.е. появляется дополнительный масштаб и в силу наличия расходимости зависимость от этого масштаба в пределе, соответствующем снятию регуляризации, является неаналитической. После проведения перенормировок зависимость от масштабного регуляризирующего параметра заменяется на зависимость от масштабного параметра, связанного с выбором условий нормировки. При исследовании асимптотик решения на основе соображений размерности оказывается, что зависимость от указанного масштабного параметра не исчезает. Зависимость констант перенормировки от выбора условий нормировки приводит к тому, что при масштабных преобразованиях перенормированные параметры преобразуются не так, как они должны были бы преобразовываться на основании наивных (без учета влияния параметра обрезания) соображений размерности. Другими словами, они приобретают дополнительную (так называемую аномальную) размерность, зависящую от величины константы межмодового взаимодействия [23]. Было отмечено [24], что аномальная размерность в квантовой теории поля есть не что иное, как пока-

затель неполной автомодельности (автомодельности второго рода в терминологии [25]), встречающейся в различных задачах математической физики.

Согласно известным соображениям [25], соответствующие неполной автомодельности решения представляют собой полученные на основании соображений размерности асимптотики решений ряда неавтомодельных задач, когда часть безразмерных параметров оказывается очень большой или очень малой. Для представленной в безразмерной форме физической величины Π на основании соображений размерности можно записать

$$\Pi = \Phi(\Pi_0, \Pi_i) \quad (6.1)$$

где безразмерная величина Π_0 связана с размерным параметром регуляризации, а Π_i – другие безразмерные параметры. При этом будем полагать, что снятию регуляризации отвечает предельный переход $\Pi_0 \rightarrow 0$. Наличие расходимости означает, что зависимость Φ от параметра Π_0 в точке $\Pi_0 = 0$ не является аналитической, т.е. не существует конечного предела

$$\lim \Pi = \Phi(0, \Pi_i) \text{ при } \Pi_0 \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

однако существует предел

$$\lim \Pi \cdot \Pi_0^\alpha = \Phi_1(\Pi_i) \text{ при } \Pi_0 \rightarrow 0 \quad (6.3)$$

и величина Π асимптотически может быть записана в форме

$$\Pi = \Pi_0^{-\alpha} \Phi_1(\Pi_i) \quad (6.4)$$

где α – некоторый положительный параметр, называемый показателем автомодельности. Таким образом, переход от неавтомодельной задачи (когда параметр Π_0 отличен от нуля) к ее автомодельной промежуточной асимптотике нерегулярен, зависимость от большого (малого) параметра не исчезает полностью, и этот параметр оказывается существенным при проведении размерного анализа. Эта ситуация соответствует автомодельности второго рода, когда показатели степенного поведения не определяются соображениями размерности, а находятся из решения некоторой нелинейной задачи на собственные значения.

Вычисление аномальных размерностей в квантовой теории поля осуществляется с помощью метода РГ, позволяющего просуммировать некоторую бесконечную подпоследовательность ряда теории возмущений. Отсюда естественным образом следует предположение, что для вычисления показателей автомодельности второго рода может быть использован метод РГ, на что, по-видимому, впервые обратили внимание авторы [24], которые продемонстрировали возможность применения этого метода при решении задачи нелинейной диффузии (теплопроводности) (уравнение Баренблатта–Сивашинского [25]) для одномерного случая [26]. Воспользуемся этим примером для иллюстрации метода и пояснения несколько абстрактных рассуждений данного и предыдущего разделов. В отличие от описанного ранее подхода [26] проведем рассмотрение для пространства d измерений [27].

7. Пример использования метода РГ для нахождения показателей автомодельности второго рода. Рассмотрим уравнение нелинейной теплопроводности, подробно обсуждавшееся ранее [25],

$$\{\partial_t - D[u]\Delta\}u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.1)$$

где коэффициент теплопроводности $D[u]$ различен при нагревании и охлаждении

$$D[u] = D[1 + \epsilon H(-\partial_t u)] = \begin{cases} D \text{ при } \partial_t u > 0 \\ D(1 + \epsilon) \text{ при } \partial_t u < 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

$H(x)$ – функция Хевисайда. Требуется найти асимптотику решения задачи Коши при больших временах.

Если в качестве начального условия выбрать

$$u(\mathbf{r}, 0) = Q_0 \delta(\mathbf{r}) \tag{7.3}$$

то оказывается, что следующее из соображений размерности решение вида

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{Q_0}{(Dt)^{d/2}} \Phi\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{Dt}}, \varepsilon\right) \tag{7.4}$$

не существует. Это связано с тем, что решению вида (7.4) соответствует сохранение величины полного запаса тепла

$$q = \int u(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \tag{7.5}$$

Однако при учете различия скоростей переноса тепла при нагревании и охлаждении величина q будет зависеть от времени. Этим задача (7.1) принципиально отличается от классической задачи с $\varepsilon = 0$, в которой $q = \text{const} = Q_0$.

Для отыскания решения можно воспользоваться теорией возмущений, рассматривая ε как малый параметр разложения. С этой целью перенесем пропорциональное ε возмущение в правую часть и с помощью функции Грина уравнения диффузии $G(r, t)$ (задаваемой соотношением (1.20)) перейдем от дифференциальной формы уравнения к интегральной, учитывающей в явном виде начальное условие задачи (7.4). В результате найдем

$$u(\mathbf{r}, t) = Q_0 G(\mathbf{r}, t) + \varepsilon D \int_0^t \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') H[-\partial_t u(\mathbf{r}', t')] \Delta u(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \tag{7.6}$$

Последовательное интегрирование уравнения (7.6) приводит к представлению решения в виде бесконечного ряда по степеням ε . Однако оказывается, что отдельные члены ряда теории возмущений будут содержать интегралы по t' , логарифмически расходящиеся на нижнем пределе. Для устранения этой расходимости применяется процедура регуляризации, сводящаяся к замене в (7.6) нижнего предела интегрирования по t' на $\delta > 0$. Эта процедура эквивалентна предположению, что начальное распределение задается не в момент времени $t = 0$, а в момент $t = \delta > 0$ и имеет вид

$$u(\mathbf{r}, \delta) = Q_0 G(\mathbf{r}, \delta) = \frac{Q_0}{(4\pi D\delta)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4D\delta}\right) \tag{7.7}$$

Распределению (7.7) соответствует начальный запас тепла в системе $q(t = \delta) = Q_0$ и размытость начального распределения по некоторому d -мерному объему с радиусом $r_0 = \sqrt{D\delta}$. Таким образом, решение будет теперь зависеть от двух параметров – Q_0 и δ , при этом зависимость от регуляризирующего параметра δ при $\delta \rightarrow 0$ является неаналитической (сингулярной). Учет соображений размерности позволяет искать решение в виде

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{q(t, \varepsilon, Q_0, \delta)}{(Dt)^{d/2}} \Phi_1\left(\frac{r^2}{\sqrt{Dt}}, \frac{t}{\delta}, \varepsilon\right) \tag{7.8}$$

При поиске асимптотики решения предполагается, что функция $\Phi_1(x, y, z)$ аналитична по второму аргументу при $y \rightarrow \infty$, и следовательно, существует соответствующий автомодельности второго рода предел

$$\lim_{t/\delta \rightarrow \infty} \frac{u(\mathbf{r}, t)(Dt)^{d/2}}{q(t, \varepsilon, Q_0, \delta)} = \Phi_1\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}, \infty, \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{Dt}}, \varepsilon\right) \tag{7.9}$$

Тогда асимптотически функция $q(t, \varepsilon, Q_0, \delta)$ будет пропорциональна запасу тепла в системе в момент времени t (коэффициент пропорциональности можно положить равным единице за счет нормировки функции Φ).

Таким образом, при больших временах запас тепла определяется исходными параметрами задачи Q_0 и δ , которые квалифицируются как “микроскопические” [24] (они задают свойства системы при малых временах). Эти параметры аналогичны “затравочным” параметрам в квантовой теории поля. При исследовании асимптотики решения нас интересует существование закона эволюции полного запаса тепла при больших временах. Это соответствует отказу от рассмотрения исходной задачи Коши с начальным распределением (7.7), а вместо этого рассмотрению несколько иной асимптотической задачи.

