

УДК 551.466:534.1

© 2004 г. А. М. Шерменев

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В ЗАДАЧАХ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Некоторые классические типы волн на мелкой воде изучаются с использованием уравнения Буссинеска в полярных координатах. В этих координатах обычные методы теории возмущений приводят к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов. Показано, что в рассматриваемых специальных случаях эти уравнения совместны, что позволяет построить решения уравнения Буссинеска с той же точностью, с какой уравнение получено. Заданный на дне потенциал скоростей и функция, задающая свободную поверхность воды, разлагаются в ряд Фурье по времени. Коэффициенты их первых двух гармоник выражены явно как многочлены от функций Бесселя с коэффициентами в виде элементарных функций от полярных координат.

1. Введение. Лэмб ([1], § 191–195) рассматривает (в полярных координатах r, θ) по крайней мере три частных случая длинных линейных трехмерных волн: 1) осесимметричные волны, распространяющиеся над горизонтальным дном и вызванные периодическим источником энергии (см. ниже, формула (1.2)). 2) простейшее неосесимметричное волновое движение (1.3) в круглом бассейне. 3) грубая модель полусуточных приливов в бассейне на полюсе земли, ограниченном небольшим кругом широты (1.4).

Ниже получены решения уравнения Буссинеска, которые найдены с той же точностью, с которой уравнение выведено, и которые могут рассматриваться как нелинейные поправки к перечисленным классическим линейным решениям.

При переходе к уравнению Буссинеска уменьшается размерность задачи, так как потенциал скорости разлагается в степенной ряд по вертикальной координате. Это разложение использовалась уже Лагранжем [2], затем развивалось Буссинеском [3] и получило современный вид в работе Фридрикса [4] (см. обзор [5]). Различные версии уравнения Буссинеска связаны главным образом с выбором основных переменных (см. [6, 7]). Принимая обозначения Мея [8], используем заданный на дне потенциал скорости $F(x, y, t)$ и возвышение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ как основные переменные. Отметим, что функция η может быть выражена через F .

Имеются два малых параметра, связанные с уравнением Буссинеска: ε – отношение амплитуды к глубине (мера нелинейности) и μ – отношение глубины к длине волны (дисперсия). Как и в классическом уравнении Буссинеска, сохраняем члены $O(\varepsilon)$ и $O(\mu^2)$ (но не предполагаем равенства $O(\varepsilon) = O(\mu^2)$).

Заданный на дне потенциал скорости разлагается в ряд Фурье по времени

$$F(r, \theta, t) = U(r, \theta) + S^1(r, \theta) \sin \omega t + C^1(r, \theta) \cos \omega t + S^2(r, \theta) \sin 2\omega t + C^2(r, \theta) \cos 2\omega t + \dots + S^m(r, \theta) \sin m\omega t + C^m(r, \theta) \cos m\omega t + \dots \quad (1.1)$$

Основной результат этой работы состоит в явных выражениях для функций

$$U(r, \theta), \quad S^1(r, \theta), \quad C^1(r, \theta), \quad S^2(r, \theta), \quad C^2(r, \theta) \quad (1.2)$$

до порядков ε и μ^2 (см. формулы (4.1), (4.2), (5.1), (5.2), (6.1), (6.2)). Эти функции – однородные многочлены от функций Бесселя $Z_0(\omega r)$, $Z_1(\omega r)$ и тригонометрических

функций от угловой переменной θ , их коэффициенты – многочлены от r^{-1} and r . Приводятся также аналогичные формулы для функции η . Эти выражения дают периодические решения уравнения Буссинеска с той же точностью, с которой уравнение получено. Поэтому результат может интерпретироваться как периодическое решение уравнений поверхностных волн (см. ниже, уравнения (2.2)–(2.5)), найденное с точностью $O(\epsilon)$ и $O(\mu^2)$.

Три классических линейных решения [1] имеют вид

$$1) F(r, \theta, t) = J_0(\omega r) \sin \omega t + Y_0(\omega r) \cos \omega t \tag{1.3}$$

$$2) F(r, \theta, t) = J_1(\omega r) \cos \theta \sin \omega t \tag{1.4}$$

$$3) F(r, \theta, t) = J_2(\omega r) \cos 2\theta \sin \omega t \tag{1.5}$$

Попытка найти функции (1.2) с точностью $O(\epsilon)$ и $O(\mu^2)$ приводит к необходимости решать неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка типа Бесселя

$$Z''(r) + \frac{1}{r}Z'(r) + \left(A + \frac{B}{r^2}\right)Z = q_{00}J_0(\omega r)Y_0(\omega r) + q_{01}J_0(\omega r)Y_1(\omega r) + q_{10}J_1(\omega r)Y_0(\omega r) + q_{11}J_1(\omega r)Y_1(\omega r) \tag{1.6}$$

где q_{ij} – полиномы, от r, r^{-1} .

