УДК 532.591

© 2004 г. И. С. Жукова, А. И. Саичев

СВОЙСТВА СГУСТКОВ ПРИМЕСИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

В рамках модели Крейчнана изучены характерные свойства локализации инерционной и плавучей примеси в турбулентной среде при разных соотношениях между дивергентной и вихревой частями поля скорости частиц примеси.

В последние годы интенсивно, теоретически и экспериментально, изучаются свойства перемежаемости и стохастической локализации примеси в случайно движущихся средах (см., например, [1–6]). Уже установлено (см., например, [1, 5]), что главный механизм локализации связан с наличием дивергентной компоненты поля скорости среды, возникающей при инерционном движении частиц [7]. Соответственно ниже полагается, что поле скорости примеси обладает, наряду с вихревой, и дивергентной компонентой; само это поле описывается моделью Крейчнана [8] с заданным корреляционным тензором.

Анализ свойств локализации примеси требует адекватных методов статистического описания. Предлагается один из подобных методов, основанный на анализе средней плотности вокруг произвольно выбранной (в дальнейшем назовем ее меченой) частицы примеси, и условных распределений относительной диффузии частиц. На основе предложенного анализа удается вычислить среднюю массу и характерные размеры сгустков, а также проследить, как меняется характерная форма сгустков в зависимости от соотношения между дивергентной и вихревой компонентами скорости движения частиц.

1. Средняя плотность вокруг меченой частицы. Наиболее эффективным методом статистического описания перемежаемости и стохастической локализации примеси в турбулентной среде является исследование лагранжевых статистических характеристик примеси (см., например, [9–12]). Одной из разновидностей лагранжевых характеристик примеси служит введенная ниже средняя плотность вокруг меченой частицы.

Рассмотрим плотность частицы примеси единичной массы

$$\tilde{n}(\mathbf{z}, t; \boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}) = \delta(\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}+\mathbf{s}, t) - \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{z}) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, t)$ – текущие координаты меченой частицы, $\mathbf{s}$ – координаты остальных частиц в лагранжевой системе координат с центром в точке $\boldsymbol{\xi}$, где расположена меченая частица, а $\mathbf{z}$ – эйлеровы координаты, отсчитанные от меченой частицы, попавшей в текущий момент t в точку $\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, t)$. В данной работе за лагранжевы координаты взяты координаты частиц в начальный момент времени $t = 0$. При этом, в частности,

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}+\mathbf{s}, 0) = \boldsymbol{\xi}+\mathbf{s}$$

Пусть известна начальная плотность $n_0(\mathbf{s})$ вокруг меченой частицы. Тогда из соотношения (1.1) имеем среднюю плотность вокруг меченой частицы

$$\langle n_c(\mathbf{z}, t; \boldsymbol{\xi})\rangle = \int g(\mathbf{z}; \boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}, t) n_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \tag{1.2}$$

Сюда входит распределение вектора, соединяющего две частицы:

$$g(\mathbf{z}; \boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}, t) = \langle \delta(\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}+\mathbf{s}, t) - \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{z})\rangle, \quad g(\mathbf{z}; \boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}, t=0) = \delta(\mathbf{s}-\mathbf{z})$$

Если случайное поле скорости примеси $\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{x}, t)$ статистически однородно, зависимость от $\boldsymbol{\xi}$ в равенстве (1.2) пропадает и оно принимает вид

$$\langle n_c(\mathbf{z}, t)\rangle = \int g(\mathbf{z}; \mathbf{s}, t) n_0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \tag{1.3}$$

Пусть известно уравнение для распределения относительной диффузии $g(\mathbf{z}; \mathbf{s}, t)$

$$\partial g/\partial t = \mathcal{L}g, \quad g(\mathbf{z}; \mathbf{s}, t = 0) = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{s}) \tag{1.4}$$

где $\mathcal{L}$ – некоторый оператор в пространстве $\mathbf{z}$. Тогда средняя плотность вокруг меченой частицы подчиняется задаче Коши

$$\partial\langle n_c\rangle/\partial t = \mathcal{L}\langle n_c\rangle, \quad \langle n_c(\mathbf{z}, t = 0)\rangle = n_0(\mathbf{z}) \tag{1.5}$$