Модифицированная задача ставится следующим образом: по заданному значению запаса тепла Q в момент времени τ найти запас тепла при $t > \tau$. Это означает, что при $t \gg \delta$

$$q(t, \varepsilon, Q_0, \delta) \rightarrow q(t, \varepsilon, Q, \tau) \quad (7.10)$$

Отсюда следует, что теперь асимптотический запас тепла определяется не исходными параметрами задачи Коши Q_0 и δ , а новым параметром

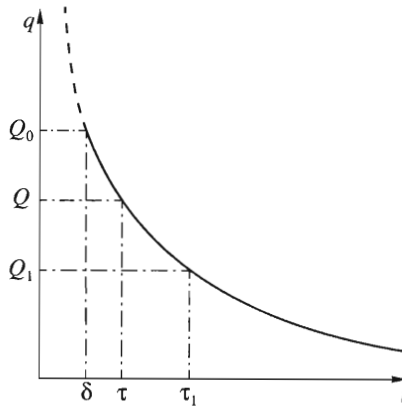
$$Q = Q_0 Z^{-1} \quad (7.11)$$

который следует рассматривать как “феноменологический” [24]. Переход от “микроскопического” параметра Q_0 к “феноменологическому” параметру Q аналогичен процедуре перенормировок в квантовой теории поля, т.е. переходу от ненаблюдаемых “затравочных” параметров к наблюдаемым перенормированным параметрам.

Построение перенормированной теории возмущений осуществляется согласно схеме, описанной в разд. 5. В интегральном уравнении (7.6) выполним перенормировку параметра Q_0 путем замены $Q_0 \rightarrow Q$ и добавления компенсирующего эту замену контрчлена. В результате получим

$$u(\mathbf{r}, t) = QG(\mathbf{r}, t) + \varepsilon D \int_{\delta}^t \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') H[-\partial_{t'} u(\mathbf{r}', t')] \Delta u(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' + Q(Z - 1)G(\mathbf{r}, t) \quad (7.12)$$

Построим ряд теории возмущений с помощью последовательности итераций, рассматривая в качестве нулевого приближения первый член правой части равенства (7.12). При разбиении правой части равенства (7.12) на невозмущенную часть и возмущение возник произвол, связанный с произволом в выборе константы перенормировки Z (и тем самым, параметра Q). Произвол в выборе константы перенормировки Q может быть устранен с помощью “условия нормировки”, заключающемся в требовании, чтобы в некоторый момент времени $t = \tau$ запас тепла в системе был равен Q . Тем самым произвол в выборе константы перенормировки Z заменяется на произвол в выборе “точки нормировки” τ . Условие нормировки означает, что связанные с учетом возмущений поправки к асимптотическому решению в точке нормировки $t = \tau$ должны компенсироваться вкладом контрчлена (при наличии расходящихся параметров контрчлена будут бесконечными), и значение истинного решения должно совпадать со значением нулевого приближения *перенормированной* теории возмущений (см. фиг. 4, где представлен предполагаемый вид истинного решения для функции $q(t)$, а также ответственное нулевому приближению перенормированной теории возмущений решение $q(t) = q(\tau) = Q$ и соответствующее нулевому приближению перенормированной теории решение $q(t) = q(\delta) = Q_0$).



Фиг. 4

Условие ренормализационной инвариантности для функции, задающей запас тепла в системе, имеет вид

$$q(t, \varepsilon, Q, \tau) = q(t, \varepsilon, Q_1, \tau_1) \tag{7.13}$$

и по своей структуре оно совпадает с уравнениями (1.5), (1.14) для рассмотренных ранее примеров. На основании соображений размерности можно написать

$$q(t, \varepsilon, Q, \tau) = Q\varphi(t/\tau, \varepsilon) \tag{7.14}$$

Функция $\varphi(x, \varepsilon)$ удовлетворяет функциональному уравнению РГ

$$\varphi(x, \varepsilon) = \varphi(\lambda, \varepsilon)\varphi(x/\lambda, \varepsilon) \tag{7.15}$$

и граничному условию (условию нормировки)

$$\varphi(1, \varepsilon) = 1 \tag{7.16}$$

Переход к дифференциальному уравнению РГ (4.7) и его последующее решение, удовлетворяющее условию (7.16), дает

$$\varphi(x, \varepsilon) = x^{\alpha(\varepsilon)} \tag{7.17}$$

Показатель степени $\alpha(\varepsilon)$ определяется поведением функции $\varphi(x, \varepsilon)$ в окрестности точки $x = 1$.

Следуя методу РГ [3], вычислим функцию $\varphi(x, \varepsilon)$ в низшем приближении перенормированной теории возмущений. Для этого в соотношении (7.12) возьмем первую итерацию, а также воспользуемся выражением (1.20). В результате найдем [27]

$$q(t, \varepsilon, Q, \tau) = Q[1 - \varepsilon A \ln(t/\tau)], \quad Z = 1 + \varepsilon A \ln(\tau/\delta) \tag{7.18}$$

$$A = (d/2\varepsilon)^{d/2} / \Gamma(d/2)$$

Из соотношений (7.18) следует формула для функции $\varphi(x, \varepsilon)$ и выражение для показателя автомодельности второго рода

$$\alpha(\varepsilon) = -\varepsilon(d/2\varepsilon)^{d/2} / \Gamma(d/2) \tag{7.19}$$

Эта формула в одномерном случае воспроизводит результат работы [26], достаточно хорошо согласующийся с результатами численного решения соответствующей задачи.

Обратим внимание на то обстоятельство, что при использовании теории возмущений величина $q(t, \varepsilon, Q, \tau) \approx Q(t/\tau)^{\alpha(\varepsilon)}$ заменяется на постоянную $q(\tau, \varepsilon, Q, \tau) = Q$. На первый взгляд, такое приближение может показаться неудовлетворительным. Однако напомним, что теория возмущений используется только для вычисления поведения $q(t, \varepsilon, Q, \tau)$ вблизи точки нормировки (для вычисления РГ-функции). В случае, когда имеет место “локальность взаимодействия”, т.е. поведение некоторой моды определяется взаимодействиями только с модами из ближайшей окрестности (например, по времени, пространству, пространству волновых чисел или частот), это приближение оказывается хорошим. Но именно системы с локальным межмодовым взаимодействием обладают ренормализационной инвариантностью. Рассуждения подобного рода могут рассматриваться как некоторое обоснование метода РГ, который, по существу, строго математического обоснования не имеет.

8. Метод ε -разложения. Успех применения метода РГ в задаче (7.1) связан с двумя обстоятельствами. Первое заключается в том, что при использовании теории возмущений возникающие расходимости могут быть включены в константы перенормировки, определяющие переход от исходных (затравочных, перенормированных) параметров задачи к наблюдаемым в асимптотическом поведении феноменологическим (перенормированным) параметрам. Это свойство в теории поля называется перенормируемостью, а соответствующие теории – перенормируемыми. Второе обстоятельство заключается в том, что возникающие расходимости являются логарифмическими, т.е. константы перенормировки логарифмически зависят от регуляризирующего параметра в пределе, соответствующем снятию регуляризации. Как было уже отмечено выше, наличие логарифмической расходимости означает локальность имеющегося в задаче нелинейного взаимодействия в пространстве времен (марковость процесса), в конфигурационном пространстве или в пространстве волновых чисел и частот (пространственных и временных масштабов).