Ищем решение в виде

$$Z(r) = Q_{00}J_0(\omega r)Y_0(\omega r) + Q_{01}J_0(\omega r)Y_1(\omega r) + Q_{10}J_1(\omega r)Y_0(\omega r) + Q_{11}J_1(\omega r)Y_1(\omega r) \tag{1.7}$$

где Q_{ij} – полиномы от r, r^{-1} с неизвестными коэффициентами. Эти коэффициенты вычислены как решения переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (как и ранее [9, 10], где тот же подход использовался для описания с точностью до членов порядка $\epsilon^2, \epsilon\mu^2$ и μ^4 длинных периодических волн над наклонным дном). Общее решение уравнения (1.6) является суммой выписанного ниже частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения, которое представляет собой линейную комбинацию функций Бесселя.

В рассмотренных случаях совместность этих переопределенных систем представляется вопросом удачи, и не видно причины, по которой системы, соответствующие более высоким гармоникам, могли бы оказаться также совместными. Однако можно предположить, что данные выражения будут первыми членами еще не известного трехмерного точного решения уравнений (2.2)–(2.5). Точные трехмерные решения неизвестны в настоящее время, но ниже предлагается “промежуточный” объект (решение порядка ϵ и μ^2), который, как можно надеяться, более точно описывает поведение длинных периодических волн по сравнению с линейным решением Лэмба.

2. Основные уравнения. Напомним кратко вывод уравнения Буссинеска в удобной для последующего изложения форме и введем обозначения, следуя, главным образом, Мею [8]. Безразмерные величины вводятся следующим образом:

$$x = \frac{x'}{l'_0}, \quad y = \frac{y'}{l'_0}, \quad z = \frac{z'}{h'_0}, \quad t = \frac{g^{\frac{1}{2}} h_0^{\frac{1}{2}}}{l'_0} t', \quad \eta = \frac{\eta'}{a'_0}, \quad \varphi = \frac{h'_0}{a'_0 l'_0 g^{\frac{1}{2}} h_0^{\frac{1}{2}}} \varphi', \quad h = \frac{h'}{h'_0} \tag{2.1}$$

Штрихи соответствуют физическим переменным, a'_0 – характерная амплитуда волны, h'_0 – глубина, l'_0 – длина волны, g – ускорение силы тяжести, x' и y' – горизон-

тальные координаты, z' – вертикальная координата, t' – время. Масштабированное уравнение и граничные условия для безвихревого волнового движения имеют вид

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \mu^{-2}\varphi_{zz} = 0, \quad -1 < z < \varepsilon\eta(x, y, t) \quad (2.2)$$

$$\eta_t + \varepsilon\varphi_x\eta_x + \varepsilon\varphi_y\eta_y - \mu^{-2}\varphi_z = 0, \quad z = \varepsilon\eta(x, y, t) \quad (2.3)$$

$$\varphi_t + \eta + \frac{1}{2}\varepsilon(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \varepsilon\mu^{-2}\varphi_x^2 = 0, \quad z = \varepsilon\eta(x, y, t) \quad (2.4)$$

$$\varphi_z = 0, \quad z = -1 \quad (2.5)$$

где ε и μ – меры нелинейности и дисперсии, определенные формулами

$$\varepsilon = a_0'/h_0', \quad \mu = h_0'/l_0' \quad (2.6)$$

Потенциал $\varphi(x, y, z, t)$ разлагается по степеням вертикальной координаты

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (z+1)^m F_m(x, y, t) \quad (2.7)$$

Подставляя выражение (2.7) в уравнение (2.2) и приравнявая к нулю каждую степень $z+1$, выводим (символ ∇ используется для обозначения горизонтального градиента ($\partial/\partial x, \partial/\partial y$))

$$F_{m+2} = -\frac{\mu^2 \nabla^2 F_m}{(m+2)(m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Граничные условия на дне (2.5) дают

$$F_1 = 0 \quad (2.9)$$

Таким образом φ можно выразить через $F_0(x, y, t)$

$$\varphi = F - \frac{1}{2!}\mu^2(z+1)^2\nabla^2 F + \frac{1}{4!}\mu^4(z+1)^4\nabla^4 F + O(\mu^6) \quad (2.10)$$

(нулевой индекс у функции $F_0(x, y, t)$ здесь и далее опущен).

Выражение (2.10) удовлетворяет уравнению (2.2) и граничному условию (2.5). Подстановка выражения (2.10) в условия (2.3) и (2.4) дает уравнения Буссинеска для двух функций: потенциала на дне $F(x, y, t)$ и возвышения свободной поверхности $\eta(x, y, t)$

$$\eta_t + \varepsilon\nabla\eta \cdot \nabla F + (1 + \varepsilon\eta)\nabla^2 F - \frac{1}{6}\mu^2\nabla^2\nabla^2 F = 0 \quad (2.11)$$

$$\eta + F_t - \frac{1}{2}\mu^2\nabla^2 F_t + \frac{1}{2}\varepsilon(\nabla F)^2 = 0 \quad (2.12)$$

Эти уравнения эквивалентны уравнениям, приведенным Меем ([8], гл. 11, уравнения (1.16) и (1.17)).