Средняя плотность вокруг меченой частицы позволяет судить о массах и характерных размерах сгустка. Покажем это на примере стационарной плотности сгустка вокруг меченой частицы

$$n_{\text{st}}(\mathbf{z}) = \lim_{t \to \infty} \langle n_c(\mathbf{z}, t)\rangle \tag{1.6}$$

Если средняя плотность примеси однородна: $\langle n(\mathbf{x}, t)\rangle = n_0$, то указанная выше стационарная плотность вокруг меченой частицы подчиняется краевой задаче

$$\mathcal{L}n_{\text{st}}(\mathbf{z}) = 0, \quad n_{\text{st}}(\mathbf{z})|_{|\mathbf{z}| \to \infty} = n_0 \tag{1.7}$$

Условие на бесконечности учитывает тот факт, что остальные сгустки создают “фон” со средней плотностью n_0. Превышение плотности сгустка над средней плотностью примеси задает функция

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = n_{\text{st}}(\mathbf{z}) - n_0$$

Определим с ее помощью среднюю массу сгустка

$$M = \int \mathcal{F}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \tag{1.8}$$

Назовем средним профилем сгустка функцию $\mathcal{G}(\mathbf{z})$, задающую распределение частиц вокруг центра сгустка. Средний профиль не совпадает с $\mathcal{F}(\mathbf{z})$, так как меченая частица может находиться в любой точке сгустка. Этот факт выражен равенством

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \langle \mathcal{G}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_{\text{tag}})\rangle \tag{1.9}$$

где $\mathbf{z}_{\text{tag}}$ – координата меченой частицы в системе координат с началом в центре сгустка. Естественно взять распределение координат меченой частицы, по которой идет усреднение в равенстве (1.9), в виде

$$g(\mathbf{z}) = \mathcal{G}(\mathbf{z})/M$$

Раскрыв среднее (1.9) с помощью этого распределения, придем к интегральному уравнению относительно среднего профиля сгустка

$$\mathcal{G}(\mathbf{z}) \otimes \mathcal{G}(\mathbf{z}) = M\mathcal{F}(\mathbf{z})$$

Найдем стационарное решение уравнения (1.5) в изотропной среде и в рамках модели Крейчнана [10]. Напомним, в модели Крейчнана предполагается, что поле скорости турбулентной среды дельта-коррелировано по времени, а корреляционный тензор поля скорости $\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{x}, t)$ среды полагается равным

$$\langle \upsilon_i(\mathbf{x}, t)\upsilon_j(\mathbf{x} + \mathbf{z}, t + \tau)\rangle = \mathcal{D}_{ij}(\mathbf{z})\delta(\tau)$$

Сюда входит тензор коэффициентов диффузии поля скорости частиц

$$\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{z}) = -\delta_{ij}\Delta A_e(z) + \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}[A_e(z) - A_p(z)]$$

выраженный через скалярные поля, ответственные за дивергентность скорости (A_p) и его вихревую часть (A_e).

В рамках модели Крейчнана уравнение (1.5) принимает вид (см., например, [12])

$$\frac{\partial \langle n_c \rangle}{\partial t} = 2\mu\Delta\langle n_c\rangle + 2\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}[B_{ij}(\mathbf{z})\langle n_c\rangle], \quad B_{ij}(\mathbf{z}) = \mathcal{D}_{ij}(0) - \mathcal{D}_{ij}(\mathbf{z}) \tag{1.10}$$

Помимо турбулентных флуктуаций поля скорости среды здесь учтена еще молекулярная диффузия частиц с коэффициентом молекулярной диффузии μ, играющая принципиальную роль при анализе эволюции плотности примеси (см., например, монографию [13], где детально обсуждается роль молекулярной диффузии при описании флуктуаций плотности примеси).