Таким образом, метод РГ оказывается эффективным только в случае перенормируемых теорий в логарифмической расходимостью константы перенормировки. Подобная ситуация встречается довольно часто, но далеко не всегда. В случае отсутствия логарифмической перенормируемости следует применять более тонкие методы. В качестве такого метода была предложена процедура ε -разложения [28], которая затем успешно применялась в теории критических явлений для вычисления показателей скейлинга вблизи критической точки. Часто оказывается, что свойство перенормируемости зависит от размерности пространства, и если в пространстве реальной размерности d теория перенормируема, то в пространстве другой размерности $d_c \neq d$ она может оказаться перенормируемой и содержать логарифмические расходимости. Тогда задача рассматривается в пространстве произвольной размерности $d = d_c + \varepsilon$, где ε – произвольное число. При переходе d через критическое значение происходит изменение характера расходимости и смена асимптотик. При этом вблизи критической размерности фактический параметр разложения в ряд перенормированной теории возмущений оказывается пропорциональным ε , что позволяет использовать теория возмущений даже в случае, когда формальный параметр разложения не является малым. Как это следует из развитого в квантовой теории поля метода размерной регуляризации расходящихся интегралов [29–32], наличие логарифмической расходимости при $d = d_c$ приводит к тому, что в плоскости комплексных значений d вычисляемые по теории возмущений физические величины будут иметь полюсную особенность в точке $\varepsilon = 0$. Метод ε -разложения заключается в выделении вклада этой полюсной особенности (нахождение вычета при полюсе) с последующим аналитическим продолжением по ε в “физическую точку” $\varepsilon = d - d_c$. Было высказано предположение [33], что учет вклада только полюсной особенности соответствует выделению вклада локальных межмодовых взаимодействий, а аналитическое продолжение полюсного члена озна-

чае отфильтровывание нелокальных взаимодействий между модами, по которым раскладывается искомое решение.

В теории критических явлений, описываемых феноменологическим уравнением Гинзбурга–Ландау, для критической размерности получилось значение $d_c = 4$ и продолжение по ϵ в точку $\epsilon = -1$ ($d = 3$) дало хорошее согласие с экспериментальными результатами для показателей степенного поведения вблизи критической точки (критических индексов).

9. Диффузия при наличии химических реакций. Более сложной задачей, в которой могут быть продемонстрированы возможности и технические приемы метода РГ, является задача о диффузии вещества при наличии химических реакций [34]. В основе описания данной задачи лежит уравнение

$$(\partial_t - D_0 \Delta)C(\mathbf{r}, t) + \lambda C^{1+2\delta}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{9.1}$$

где λ – константа скорости реакции, $(1 + 2\delta)$ – порядок реакции. Рассмотрение будет проводиться в пространстве произвольной размерности d .

Примем, что решение автомодельно, т.е. функциональная структура решения с течением времени не меняется, а временная эволюция сводится к изменению характерных параметров задачи – амплитуды распределения $C(t)$ и его ширины $l(t)$

$$C(\mathbf{r}, t) = C(t)F(r^2/l^2(t)) \tag{9.2}$$

Отметим, что при начальном распределении вида $C(\mathbf{r}, 0) = q_0 \delta(\mathbf{r})$ линейной задаче соответствует

$$F(x^2) = \exp\{-x^2\}, \quad l^2(t) = 4D_0 t, \quad C(t) = q_0 / [\pi l^2(t)]^{d/2}$$

Из гипотезы автомодельности (9.2) видно, что если в некоторый момент времени распределение было гауссовым, то оно и в дальнейшем остается гауссовым. В этом случае задача сводится к нахождению функций $q(t)$ и $l(t)$, определяемых соотношениями

$$q(t) = \int C(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad l^2(t) = 4D(t)t = \frac{d \int r^2 C(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}}{2 \int C(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}} \tag{9.3}$$

Для построения перенормированной теории возмущений выполним перенормировку коэффициента диффузии путем замены $D_0 \rightarrow D = Z_1^{-1} D_0$ в левой части уравнения (9.1) и добавления в правую его часть соответствующего контрчлена $(Z_1 - 1)D\Delta C$. Затем с помощью перенормированной функции Грина уравнения диффузии (в котором величина D_0 заменена на D) перейдем к интегральному уравнению, которое содержит определяемый начальными данными параметр $q_0 = \int C(\mathbf{r}, 0) d\mathbf{r}$. Выполним перенормировку этого параметра путем замены $q_0 \rightarrow \check{q} = Z_2^{-1} q_0$ и добавления компенсирующего эту замену второго контрчлена $(Z_2 - 1)qG(\mathbf{r}, t)$. Результирующее интегральное уравнение примет вид

$$C(\mathbf{r}, t) = qG(\mathbf{r}, t) - \int_0^t \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') [\lambda C^{1+2\delta}(\mathbf{r}', t') - (Z_1 - 1)D\Delta C(\mathbf{r}', t')] (d\mathbf{r}') dt' + (Z_2 - 1)qG(\mathbf{r}, t) \tag{9.4}$$

Последовательное интегрирование этого уравнения дает ряд перенормированной теории возмущений в терминах перенормированных параметров D и q . В первом приближении соответствующий расчет дает [34]

$$C^{(1)}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= q \left[G(\mathbf{r}, t) - \frac{\lambda q^{2\delta}}{D^{\delta d}} A \int G\left(\mathbf{r}, t - \frac{2\delta}{1+2\delta} t'\right) \frac{dt'}{(t')^{1-\varepsilon}} + (Z_2 - 1)G(\mathbf{r}, t) + (Z_1 - 1)Dt\Delta G(\mathbf{r}, t) \right] \quad (9.5)$$

$$\varepsilon = 1 - \delta d, \quad A = \frac{1}{(1+2\delta)^{d/2}} \frac{1}{(4\pi)^{1-\varepsilon}}$$

Если потребовать, чтобы при $t = \tau$ значения функций $q(t)$ и $D(t)$ совпали с перенормированными значениями q и D , т.е. $q(\tau) = q$, $D(\tau) = D$, то для констант перенормировки найдем

$$Z_1 = 1 - \frac{\lambda q^{2\delta}}{D^{\delta d}} A \frac{2\delta}{1+2\delta} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dt'}{(t')^{-\varepsilon}} = 1 - g \frac{2\delta}{1+2\delta} AB(1, 1 + \varepsilon) \quad (9.6)$$

$$Z_2(\tau) = 1 + \frac{\lambda q^{2\delta}}{D^{\delta d}} A \int_0^\tau \frac{dt'}{(t')^{1-\varepsilon}} = 1 + gAB(1, \varepsilon), \quad g = \frac{\lambda q^{2\delta}}{D^{\delta d}} \tau^\varepsilon$$

где $B(\xi, \eta)$ – Эйлеров интеграл первого рода (бета-функция).

Запись интеграла в (9.6) в форме бета-функции связана с тем, что при отрицательных ε этот интеграл расходится, однако он может быть продолжен в область отрицательных ε с использованием вейерштрассовского определения бета-функции, справедливого во всей области значений ε аргумента [35]. Такой подход соответствует процедуре ε -разложения и аналогичен методу размерной регуляризации расходящихся выражений в квантовой теории поля [29–32], когда существование расходимостей при некоторой размерности пространства проявляется в наличии полюсных особенностей в плоскости комплексных размерностей.

Учет высших приближений теории возмущений и суммирование полного ряда осуществляется с помощью метода РГ. Для этого запишем функции $q(t)$ и $D(t)$ через безразмерные функции безразмерных переменных

$$q(t) = q f_2(t/\tau, g), \quad D(t) = D f_1(t/\tau, g) \quad (9.7)$$

при этом в силу условий нормировки $f_i(1, g) = 1$.

Требование ренормализационной инвариантности выражается соотношениями

$$q f_2(t/\tau, g) = q_1 f_2(t/\tau_1, g_1), \quad D f_1(t/\tau, g) = D_1 f_1(t/\tau_1, g_1); \quad g_1 = \frac{\lambda q_1^{2\delta}}{D_1^{\delta d}} \tau_1^\varepsilon \quad (9.8)$$

которые при учете условий нормировки приводят к функциональным уравнениям РГ

$$f_i(t/\tau, g) = f_i(t/\tau_1, g_1), \quad i = 1, 2 \quad (9.9)$$

Для решения уравнений (9.9) введем новую безразмерную функцию (“инвариантный заряд” [3])

$$\tilde{g}\left(\frac{t}{\tau}, g\right) = \frac{\lambda q(t)^{2\delta} t^\varepsilon}{D(t)^{\delta d}} \equiv g \frac{f_2^{\delta d}(t/\tau, g)}{f_1^{\delta d}(t/\tau, g)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^\varepsilon \quad (9.10)$$

В силу уравнений (9.9) функция $\tilde{g}(x, g)$ удовлетворяет функциональному уравнению РГ

$$\tilde{g}(x, g) = \tilde{g}\left(\frac{x}{\alpha}, \tilde{g}(\alpha, g)\right) \quad (9.11)$$

и граничному условию $\tilde{g}(1, g) = 1$.