Для того чтобы выразить функцию, задающую возвышение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ в терминах функции $F(x, y, t)$ и ее производных, используется разложение

$$\eta = \eta_0 + \eta_2\mu^2 + \eta_4\mu^4 + O(\mu^6)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (2.12) приводит к формулам

$$\eta_0 = -F_t - \frac{1}{2}(F_x^2 + F_y^2)\epsilon, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(F_{xxt} + F_{yyt}) \quad (2.13)$$

Последующая подстановка выражений (2.13) в уравнение (2.11) дает единственное уравнение для функции F

$$\begin{aligned} & -F_{tt} + F_{xx} + F_{yy} + \left(\frac{1}{2}F_{xxtt} + \frac{1}{2}F_{yytt} - \frac{1}{6}F_{xxxx} - \frac{1}{6}F_{yyyy} - \frac{1}{3}F_{xxyy} \right) \mu^2 + \\ & + (-2F_x F_{xt} - 2F_y F_{yt} - F_{xx} F_t - F_{yy} F_t) \epsilon = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

или в полярных координатах (r, θ)

$$\begin{aligned} & -F_{tt} + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + \frac{1}{r} F_r + F_{rr} + \left(-\frac{2}{r^2} F_{\theta} F_{\theta t} - \frac{1}{r^2} F_t F_{\theta\theta} - \frac{1}{r} F_t F_r - 2F_r F_{rt} - F_t F_{rr} \right) \epsilon + \\ & + \left[-\frac{2}{3r^4} F_{\theta\theta} + \frac{1}{2r^2} F_{\theta\theta t} - \frac{1}{6r^4} F_{\theta\theta\theta\theta} - \frac{1}{6r^3} F_r + \frac{1}{2r} F_{rtt} + \frac{1}{3r^3} F_{r\theta\theta} + \frac{1}{6r^2} F_{rr} + \frac{1}{2} F_{rrtt} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3r^2} F_{rr\theta\theta} - \frac{1}{3r} F_{rrr} - \frac{1}{6} F_{rrrr} \right] \mu^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

3. Периодическая задача. Предполагаем, что решение уравнения (2.15) – периодическое во времени и может быть разложено в ряд Фурье в некоторой области, исключая окрестность оси симметрии, т.е.

$$\begin{aligned} F(r, \theta, t) = & u(r, \theta)\epsilon + (S_{00}^1(r, \theta) + S_{02}^1(r, \theta)\mu^2)\sin\omega t + (C_{00}^1(r, \theta) + C_{02}^1(r, \theta)\mu^2)\cos\omega t + \\ & + (S_{10}^2(r, \theta)\epsilon)\sin 2\omega t + (C_{10}^2(r, \theta)\epsilon)\cos 2\omega t + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Форма коэффициентов при $\sin m\omega t$ и $\cos m\omega t$ определяется рекуррентными вычислениями при решении уравнения (2.15).

В нулевом порядке имеем следующие линейные задачи для $S_{00}^1(r, \theta)$ и $C_{00}^1(r, \theta)$:

$$\omega^2 S_{00}^1 + \frac{1}{r^2} S_{00\theta\theta}^1 + \frac{1}{r} S_{00r}^1 + S_{00rr}^1 = 0 \quad (3.2)$$

$$\omega^2 C_{00}^1 + \frac{1}{r^2} C_{00\theta\theta}^1 + \frac{1}{r} C_{00r}^1 + C_{00rr}^1 = 0 \quad (3.3)$$

Их решения, выраженные в полярных координатах, могут быть представлены в виде ряда

$$\begin{aligned} & \alpha_0 J_0(\omega r) + \beta_0 Y_0(\omega r) + (\alpha_1 J_1(\omega r) + \beta_1 Y_1(\omega r)) \cos\theta + \\ & + \dots + (\alpha_n J_n(\omega r) + \beta_n Y_n(\omega r)) \cos n\theta + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Сосредоточимся на трех случаях, соответствующих формулам (1.3)–(1.5).