Для радиально-симметричного распределения $g = g(z, t)$ уравнение (1.10) переходит в следующее:

$$\frac{\partial \langle n_c \rangle}{\partial t} = \frac{2}{z^{d-1}}\frac{\partial}{\partial z}z^{d-1}\left[\frac{\partial}{\partial z}[(\mu + P_\| + E_\|)\langle n_c\rangle] + Q\langle n_c\rangle\right] \tag{1.11}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_\|(z) &= \frac{d^2 A_p(z)}{dz^2} + \mathcal{D}_p, \quad E_\|(z) = (d-1)\left[\frac{1}{z}\frac{dA_e(z)}{dz} + \mathcal{D}_e\right] \\ Q(z) &= (d-1)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\frac{dA_p(z)}{dz}\right) - \frac{dE_\|(z)}{dz} \end{aligned} \tag{1.12}$$

d – размерность пространства, и использовано асимптотическое разложение

$$A_{e,p}(z) = A_{e,p}(0) - \frac{z^2}{2}\mathcal{D}_{e,p} + \frac{z^4}{24}B_{e,p} - \ldots \quad (z \to 0) \tag{1.13}$$

указывающее природу коэффициентов $\mathcal{D}_{e,p}$ в соотношениях (1.12). Полагается также, что функции $A_{e,p}(z)$ удовлетворяют условию ослабления корреляций с расстоянием и достаточно быстро стремятся к нулю при $z \to \infty$, обеспечивая сходимость возникающих ниже интегралов.

Стационарная плотность $n_{\text{st}}(z)$ (1.6) подчиняется краевой задаче (1.7)

$$\frac{d}{dz}[(\mu + P_\| + E_\|)n_{\text{st}}] + Qn_{\text{st}} = 0, \quad n'_{\text{st}}(0) = 0, \quad n_{\text{st}}(\infty) = n_0$$

решение которой таково:

$$n_{\text{st}}(z) = n_0 \exp\left[\int_z^\infty \frac{dP(y)}{\mu + P_\|(y) + E_\|(y)}\right] \tag{1.14}$$

Здесь

$$P(z) = \Delta A_p(z) + d\mathcal{D}_p = \frac{1}{z^{d-1}}\frac{d}{dz}\left(z^{d-1}\frac{dA_p(z)}{dz}\right) + d\mathcal{D}_p \tag{1.15}$$

Обсудим физический смысл функций, входящих в выражение (1.14), разбив поле скорости частиц на дивергентную и вихревую части

$$\boldsymbol{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{v}^p(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{v}^e(\mathbf{x}, t)$$

Пусть известны параллельные корреляционные функции скоростей

$$B_{\|}^{e,p}(z, \theta) = \langle(\boldsymbol{v}^{e,p}(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{l})(\boldsymbol{v}^{e,p}(\mathbf{x}+\mathbf{z}, t+\theta)\cdot\mathbf{l})\rangle, \quad \mathbf{l} = \mathbf{z}/z$$

Они определяют коэффициенты турбулентной диффузии

$$D_{\|}^p(z) = 2\int_0^\infty B_{\|}^p(z, \theta)d\theta, \quad D_{\|}^e(z) = 2\int_0^\infty B_{\|}^e(z, \theta)d\theta$$

Отвечающие им коэффициенты относительной диффузии входят в знаменатель интеграла в равенстве (1.14):

$$P_{\|}(z) = \mathfrak{D}_p - D_{\|}^p(z), \quad E_{\|}(z) = (d-1)\mathfrak{D}_e - D_{\|}^e(z)$$

Близкий смысл имеет и функция $P(z)$ в числителе этого интеграла. Укажем его, определив среднее скалярного произведения

$$B^p(z, \tau) = \langle\boldsymbol{v}^p(\mathbf{x}, t)\cdot\boldsymbol{v}^p(\mathbf{x}+\mathbf{z}, t+\tau)\rangle$$

Соответствующий коэффициент относительной диффузии равен

$$P(z) = d\mathfrak{D}_p - D^p(z), \quad D_p(z) = 2\int_0^\infty B^p(z, \tau)d\tau$$

Он связан с коэффициентом параллельной относительной диффузии дивергентной части поля скорости соотношением Обухова

$$P(z) = P_{\|}(z) + \frac{d-1}{z}\int_0^z P_{\|}(y)dy \tag{1.16}$$

Таким образом, из выражения (1.14) видно, что локализация тем сильнее, чем больше полная энергия дивергентной части поля скорости, и тем слабее, чем больше параллельные коэффициенты относительной диффузии дивергентной и вихревой частей.