Из уравнения (9.11) стандартными методами получается дифференциальное уравнение РГ

$$\left\{ -x \frac{\partial}{\partial x} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} \tilde{g}(x, g) = 0 \quad (9.12)$$

$$\beta(g) = \left. \frac{\partial \tilde{g}(x, g)}{\partial x} \right|_{x=1} = g[\varepsilon + 2\delta\gamma_2(g) - \delta d\gamma_1(g)], \quad \gamma_i = \left. \frac{\partial f_i(x, g)}{\partial x} \right|_{x=1}$$

Следуя методу РГ [3], определим $\beta(g)$ в низшем приближении перенормированной теории возмущений с использованием формулы (9.6) для нахождения $\gamma_i(g)$ [34].

Подстановка β -функции в уравнение (9.12) и в соответствующие уравнения для $f_i(x, g)$ и их последующее решение дает

$$\tilde{g}(x, g) = \frac{g x^\varepsilon}{1 + (g/g^*)(x^\varepsilon - 1)}, \quad f_i(x, g) = \left[1 + \frac{g}{g^*}(x^\varepsilon - 1) \right]^{\zeta_i} \quad (9.13)$$

$$\zeta_1 = \frac{a}{\delta(1+ad)}, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{2\delta(1+ad)}, \quad g^* = \frac{\varepsilon}{2\delta a(1+ad)}, \quad a = \frac{\delta}{1+2\delta} \cdot \frac{1-\delta d}{2-\delta d}$$

Отметим, что в теории возникает некоторая зависящая от порядка химической реакции критическая размерность $d_c = 1/\delta = 2/(n-1)$ (соответствующая $\varepsilon = 0$), выше и ниже которой режимы асимптотического поведения системы оказываются различными. Анализ этих решений при различных знаках λ (случаю $\lambda > 0$ соответствует реакция поглощения, а случаю $\lambda < 0$ – реакция образования вещества) и различных значениях размерности пространства позволяет найти возможные режимы поведения системы [34]. В частности, при размерности пространства ниже критической для реакций образования вещества метод РГ предсказывает возникновение “режимов с обострением”, когда происходит процесс локализации первоначально размазанного распределения; подобные режимы известны по результатам численного анализа соответствующей задачи [36].

10. Вилсоновская формулировка метода ренормгруппы. Несколько иной и более наглядный подход к пониманию идей и использованию метода РГ был сформулирован Вилсоном [17, 18]. Согласно Вилсону метод РГ представляет собой способ исследования многомодовой системы с многими характерными пространственными и временными масштабами. Отсутствие выделенного характерного масштаба (моды всех масштабов одинаково существенны) связано с тем, что имеет место локальность взаимодействия в пространстве масштабов, т.е. взаимодействие осуществляется только между модами близких масштабов, а взаимодействие между модами со значительно различающимися масштабами реализуется путем каскадной последовательности взаимодействий через моды промежуточных масштабов. Подобные процессы в разд. 2 были названы марковскими в обобщенном смысле. Наличие каскадного механизма при отсутствии выделенного характерного масштаба ведет к идентичности (с точностью до масштабного преобразования) картины флуктуаций динамических мод разных масштабов (самоподобие, масштабная инвариантность, скейлинг).

Метод РГ в вилсоновской формулировке сводится к переходу от реальной многомодовой системы к некоторой эквивалентной системе с меньшим числом мод, но имеющей то же самое поведение в области крупномасштабных и медленных процессов. Уравнения для крупномасштабных (медленных) мод получаются в результате усреднения по масштабам (периодам) мелкомасштабных (быстрых) мод. Такой подход не является чем-то новым, он достаточно известен и довольно широко распространен. В частности, применяемому в статистической физике гидродинамическому описанию системы многих частиц соответствует усреднение по степеням свободы молекулярных движений, сводящееся к введению эмпирических коэффициентов молекулярного переноса. В теории нелинейных колебаний успешно применяется метод Крылова–Боголюбова, в котором уравнения эволюции для медленных переменных – амплитуд и сдвигов фаз – получаются после усреднения по быстрым переменным, соответствующим колебаниям на основной частоте [37]. В обоих указанных случаях спектры медленных и быстрых мод достаточно сильно разнесены, и процедура усреднения по быстрым модам хорошо определена. Однако в случае непрерывного спектра четко выраженная граница между медленными и быстрыми модами отсутствует, и процедура уменьшения числа мод осуществляется по несколько более усложненной схеме путем последовательности частичных усреднений по узкой полосе спектра со все более возрастающими периодами (масштабами).

Эта процедура осуществляется следующим образом [4, 5]. Пусть в системе имеются моды, спектр которых ограничен сверху некоторым значением волнового числа Λ (или частоты Ω). Разобьем спектр на две части: $0 \leq k \leq \Lambda e^{-\tau}$ и $\Lambda e^{-\tau} \leq k \leq \Lambda$, где τ – некоторый положительный параметр. Условно назовем лежащие в первом интервале моды медленными, а лежащие во втором интервале – быстрыми (в теории турбулентности эти совокупности мод согласно терминологии А.М. Обухова называются соответственно макро- и микрокомпонентами [12]). При достаточно малых τ число быстрых мод будет невелико. В нелинейной системе уравнения для быстрых и медленных мод не разделяются. Однако в уравнении для быстрых мод можно рассматривать соответствующие медленным модам функции как постоянные, что аналогично известному в квантовой механике приближению Вентцеля–Бриллюэна–Крамерса (ВКБ-приближению). Решив уравнения для быстрых мод в присутствии медленных мод, подставим эти решения в уравнения для медленных мод и выполним усреднение по периодам быстрых мод. В результате получим уравнения для медленных мод с учетом усредненного влияния быстрых мод.

В случае решеточной модели описанному процессу исключения быстрых мод соответствует переход от рассмотрения отдельных элементарных ячеек к содержащим несколько ячеек блокам и описание системы посредством задания средних значений в блоке (“крупнозернистое огрубление”). Этот переход носит название преобразования Каданова [38], последовательное выполнение преобразований Каданова сводится к переходу к блокам все более крупных размеров при уменьшении их числа. В теории полимерных систем [19] преобразованию Каданова отвечает группирование некоторого числа последовательных мономеров в субъединицы и вычисление параметров, характеризующих размеры и константы взаимодействия субъединиц, исходя из размеров и констант взаимодействия мономеров.

После исключения быстрых мод спектр оставшихся мод будет ограничен областью $0 \leq k \leq \Lambda e^{-\tau}$. Выполним масштабное преобразование $k \rightarrow k' = ke^{\tau}$, в результате которого интервал спектра волновых чисел примет прежнее значение $0 \leq k' \leq \Lambda$. В результате частичного усреднения и масштабного преобразования параметры уравнения для медленных мод меняются (перенормируются), а вид уравнения в случае соответствующим образом подобранного закона преобразования амплитуд при масштабном преобразовании сохраняется (хотя, быть может, только приближенно). Таким образом операция РГ преобразования сводится к комбинации частичного усред-

нения по полосе спектра быстрых мод (преобразование Каданова) и масштабного преобразования.