Исследуем форму $n_{\text{st}}(z)$, переписав выражение (1.14) в виде

$$n_{\text{st}}(z) = N\exp\left[-\int_0^z \frac{dP(y)}{\mu + P_{\|}(y) + E_{\|}(y)}\right], \quad N = n_{\text{st}}(0) \tag{1.17}$$

Пусть l_v – внутренний масштаб турбулентности поля $\boldsymbol{v}(\mathbf{x}, t)$. При $z \ll l_v$ справедливы асимптотики

$$E_{\|}(z) \simeq \frac{d-1}{6}B_e z^2, \quad P_{\|}(z) \simeq \frac{1}{2}B_p z^2, \quad P(z) \simeq \frac{d+2}{6}B_p z^2 \tag{1.18}$$

Здесь использованы разложения (1.13) и соотношения (1.12), (1.16). Подставив выражения (1.18) в равенство (1.17), получим

$$n_{\text{st}}(z) = N\left[\frac{l_n^2}{l_n^2 + (3\gamma + d - 1)z^2}\right]^\chi \tag{1.19}$$

где

$$l_n^2 = \frac{6\mu}{B_e}, \quad \gamma = \frac{B_p}{B_e}, \quad \chi = \frac{(d+2)\gamma}{3\gamma + d - 1} \tag{1.20}$$

Изучим влияние на стационарную плотность (1.14) конкуренции дивергентной и вихревой компонент поля скорости. Для этого введем безразмерные функции и безразмерные параметры

$$e_{\|}(z) = \frac{E_{\|}(z)}{\mathfrak{D}_e}, \quad p(z) = \frac{P(z)}{\mathfrak{D}_p}, \quad p_{\|}(z) = \frac{P_{\|}(z)}{\mathfrak{D}_p}, \quad \delta = \frac{\mathfrak{D}_p}{\mathfrak{D}_e}, \quad \nu = \frac{\mu}{\mathfrak{D}_e}$$

и перепишем выражение (1.14) следующим образом:

$$n_{\text{st}}(z) = n_0 \exp\left[\delta \int_z^\infty \frac{dp(y)}{\nu + \delta p_{\|}(y) + e_{\|}(y)}\right]$$

Отсюда видно, что при $\delta \ll 1$ стационарная плотность фактически равна не зависящей от δ функции в степени δ:

$$n_{\text{st}}(z) \simeq n_0 \rho^\delta(z), \quad \rho(z) = \exp\left[\int_z^\infty \frac{dp(y)}{\nu + e_{\|}(y)}\right] \tag{1.21}$$

В частности, максимальная стационарная плотность вокруг меченой частицы равна

$$N \simeq n_0 \rho^\delta(0)$$

Оценим величину $\rho(0)$, положив $e_{\|}(z) \simeq p(z)$. В итоге из выражения для $\rho(z)$ (1.21) находим оценку $\rho(0) \simeq \text{Pe} = \mathfrak{D}_e/\mu$, т.е.

$$N \simeq n_0 (\text{Pe})^\delta$$

Здесь Pe – число Пекле вихревой компоненты скорости примеси.

Пусть, к примеру, $\text{Pe} \sim 10^{10}$, а $\delta \sim 10^{-1}$. Тогда $N \sim 10 n_0$, т.е. при данных параметрах турбулентности плотность внутри сгустка всего лишь на один порядок больше средней плотности.

2. Вероятностная интерпретация. Напомним, уравнению (1.11) подчиняется не только средняя плотность вокруг меченой частицы, но и распределение $g(z;\, t)$ расстояний между частицами. Нормированное, т.е. удовлетворяющее равенству

$$\int g(z;\, t)d\mathbf{z} = 1$$

решение уравнения (1.11) задает распределение расстояний между частицами. В отличие от средней плотности распределение $g(z;\, t) \to 0$ при $t \to \infty$, поскольку частицы в конце концов попадают в разные сгустки и диффундируют независимо. Тем не менее при больших числах Пекле частицы образуют ответственные за локализацию квазистабильные пары. Особенности поведения подобных пар частиц можно исследовать, считая, что при любых z имеют место асимптотики (1.18).

Найдем стационарное распределение расстояния между частицами, переписав выражение (1.19) в несколько иной форме

$$g_{\text{st}}(y) = \frac{C}{[1 + (3\gamma + d - 1)y^2]^\chi}, \quad y = \frac{z}{l_n} \tag{2.1}$$

Здесь C – нормировочная постоянная. Если $C > 0$, то стационарное распределение существует. Физически это значит, что “притяжение” частиц в сгустке так сильно, что они не разбегаются. Если же $C = 0$, то частицы могут разбегаться на сколь угодно большие расстояния.