Пусть система задается набором числовых параметров $\{\mu^{(0)}\}$. Например, это могут быть параметры гамильтониана системы (массы и константы связи), через который задается плотность распределения по состояниям $P \sim \exp(-H/(kT))$. Если интерес представляет поведение системы в крупномасштабной области, то знание функции распределения по всем состояниям является избыточным и распределение по крупномасштабным состояниям может быть получено путем усреднения по мелкомасштабным состояниям, т.е. путем исключения мелкомасштабных состояний. В основе РГ подхода лежит предположение, что структура эффективного гамильтониана, описывающего распределение по крупномасштабным состояниям, остается такой же, но с заменой исходных параметров гамильтониана $\{\mu^{(0)}\}$ на измененные (перенормированные) значения $\{\mu\}$. Если набор задающих систему исходных параметров $\mu_i^{(0)}$ изображать точкой в пространстве параметров $\{\mu^{(0)}\}$, то операция РГ преобразования может быть символически представлена в виде

$$\{\mu^{(0)}\} \rightarrow \{\mu(\tau)\} = \hat{R}(\tau)\{\mu^{(0)}\} \tag{10.1}$$

где $\hat{R}(\tau)$ – оператор РГ преобразования, действующий в пространстве параметров $\{\mu\}$. Последовательное выполнение операций РГ преобразования соответствует движению изображающей точки в пространстве параметров, где роль времени играет τ , а вектор $\{\mu^{(0)}\}$ соответствует начальным условиям. В этом смысле оператор $\hat{R}(\tau)$ соответствует изменению начальных условий при сдвиге начального момента времени, а требование ренормализационной инвариантности означает независимость поведения системы от способа задания начальных условий аналогично случаю, описанному в разд. 1, пример 1°.

При этом предполагается, что (по крайней мере асимптотически) имеет место соотношение

$$\{\mu(\tau + \tau')\} = \hat{R}(\tau + \tau')\{\mu^{(0)}\} = \hat{R}(\tau')\hat{R}(\tau)\{\mu^{(0)}\} = \hat{R}(\tau')\{\mu(\tau)\} \tag{10.2}$$

Видно, что оператор $\hat{R}(\tau)$ обладает групповым свойством

$$\hat{R}(\tau + \tau') = \hat{R}(\tau')\hat{R}(\tau), \quad \hat{R}(0) = \hat{I} \tag{10.3}$$

однако поскольку процесс усреднения по быстрым модам необратим ($\tau', \tau \geq 0$), то обратного элемента не существует, и совокупность преобразований $\hat{R}(\tau)$ является не группой, а полугруппой.

Росту параметра τ соответствует переход к уравнению для мод все более крупных масштабов. При $\tau \rightarrow \infty$ изображающая точка стремится к некоторому предельному значению $\{\mu^*\}$, удовлетворяющему условию

$$\hat{R}(\tau)\{\mu^*\} = \{\mu^*\} \tag{10.4}$$

Из условия (10.4) следует, что $\{\mu^*\}$ – неподвижная (стационарная) точка РГ преобразования. Тем самым асимптотическое поведение в крупномасштабной области $\tau \rightarrow \infty$ задается набором параметров μ_i^* , находимых из уравнения (10.4). Иными словами, набор параметров $\{\mu^*\}$ – собственный вектор оператора РГ преобразования. Эти параметры определяются свойствами РГ преобразования и не зависят от выбора ис-

ходных микроскопических параметров системы $\mu_i^{(0)}$, что соответствует универсальности асимптотического поведения системы.

Функциональное уравнение (10.2) может быть записано в форме дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \{ \mu(\tau) \} = \hat{H}(\{ \mu(\tau) \} \{ \mu(\tau) \}), \quad \hat{H}(\{ \mu(\tau) \}) = \frac{\partial \hat{R}(\tau)}{\partial \tau} \quad (10.5)$$

где в случае выполнения группового закона композиции (10.2) матричный оператор \hat{H} , определяемый соотношением $\hat{R}(\delta\tau) = \hat{I} + \hat{H}\delta\tau$, оказывается не зависящим от τ и будет генератором группы ренормализационных преобразований. В этом случае согласно уравнению (10.2) оператор конечных РГ преобразований может быть представлен в форме

$$\hat{R}(\tau) = \exp(\hat{H}\tau) \quad (10.6)$$

аналогично формуле (4.5) для группы операторов сдвигов аргумента функции.

Уравнение для определения стационарных точек формулируется в виде

$$\hat{H}(\{ \mu^* \}) \{ \mu^* \} = 0 \quad (10.7)$$

Как и в рассмотренных в разд. 1 тривиальных примерах РГ инвариантности, в данном случае имеет место независимость асимптотики крупномасштабного поведения от способа задания “начальных условий” $\{ \mu(\tau) \}|_{\tau=0} = \{ \mu^{(0)} \}$.

При рассмотрении критических явлений все физические системы, исходные отображающие точки которых $\{ \mu^{(0)} \}$ при РГ преобразовании $\hat{R}(\tau)|_{\tau \rightarrow \infty}$ переходят в одну неподвижную точку, обладают одинаковыми функциями распределения в крупномасштабной области. Знание собственных векторов задачи (10.7) позволяет исследовать поведение изображающей точки системы $\{ \mu(\tau) \} = \{ \mu^* + \delta\mu(\tau) \}$ вблизи неподвижной точки. Для этого достаточно найти по теории возмущений поправки к собственным функциям и собственным значениям, используя линеаризованное вблизи неподвижной точки выражение для оператора \hat{H} и представляя решение возмущенной задачи в виде разложения по собственным функциям невозмущенной задачи. Тем самым объясняется универсальность крупномасштабного поведения различных систем, и в частности универсальность характеризующих поведение вблизи критической температуры так называемых критических показателей (критических индексов), которые оказываются независимыми от исходных параметров системы – начального набора $\{ \mu^{(0)} \}$. Аналогичным образом объясняется универсальность поведения различных нелинейных систем при переходе к хаосу через последовательность удвоений периода [20].

11. Метод ренормгруппы в теории турбулентности. Реализующийся при больших числах Рейнольдса режим развитой турбулентности в инерционном интервале спектра – типичный пример многомодовой системы, для которой метод РГ должен успешно работать. Это связано со свойством локальности межмодовых взаимодействий в пространстве волновых чисел и каскадным механизмом взаимодействий мод с существенно различающимися волновыми числами (масштабами). В случае гидродинамической системы природа локальности может быть легко объяснена: взаимодействие вихрей с существенно различными масштабами сводится к кинематическому эффекту переноса крупномасштабными вихрями мелкомасштабных без заметного искажения их формы, т.е. без перераспределения энергии между модами. Взаимодействия мод разных масштабов образуют каскадную цепочку, состоящую из функционально подобных (т.е. различающихся масштабами и набором числовым параметров) звеньев. Вследст-

вие локальности взаимодействий для определения свойств отдельного звена цепочки достаточно учесть взаимодействия данной моды только с модами, соседними в пространстве волновых чисел. В свою очередь, знание характеристик отдельного звена цепочки (задаваемых β -функцией) позволяет найти свойства длинной каскадной цепочки путем решения дифференциального уравнения РГ, вытекающего из свойства ренормализационной инвариантности. Обзор работ по применению метода РГ для описания турбулентности можно найти в [12, 39].

В качестве конкретного примера рассмотрим вычисление турбулентной вязкости $\tilde{\nu}(k)$, феноменологически учитывающей процессы затухания моды с волновым вектором k за счет нелинейных взаимодействий с остальными модами [12, 40, 41]. Турбулентная вязкость отличается от обсуждавшейся в разд. 3 подсеточной вязкости, учитывающей усредненное влияние взаимодействий только с подсеточными модами.

В качестве математической модели турбулентности используется система уравнений Навье–Стокса при наличии внешней случайной силы типа гауссова белого шума. Предполагается, что статистическое решение гидродинамических уравнений должно воспроизводить результаты феноменологической теории Колмогорова [12]. Внешняя случайная сила $f(k, \omega)$ задается своей парной корреляционной функцией вида

$$\langle f_i(\mathbf{k}, \omega) f_i(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \delta_{ij} D(k) (2\pi)^d \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') (2\pi) \delta(\omega + \omega') \quad (11.1)$$

(d – размерность пространства).