Случай $C > 0$ назовем суперлокализацией. Как видно из соотношения (2.1), ее наличие зависит от показателя степени χ. Последняя определяется параметром γ (1.20), выражающим относительный вклад дивергентной части скорости частиц. Можно показать, что $C > 0$, если $2\chi > d$, т.е. если

$$\gamma > d(d-1)/(4-d)$$

Анализ распределения (2.1) расстояния между частицами позволяет судить о характерной форме сгустков и ее изменении с увеличением параметра γ. Подробно обсудим двумерный случай ($d = 2$), реализующийся для плавучей примеси. При этом $g_{\mathrm{st}}(y)$ (2.1) – двумерное распределение координат $\{y_1, y_2\}$ безразмерного вектора $\mathbf{y}$, соединяющего две частицы.

Заметим, что распределение (2.1) компонент вектора $\mathbf{y}$ не распадается на произведение распределений только y_1 и только y_2. Следовательно, компоненты вектора $\mathbf{y}$ статистически зависимы.

Изучим некоторые особенности указанной зависимости. Выпишем безусловное распределение компоненты y_1

$$g_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\mathrm{st}}\left(\sqrt{y^2 + y_2^2}\right) dy_2$$

Подставив сюда $g_{\mathrm{st}}(y)$ (2.1) и вычислив интеграл, получим

$$g_1(y) = f\left(\frac{5\gamma - 1}{6\gamma + 2}, y\right); \quad f(\chi, y) = \frac{\sqrt{3\gamma + 1}\,\Gamma(\chi)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\chi - 1/2)[1 + (3\gamma + 1)y^2]^{\chi}} \tag{2.2}$$

Статистическая зависимость компонент вектора $\mathbf{y}$ означает, что распределение компоненты y_1 не равно ее условному распределению $g_1(y|y_2)$, найденному при условии, что y_2 имеет заданное значение. Расчеты для случая $y_2 = 0$ дают

$$g_1(y|0) = f\left(\frac{4\gamma}{3\gamma + 1}, y\right) \tag{2.3}$$

Заметим, что условное распределение (2.3) больше нуля и тогда, когда безусловное распределение (2.2) тождественно равно нулю: если распределение $g_1(y) > 0$ лишь при $\gamma > 1$, то $g_1(y|0) > 0$ пока $\gamma > 1/5$. Последнее объясняется сильной анизотропией сгустков частиц, возникающей из-за того, что есть выделенные направления, вдоль которых частицы “притягиваются” сильнее, чем в других направлениях.

Продемонстрируем сказанное простейшей моделью. Возьмем единичный вектор

$$\mathbf{m} = \mathbf{i}_1 \cos\alpha + \mathbf{i}_2 \sin\alpha$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ – орты декартовой системы, α – угол, определяющий ориентацию вектора $\mathbf{m}$. Сконструируем условное распределение $g(\mathbf{y}|\alpha)$ компонент вектора $\mathbf{y}$ при условии, что преимущественное направление локализации перпендикулярно вектору $\mathbf{m}$:

$$g(\mathbf{y}|\alpha) = \phi(\mathbf{m} \cdot \mathbf{y})\psi(y) \tag{2.4}$$

Первый множитель учитывает локализацию в направлении, перпендикулярном вектору $\mathbf{m}$, а второй – изотропную “остаточную" локализацию во всех направлениях.

Выберем множители так, чтобы среднее условного распределения (2.4) по углу α дало распределение (2.1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\mathbf{y}|\alpha)d\alpha = g_{\text{st}}(y) \tag{2.5}$$

Это действительно так, если

$$\phi(\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}) \sim \frac{1}{1+\kappa(\mathbf{m}\cdot\mathbf{y})^2}, \quad \psi(y) \sim \frac{1}{(1+\kappa y^2)^{\rho}} \tag{2.6}$$

Усредним равенство (2.5) по углу α. Заметив, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha}{1+\kappa(\mathbf{m}\cdot\mathbf{y})^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa y^2}}$$