Подобие физической картины на разных масштабах предполагает, что функция $D(k)$ должна быть степенной и может быть записана в форме

$$D(k) = 2D_0 k^{-y} \quad (11.2)$$

При $y = d$ размерность постоянной D_0 совпадает с размерностью скорости диссипации энергии, которая согласно теории Колмогорова является единственным существенным размерным параметром, характеризующим свойства турбулизованной жидкости в инерционном интервале спектра. Поэтому значение $y = d$ следует признать соответствующим реальной (физической) теории. Однако при $y = d$ в теории возникает расходимость (инфракрасные), которые нельзя устранить перенормировкой (имеет место перенормируемость). Анализ степеней расходимости показывает, что при $y = d - 4 = y_c$ теория будет содержать логарифмические расходимости в ультрафиолетовой области, которые могут быть включены в константу перенормировки коэффициента вязкости (имеет место перенормируемость). Следуя процедуре ϵ -разложения, будем строить теорию для случая $y = y_c + \epsilon$ в окрестности точки $\epsilon = 0$ с последующим аналитическим продолжением в физическую точку $\epsilon = 4$, как это делается при применении метода размерной регуляризации в квантовой теории поля [29, 30]. При этом D_0 уже не будет иметь размерность скорости диссипации энергии. Можно, однако, оставить размерность D_0 неизменной, положив $D(k) = D_0 k^{-d} (k/\mu)^{4-\epsilon}$ [41], где μ – некоторый параметр с размерностью волнового числа.

Эффективная вязкость $\tilde{\nu}(k, \omega)$ может быть определена через обратную функцию Грина посредством соотношения [12]

$$G^{-1}(k, \omega) = -i\omega + \nu_0 k^2 - \Sigma(k, \omega) = [G^{(0)}(k, \omega)]^{-1} - \Sigma(k, \omega) = -i\omega + \tilde{\nu}(k, \omega) k^2 \quad (11.3)$$

где ν_0 – исходная (затравочная) вязкость, $\Sigma(k, \omega)$ – величина, называемая в квантовой теории поля оператором собственной энергии.

В перенормированной теории возмущений в качестве нулевого приближения для функции Грина используется

$$G^{(0)}(k, \omega) = [-i\omega + \nu_0 k^2]^{-1} \quad (11.4)$$

Перенормировка вязкости сводится к замене в уравнении (11.3) $v_0 \rightarrow v = v_0 Z^{-1}$ и добавки к оператору собственной энергии компенсирующего эту замену контрчлена

$$\Sigma(k, \omega) \rightarrow \Sigma^R(k, \omega) = \Sigma(k, \omega) + (v - v_0)k^2 = \Sigma(k, \omega) + v(1 - Z)k^2 \quad (11.5)$$

В качестве нулевого приближения перенормированной теории возмущений используется

$$G^{(0)R}(k, \omega) = [-i\omega + vk^2]^{-1} \quad (11.6)$$

Далее будет рассматриваться только статическая эффективная вязкость

$$\tilde{v}(k) = v_0 - \Sigma(k, 0)/k^2 = v - \Sigma^R(k, 0)/k^2 \quad (11.7)$$

Ренормализационная инвариантность означает произвол в разбиении правой части уравнения (11.7) на невозмущенную часть и возмущение. Этот произвол находит отражение в выборе константы перенормировки Z и может быть сведен к произволу в выборе точки нормировки, т.е. значения волнового числа μ , при котором коэффициент эффективной вязкости будет совпадать с перенормированным коэффициентом вязкости v :

$$\tilde{v}(\mu) = v, \text{ или } \Sigma^R(\mu, 0) = 0 \quad (11.8)$$

Условие нормировки (11.8) выполняет функцию граничных условий, и РГ инвариантность соответствует наличию произвола в способе задания этих условий.

Эффективная вязкость $\tilde{v}(k)$ является функцией k , D_0 и задающих граничные условия (10.8) двух параметров v и μ . Вследствие независимости формы решения от способа задания граничных условий имеем

$$\tilde{v} = f(k, D_0; v, \mu) = f(k, D_0; v_1, \mu_1) \quad (11.9)$$

На основании соображений размерности и соотношения (11.9) можно написать

$$f(k, D_0; v, \mu) = v\varphi(k/\mu, D_0/(v^3\mu^\epsilon)) = v_1\varphi(k/\mu_1, D_0/v_1^3\mu_1^\epsilon) \quad (11.10)$$

Нетрудно показать, что функция

$$\tilde{g}(x, g) = gx^{-\epsilon}/\varphi^3(x, g), \quad (g = D_0/v^3\mu^\epsilon, x = k/\mu) \quad (11.11)$$

является инвариантом РГ преобразования $v \rightarrow v_1, \mu \rightarrow \mu_1$, т.е.

$$\tilde{g}(k/\mu, D_0/v^3\mu^\epsilon) = \tilde{g}(k/\mu_1, D_0/v_1^3\mu_1^\epsilon) \quad (11.12)$$

и удовлетворяет условию нормировки

$$\tilde{g}(1, g) = g \quad (11.13)$$

Функция $\tilde{g}(x, g)$ является зависящим от волнового числа фактическим параметром разложения в ряд перенормированной теории возмущений, она представляет собой аналог инвариантного заряда в квантовой теории поля [3]. Из условия РГ инвариантности функции \tilde{g} следует, что она удовлетворяет функциональному (1.28) и дифференциальному (1.31) уравнениям РГ.

В низшем приближении перенормированной теории возмущений для функции $\varphi(x, g)$ получается [40]

$$\varphi(x, g) = 1 + A(d, \epsilon)q[x^{-\epsilon} - 1]/\epsilon \quad (11.14)$$

(последнее слагаемое в квадратных скобках учитывает вклад контрчлена, обеспечивающего выполнение условия нормировки). Из условия (11.13) видно, что функция φ имеет полюсную особенность в точке $\epsilon = 0$, отражающую наличие логарифмической расходимости в ультрафиолетовой области спектра волновых чисел. В соответ-

ствии с процедурой ϵ -разложения оставим только вклад этой полюсной особенности, положив $\epsilon = 0$ в выражении для $A(d, \epsilon)$ (вычет в точке $\epsilon = 0$). Соответствующий расчет дает [33, 40]

$$A(d, 0) = \frac{d-1}{4(d+2)} \frac{s_d}{(2\pi)^d}, \quad s_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (11.15)$$

Используя соотношения (11.11), (11.14) и определение β -функции, найдем

$$\beta(g) = -\epsilon g + 3A(d, 0)g^2 = g[-\epsilon + 3A(d, 0)g] \quad (11.16)$$

Из равенства (11.16) следует существование двух неподвижных точек – тривиальной $g^* = 0$, соответствующей отсутствию взаимодействий (асимптотическая свобода), и нетривиальной $g^* = \epsilon/(3A(d, 0))$. Поскольку производная β -функции в нетривиальной неподвижной точке положительна, то эта точка будет устойчивой в инфракрасном пределе $x = k/\mu \rightarrow 0$ (крупномасштабная область). Таким образом, в соответствующей инерционному интервалу асимптотической области для эффективной вязкости найдем

$$\tilde{\nu}(k) \approx (D_0/q^*)^{1/3} k^{-\epsilon/3} = [3A(d, 0)/\epsilon]^{1/3} D_0^{1/3} k^{-\epsilon/3} \equiv \nu_T(k) \quad (11.17)$$

При $\epsilon = 4$ формула (11.17) воспроизводит закон Ричардсона–Колмогорова для турбулентной вязкости [12], который следует из соображений размерности. Однако метод РГ позволяет определить и числовой коэффициент, если знать связь между скоростью диссипации энергии \mathcal{E} и параметром D_0 в (10.2), а также и теоретически вычислить универсальную константу Колмогорова. Был предложен способ нахождения этой связи [42], в результате чего для константы Колмогорова получилось выражение

$$C_K = (2/3)[2(d+2)]^{1/3} (=1.44 \text{ при } d=3) \quad (11.18)$$

хорошо согласующееся с имеющимися экспериментальными данными.