вернемся к стационарному распределению (2.1), где

$$d = 2, \quad \chi = \rho + 1/2 \quad (\kappa = 3\gamma + 1)$$

Таким образом, имеет место следующая трансформация формы сгустков с изменением параметра γ. При

$$\rho > 1/2 \Rightarrow \chi > 1 \Rightarrow \gamma > 1$$

радиально-симметричный множитель (2.6) преобладает в условном распределении (2.4), а сгусток приблизительно изотропен с характерным размером l_n. Назовем подобные сгустки *кругами*. Этот случай отвечает суперлокализации и раскрывает геометрическую суть данного понятия: в режиме суперлокализации размеры сгустков порядка $l_n \sim \sqrt{\mu/B_p}$, а сами сгустки фактически изотропны. При

$$0 < \rho < 1 \Rightarrow 1/2 < \chi < 1 \Rightarrow 1/5 < \gamma < 1$$

сгустки имеют вытянутую форму. Назовем их *нитями*. Толщина нитей, как и прежде, порядка l_n, а длина определяется внешним масштабом турбулентности L_υ. При

$$\rho < 0 \Rightarrow 0 < \chi < 1/2 \Rightarrow 0 < \gamma < 1/5$$

эффективные размеры сгустков по всем направлениям порядка L_υ. Назовем подобные сгустки *протосгустками*.

Таким образом, при переходе порогов $\gamma = 1/5$ и $\gamma = 1$ имеют место своеобразные фазовые переходы: форма сгустков меняется от протосгустков к нитям, а затем к кругам.

Для трехмерного случая ограничимся лишь перечислением полученных на основе анализа условных распределений участков оси γ, которым отвечают разные формы сгустков. Это режим суперлокализации

$$3/2 < \chi \Rightarrow \gamma > 6$$

соответствующий компактным, почти изотропным, сгусткам, а также режимы

$$1 < \chi < 3/2 \Rightarrow 1 < \gamma < 6$$

$$1/2 < \chi < 1 \Rightarrow 2/7 < \gamma < 1$$

$$\chi < 1/2 \Rightarrow \gamma < 2/7$$

3. Локализация плавучей примеси. До сих пор отношение дивергентной и вихревой частей скорости частиц полагалось произвольным. Однако для плавучих частиц на поверхности несжимаемой жидкости величина γ принимает вполне определенное значение. Покажем это, обсудив простейшую модель плавучей примеси. Пусть примесь движется вдоль плоскости внутри турбулентной среды, а скорость частиц примеси равна проекции на эту плоскость статистически однородного трехмерного турбулентного поля скорости. Найдем стационарную плотность такой "плавучей" примеси, заметив, что двумерные потенциалы дивергентной и вихревой частей скорости примеси связаны с вихревым потенциалом трехмерного движения равенствами

$$\Delta^2 A_e^2(z) = \Delta^3 A_e^3(z), \quad A_e^2(z) - A_p^2(z) = A_e^3(z) \tag{3.1}$$

Потенциал $A^d(z)$ описывает корреляционные свойства d-мерного поля скорости, а Δ^d – d-мерный лапласиан.

Найдем функции, определяющие стационарное решение

$$n_{\text{st}}(z) = n_0 \exp\left[\int_z^{\infty} \frac{dP^2(y)}{\mu + P_{\|}^2(y) + E_{\|}^2(y)}\right] \tag{3.2}$$

Из соотношений (1.15), (3.1) имеем

$$P^2(z) = (\Delta^3 - \Delta^2) A_e^3(z) + \mathfrak{D}_e^3 = \frac{1}{2} E_{\|}^3(z) \tag{3.3}$$

Здесь учтены формулы (1.12). Таким образом, согласно выражению (3.3), функция $P^2(z)$, ответственная за локализацию плавучей примеси, равна половине продольного коэффициента относительной диффузии $E_{\|}^3(z)$ трехмерного вихревого поля скорости. Найдем, чему равен знаменатель подынтегрального выражения в формуле (3.2). Согласно соотношениям (1.12), (3.1), имеем

$$P_{\|}^2(z) + E_{\|}^2(z) = E_{\|}^3(z) \tag{3.4}$$

Подставив выражения (3.3), (3.4) в равенство (3.2) и перейдя к безразмерным параметрам, найдем

$$g_{\text{st}}(z) = \sqrt{\frac{1 + \text{Pe}}{1 + \text{Pe}\, e(z)}}, \quad \text{Pe} = \frac{2\mathfrak{D}_e^3}{\mu}, \quad e(z) = \frac{E_{\|}^3(z)}{2\mathfrak{D}_e^3} \tag{3.5}$$