Обратим внимание на то, что пользуясь методом РГ, можно найти выражение для эффективной вязкости, справедливое не только в асимптотической области $k \rightarrow 0$, но и в более широкой области спектра волновых чисел. В частности, если принять, что в мелкомасштабной области $k \rightarrow \infty$ величина эффективной вязкости стремится к молекулярной $\tilde{\nu}(k) \rightarrow \nu_0$, решение дифференциального уравнения РГ дает

$$\tilde{\nu}(k) = [\nu_0^3 + \nu_T^3(k)]^{1/3} \quad (11.19)$$

Функция $\nu_T(k)$ определена формулой (11.17).

В рамках вилсоновской формулировки метода РГ соответствующее рассмотрение известно как теория Яхота–Орсага [43] (более подробно см. [12] и обзор [39]).

12. Заключение. Не будем перечислять имеющиеся многочисленные применения метода РГ в разных областях механики и прикладной математики, поскольку эта задача представляется трудно выполнимой, тогда как цель обзора – изложение идей и иллюстрация некоторых технических приемов, лежащих в основе метода. Тем не менее следует упомянуть еще об одной возможности применения метода РГ, связанной с построением в рамках метода теории возмущений асимптотических решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр ϵ . Речь идет о так называемых сингулярных возмущениях, когда поиск решения в виде прямого разложения в ряд по степеням малого параметра (“наивная” теория возмущений) не приводит к равномерно-пригодным выражениям [44] в связи с появлением в разложениях так называемых вековых членов. Подобная ситуация имеет место в случае, когда уравнение содержит малый параметр при старшей производной или когда группа симметрии невозмущенного уравнения нарушается возмущением (например, происходит изменение типа дифференциального уравнения).

Традиционная трактовка подобных задач в рамках метода растянутых координат или параметров, метода сращиваемых внешних и внутренних асимптотических разложений, методики усреднения Крылова–Боголюбова, метода многих масштабов и других подходов [44] чаще всего основывается на анализе физической картины описываемых явлений. Подобный анализ и определяет выбор метода исследования. В этом смысле метод РГ имеет то преимущество, что дает единый подход к описанию явлений, позволяющий выделить устойчивые структурные свойства системы на фоне несущественных деталей [45]. Исходный момент этого подхода – обычная теория возмущений, применение которой не требует априорного знания физической картины явления. Дальнейшее улучшение теории возмущений на основе свойства ренормализационной инвариантности полного ряда “автоматически” выбирает адекватный задаче метод исследования. Соответствующие примеры можно найти в [46].

Однако метод РГ позволяет не только улучшить теорию возмущений, но и упростить асимптотический анализ сингулярного поведения решений, которые в окрестности сингулярной точки становятся масштабно-инвариантными (самоподобными) и техника РГ анализа дает возможность вычислять поправки к показателям степенного поведения решений, следующим из “наивных” соображений размерности (показатели неполной автомодельности [25] или аномальные размерности).

Целесообразно обратить внимание на следующие два обстоятельства.

Успехи метода РГ, в частности при описании универсального поведения термодинамической системы вблизи критической точки при фазовых переходах второго рода, породили надежды на возможность широкого использования этого метода при анализе сложных систем, для описания которых традиционные подходы оказываются бессильными. В первую очередь подобные надежды связывались с вилсоновской формулировкой метода РГ, которая в отличие от квантово-полевой формулировки более прозрачна и доступна для широкого круга исследователей, недостаточно знакомых с формализмом квантовой теории поля. Как уже было сказано, вилсоновская формулировка основывается на идее последовательного уменьшения числа мод в многомодовой системе путем процедуры Каданова усреднения по узкой полосе спектра быстрых (мелкомасштабных) мод (“крупнозернистое огрубление”). Нередко процедура Каданова стала отождествляться с методом РГ и ее начали применять формально, без предварительного анализа вопроса о наличии РГ инвариантности.

Так, например, при вычислении турбулентной вязкости в теории Яхота–Орсага [43] или при нахождении эффективных коэффициентов переноса в случайном поле скоростей [47] или в случайно-неоднородной среде [48, 49] рассматривался определяющий диффузионные процессы коэффициент переноса $\tilde{K}(q, K_0)$, зависящий от волнового числа q и коэффициента молекулярного переноса K_0 . При введении обрезания по волновым числам принималось, что усредненное влияние отброшенных при обрезании быстрых мод с волновыми числами $q > \Lambda$ феноменологически учитывается заменой коэффициентов молекулярного переноса K_0 на перенормированные значения $K(\Lambda)$ и рассматривался коэффициент переноса $\tilde{K}(q, \Lambda, K(\Lambda))$, зависящий от волнового числа q , параметра обрезания Λ и перенормированного коэффициента переноса $K(\Lambda)$. В дальнейшем в низшем приближении теории возмущений (перенормированной) определялся коэффициент $\tilde{K}(q, \Lambda, K(\Lambda))$ в крупномасштабном пределе $q \rightarrow 0$ и вычислялась величина

$$\lim_{\delta\Lambda \rightarrow 0} \frac{\tilde{K}(0, \Lambda, K(\Lambda)) - \tilde{K}(0, \Lambda - \delta\Lambda, K(\Lambda))}{\delta\Lambda} = F(K(\Lambda))$$

которая отождествлялась с величиной $dK(\Lambda)/d\Lambda$. Посредством интегрирования дифференциального уравнения $dK/d\Lambda = F(K)$ с граничным условием $K(\infty) = K_0$ находи-

лась функция $K(\Lambda, K_0)$, которая затем отождествлялась с функцией $\tilde{K}(q, K_0)$. Процедура, когда вычисления проводятся в пределе $q/\Lambda \rightarrow 0$, а потом принимается $\Lambda = q$, представляется слишком противоречивой и не может быть оправдана. К тому же описанная процедура не основывается на РГ преобразовании, поскольку процедура Каданова не дополняется преобразованием масштаба, являющимся составной частью РГ преобразования.

Второе обстоятельство, на которое следует обратить внимание, связано с трактовкой роли локальных и нелокальных взаимодействий в рамках РГ подхода. Описанная выше техника нахождения уравнения для $K(\Lambda)$ основывалась на рассмотрении существенно нелокального прямого влияния быстрых мод из интервала волновых чисел $\Lambda - \delta\Lambda < k < \Lambda$ на медленные моды с волновыми числами q при $q/k \rightarrow 0$. В применении к теории турбулентности было высказано предположение [50–52], что при малых ϵ локальные взаимодействия слабы, и соответствующее предположение получило название “принцип отдаленных взаимодействий” (“distant interaction principle”) [53]. Утверждение, что с помощью метода РГ учитываются нелокальные взаимодействия, а роль локальных взаимодействий мала, лежит в основе техники проведения расчетов в РГ теории турбулентности Яхота–Орсага [43]. Однако это противоречит взглядам Вилсона на метод РГ как на способ описания ответственных за каскадные процессы локальных взаимодействий, наличие которых проявляется в появлении логарифмических расходимостей и особенностей по ϵ вблизи “логарифмической теории” [17, 18]. Было сформулировано утверждение [39, 54], что критерием значимости локальных и нелокальных взаимодействий должен быть их относительный вклад не в рассматриваемые физические величины [53], а в β -функцию, содержащую в себе всю информацию о системе в рамках РГ описания. Проведенные оценки показали [39, 54], что согласно этому критерию вблизи “логарифмической” теории доминирующую роль играют локальные взаимодействия, что согласуется с представлениями Вилсона.

Таким образом, несмотря на впечатляющие успехи метода РГ применение этого метода требует некоторой аккуратности. Во-первых, нельзя отождествлять метод РГ только с процедурой Каданова редукции числа мод в многомодовой системе путем последовательного усреднения по полосе спектра быстрых мод (к сожалению, подобное заблуждение оказалось весьма распространенным). Во-вторых, следует учитывать, что РГ инвариантность имеет место не всегда, а только в “логарифмических” теориях (содержащих логарифмические расходимости). Если теория не является “логарифмической”, то по аналогии с методом размерной регуляризации в квантовой теории поля следует применять процедуру ϵ -разложения, т.е. проводить рассмотрение вблизи “логарифмической” теории (которой соответствует $\epsilon = 0$), и затем осуществлять аналитическое продолжение по ϵ в точку, соответствующую реальной теории (см., например, [55]). Подобный подход удобнее осуществлять в рамках изложенной выше теоретико-полевой формулировки метода РГ, не содержащей дополнительных (и в ряде случаев противоречивых) предположений, используемых иногда в вилсоновской формулировке метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
2. Olver P.J. Application of Lie Groups to Differential Equations. N.Y., etc.: Springer, 1986 = Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 597 с.
4. Wilson K.J., Kogut J. The renormalization group and the ϵ -expansion // Physics Reports. 1974. V. 12C. № 2. P. 75–199 = Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и ϵ -разложение. М.: Мир, 1975. 256 с.
5. Ma S.-K. Modern Theory of Critical Phenomena. L.: Benjamin, 1976 = Ма Ш.К. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 299 с.

6. Мнацаканян М.А. Нелинейные задачи переноса и ренормализационная группа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 4. С. 856–860.
7. *Фейнман Р.П., Хибс А.Р.* Quantum Mechanics and Path Integrals. N.Y.: McGraw-Hill, 1965 = *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 382 с.
8. *Розанов А.Ю.* Случайные процессы. Краткий курс. М.: Наука, 1979. 184 с.
9. *Ширков Д.В.* Ренормализационная группа, принцип инвариантности и функциональная автомодельность // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 1. С. 64–67.
10. *Ширков Д.В.* Ренормгруппа и функциональная автомодельность в различных областях физики // Теорет. и мат. физика. 1984. Т. 60. № 2. С. 218–223.
11. *Gell-Mann M., Low F.E.* Quantum electrodynamics at small distances // Phys. Rev. Ser 2. 1954. V. 95. № 5. P. 1300–1312.
12. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. СПб.: Гидрометеиздат. Т. 1. 1992. 694 с.; Т. 2. 1996. 741 с.
13. *Теодорович Э.В.* Развитая турбулентность и метод ренормгруппы // Материалы 3-й Всесоюз. школы по гидрофизике. Калининград, 1989. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1990. С. 72–86.
14. *Овсянников Л.В.* Общее решение уравнений ренормализационной группы // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 6. С. 1112–1114.
15. *Stueckelberg E.C.J., Petermann A.* La normalisation des constantes dans la theorie des quanta // Helv. Phys. Acta. 1953. V. 26. P. 499–520.
16. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Приложение ренормализационной группы к улучшению формул теории возмущений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. № 3. С. 391–394.
17. *Wilson K.* Renormalization group methods // Adv. Math. 1975. V. 16. № 2. P. 170–186.
18. *Wilson K.G.* The renormalization group: critical phenomena and the Kondo problem // Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. № 4. P. 773–840.
19. *Gennes P.-G. De.* Scaling Concepts in Polymer Physics. Ithaca; London: Cornell Univ. Press, 1979 = *Де Жен П.* Идеи скейлинга в физике полимеров. М.: Мир, 1982. 368 с.
20. *Feigenbaum M.J.* Universal behaviour in nonlinear systems // Los Alamos Sci., 1980. V. 1. № 1. P. 4–27 = *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141. № 2. С. 343–374.
21. *Ширков Д.В.* Ренормализационная группа и функциональная автомодельность в различных областях физики // Тр. 3-го Междунар. симпоз. по избр. проблемам статистической механики. Дубна: ОИЯИ, 1985. Т. 2. С. 310–321.
22. *Теодорович Э.В.* Явления турбулентного переноса и метод ренормализационной группы // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 218–224.
23. *Wilson K.G.* Non-Lagrangian models of current algebra // Phys. Rev. 1969. V. 179. № 6. P. 1499–1512.
24. *Goldenfeld N., Martin O., Oono Y.* Intermediate asymptotic and renormalization group theory // J. Scient. Comput. 1989. V. 4. № 4. P. 355–372.
25. *Баренблатт Г.И.* Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 207с.
26. *Goldenfeld N., Martin O., Oono Y., Liu F.* Anomalous dimension and the renormalization group in a nonlinear diffusion process // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. № 12. P. 1361–1364.
27. *Гинзбург И.С., Ентов В.М., Теодорович Э.В.* Метод ренорм-группы в задаче конвективной диффузии с необратимой сорбцией // ПММ. 1991. Т. 56. Вып. 1. С. 68–76.
28. *Wilson K.G., Fisher M.E.* Critical exponents in 3.99 dimensions // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28. № 4. P. 240–243.
29. *'t Hooft G., Veltman M.* Regularization and renormalization of gauge fields // Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. № 1. P. 189–213.
30. *Leibbrandt G.* Introduction to the technique of dimensional regularization // Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. № 4. P. 849–876.
31. *Collins J.P.* Renormalization. Cambridge: Univ Press, 1986 = *Коллинз Дж.* Перенормировка. М.: Мир, 1988. 446 с.

32. *Ramond P.* Field Theory. A Modern Primer. L., etc: Benjamin Publ. Co., 1981 = *Рамон П.* Теория поля. Современный вводный курс. М.: Мир, 1984. 332 с.
33. *Теодорович Э.В.* О роли локальных и нелокальных взаимодействий в формировании режима развитой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 36–42.
34. *Теодорович Э.В.* Метод ренормализационной группы в задаче переноса при наличии нелинейных источников и стоков // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. № 4. С. 1497–1510.
35. *Whittaker E.T., Watson J.N.* A Course of Modern Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1962 = *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
36. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазинелинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.
37. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
38. *Kadanoff L.P.* Scaling laws for Ising model near T_c // Physics. 1966. V. 2. № 6. P. 263–272.
39. *Теодорович Э.В.* Применение метода ренормализационной группы для описания турбулентности (обзор) // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 2. С. 149–163.
40. *Теодорович Э.В.* К вычислению турбулентной вязкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 29–36.
41. *Теодорович Э.В.* Вычисление турбулентной вязкости на основе метода ренормгруппы // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 4. С. 836–839.
42. *Lam S.H.* On the RNG theory of turbulence // Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 5. P. 1007–1017.
43. *Yakhot V., Orszag S.A.* Renormalization-group analysis of turbulence. I. Basic theory // J. Scient. Comput. 1986. V. 1. № 1. P. 3–51.
44. *Nayfeh A.H.* Perturbation Methods. N.Y., etc: Wiley, 1973 = *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
45. *Chen L.-Y., Goldenfeld N., Oono Y.* Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 1. P. 376–394.
46. *Kovalev V.F., Pustovalov V.V., Shirkov D.V.* Group analysis and renormgroup symmetries // J. Math. Phys. 1998. V. 39. № 2. P. 1170–1188.
47. *Dean D.S., Drummond I.T., Horgan R.R.* Perturbation schemes for flow in random media // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. V. 27. № 15. P. 5135–5144.
48. *Jaekel U., Vereecken H.* Renormalization group analysis of macrodispersion in a directed random flow // Water Resour. Res. 1997. V. 33. № 10. P. 2287–2299.
49. *Hristopulos D.T., Christakos G.* Renormalization group analysis of permeability upscaling // Stochastic Environ. Res. Risk Assessm. 1999. V. 13. № 1–2. P. 131–161.
50. *Kraichnan R.H.* Hydrodynamic turbulence and the renormalization group // Phys. Rev. A. 1982. V. 25. № 6. P. 3281–3289.
51. *Fournier J.-D., Frisch U.* Remarks on the renormalization group in statistical dynamics // Phys. Rev. A. 1983. V. 28. № 2. P. 1000–1002.
52. *Dannevik W.P., Yakhot V., Orszag S.A.* Analytical theories of turbulence and the ϵ -expansion // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 7. P. 2021–2029.
53. *Kraichnan R.H.* An interpretation of the Yakhot–Orszag turbulence theory // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 8. P. 2400–2405.
54. *Теодорович Э.В.* К теории турбулентности Яхота–Оржега // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 40–51.
55. *Теодорович Э.В.* Метод ренормализационной группы в задаче об эффективной проводимости случайно-неоднородной пористой среды // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. № 1. С. 79–89.