Выражение (3.5) позволяет детально исследовать свойства локализации плавучей примеси. Сделаем это в модельном случае гауссовой корреляционной функции

$$e(z) = 1 - \exp\left(-\frac{z^2}{2l_v^2}\right)$$

Подставив ее в формулу (3.5) и перейдя к безразмерной координате $y = z/l_v$, получим

$$g_{\text{st}}(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta e^{-y^2/2}}}, \quad \eta = \frac{\text{Pe}}{1 + \text{Pe}}$$

Вычислим среднюю массу сгустка, определенную формулой (2.5),

$$M = n_0 \iint [g_{\text{st}}(z) - 1] d^2 z$$

Пользуясь радиальной симметрией средней плотности, будем иметь

$$M = \mathcal{M}\int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{1-\eta e^{-x}}} - 1\right]dx = \mathcal{M}m(\mathrm{Pe})$$

$$\mathcal{M} = n_0\pi l_\upsilon^2, \quad m(\mathrm{Pe}) = \ln\left(4+\frac{4}{\mathrm{Pe}}\right) - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{Pe}}}$$

Заметим, что, в то время как максимальная средняя плотность вокруг меченой частицы растет как корень числа Пекле, средняя масса сгустка стремится к не зависящему от Pe пределу:

$$m(\mathrm{Pe}) = \ln 4 - \frac{2}{\sqrt{\mathrm{Pe}}} + O\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}}\right) \quad (\mathrm{Pe}\to\infty)$$

Отметим еще, что решение (3.5) отвечает пограничному случаю $\gamma = 1/5$. Последнее означает, что характерная форма сгустков плавучей примеси представляет собой некую смесь нитей и протосгустков.

Авторы благодарят В.И. Кляцкина, Т. Эльперина, Н. Клеорина и И. Рогачевского за обсуждение результатов работы и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-02-16680), Министерства высшего образования РФ (программа "Государственная поддержка ведущих научных школ", НШ-838.2003.2) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (Е02-3.5-232).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elperin T., Kleeorin N., Rogachevskii I.* Dynamics of the passive scalar in compressible turbulent flow: Large-scale patterns and small-scale fluctuations // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. № 3. P. 2617–2634.
2. *Ott S., Mann J.* An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three-dimensional turbulent flow // J. Fluid. Mech. 2000. V. 422. P. 207–223.
3. *Eckhardt B., Schumacher J.* Turbulence and passive scalar transport in a free-slip surface // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. № 1. Paper 016314. 10 p.
4. *Balkovsky E., Falkovich G., Fouxon A.* Intermittent distribution of inertial particles in turbulent flows // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. № 13. P. 2790–2793.
5. *Saichev A. I., Zhukova I. S.* The arising and evolution of the passive tracer clusters in compressible random media // Lecture Notes in Physics. 1998. V. 511. P. 353–371.
6. *Жукова И.С., Саичев А.И.* Локализация сгустков плавучих частиц на поверхности турбулентного потока // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 624–630.
7. *Maxey M.R.* The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields // J. Fluid Mech. 1987. V. 174. P. 441–465.
8. *Kraichnan R. H.* Diffusion by a random velocity field // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 1. P. 22–31.
9. *Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I.* Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays, Particles. Manchester; New York: Manchester Univ. Press, 1991. 308 p.
10. *Saichev A.I., Woyczynski W.A.* Probability distributions of passive tracers in randomly moving media // Stochastic Models in Geosystems / Eds Molchanov S.A., Woyczynski W.A. N. Y. etc.: Springer, 1997. P. 359–399.
11. *Кляцкин В.И., Саичев А.И.* К статистической теории плавучей примеси в случайном поле скоростей // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. Вып. 4. С. 1297–1313.
12. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001. 527 с.
13. *Кляцкин В.И.* Динамика стохастических систем. М.: Физматлит, 2002. 239 с.

Нижний Новгород
email: saichev hotmail.ru

Поступила в редакцию
17.XII.2002