Случай 1

$$S_{00}^1 = \alpha_0 J_0(\omega r) + \beta_0 Y_0(\omega r), \quad C_{00}^1 = \gamma_0 J_0(\omega r) + \delta_0 Y_0(\omega r) \quad (3.5)$$

Случай 2

$$S_{00}^1 = \alpha_1 J_1(\omega r) \cos\theta, \quad C_{00}^1 = 0 \quad (3.6)$$

Случай 3

$$S_{00}^1 = \alpha_2 J_2(2\omega r) \cos 2\theta, \quad C_{00}^1 = 0 \quad (3.7)$$

Первое решение было использовано для описания осесимметричного волнового движения с периодическим источником в центре системы полярных координат ([1], § 191–195). Второе решение было использовано для описания самого простого (но “интереснейшего”) случая регулярного неосесимметричного волнового движения в круглом бассейне. Третье решение дает грубое представление полусуточных приливов для бассейна на полюсе Земли, ограниченного небольшим кругом широты. Цель дальнейшего рассмотрения – дать поправку следующего порядка к этим классическим решениям.

Обозначим через $S = S(r)$ и $C = C(r)$ два решения уравнения Бесселя

$$rZ_{rr} + Z_r + \omega^2 rZ = 0 \quad (3.8)$$

и через S' и C' – их производные. Функции $S(r)$, $C(r)$, $S'(r)$, и $C'(r)$ могут быть представлены в терминах функций Бесселя следующим образом:

$$S(r) = a_{11}J_0(\omega r) + a_{12}Y_0(\omega r), \quad S'(r) = \omega(-a_{11}J_1(\omega r) - a_{12}Y_1(\omega r))$$

$$C(r) = a_{21}J_0(\omega r) + a_{22}Y_0(\omega r), \quad C'(r) = \omega(-a_{21}J_1(\omega r) - a_{22}Y_1(\omega r))$$

4. Случай 1: осесимметричные волны с периодическим источником. В осесимметричном случае формула (1.1) принимает вид

$$F(r, t) = u(r)\varepsilon + (S_{00}^1(r) + S_{02}^1(r)\mu^2)\sin\omega t + (C_{00}^1(r) + C_{02}^1(r)\mu^2)\cos\omega t + S_{10}^2(r)\varepsilon\sin 2\omega t + C_{10}^2(r)\varepsilon\cos 2\omega t + \dots, \quad S_{00}^1(r) = S, \quad C_{00}^1 = C \quad (4.1)$$

Вычисления дают явные формулы для коэффициентов

$$u = 0$$

$$S_{02}^1 = \frac{\omega^2 r}{6} S', \quad C_{02}^1 = \frac{\omega^2 r}{6} C' \quad (4.2)$$

$$S_{01}^2 = \frac{\omega}{2}(S^2 - C^2) + \frac{3\omega}{4}r(SS' - CC'), \quad C_{10}^2 = \omega CS + \frac{3\omega}{4}r(SC' + S'C)$$

Подставляя эти выражения в формулы (2.13), получаем

$$\eta(r, \theta, t) = L_{10}^0(r)\varepsilon + (P_{00}^1(r) + P_{02}^2(r)\mu^2)\sin\omega t + (Q_{00}^1(r) + Q_{02}^1(r)\mu^2)\cos\omega t + (P_{10}^2(r)\varepsilon)\sin 2\omega t + (Q_{10}^2(r)\varepsilon)\cos 2\omega t \quad (4.3)$$

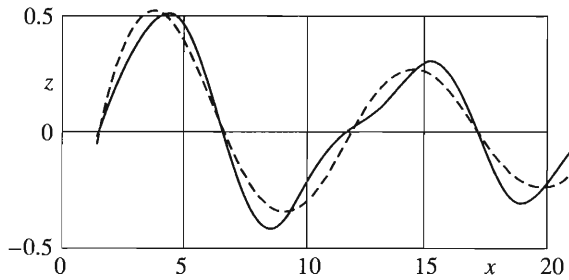
Здесь

$$L_{10}^0 = -\frac{1}{4}S^2 - \frac{1}{4}C^2$$

$$P_{00}^1 = \omega C, \quad P_{02}^1 = \frac{\omega^3}{2}C + \frac{\omega^3 r}{6}C', \quad Q_{00}^1 = -\omega S, \quad Q_{02}^1 = -\frac{\omega^3}{2}S - \frac{\omega^3 r}{6}S' \quad (4.4)$$

$$P_{10}^2 = 2\omega^2 CS + \frac{3\omega^2 r}{2}(CS' + C'S)$$

$$Q_{10}^2 = \omega^2(C^2 - S^2) + \frac{3\omega^2 r}{2}(CC' - SS') - \frac{1}{4}(C^2 - S^2)$$



Фиг. 1

Специальные случаи. Полагая

$$a_{12} = -\omega^{-1}, \quad a_{21} = \omega^{-1}, \quad a_{11} = a_{22} = 0 \tag{4.5}$$

имеем $S(r) = -\omega^{-1}Y_0(\omega r)$, $C(r) = \omega^{-1}J_0(\omega r)$. Тогда в главном приближении получим

$$\eta(r, \theta, t) = J_0(\omega r) \sin \omega t + Y_0(\omega r) \cos \omega t$$

Следовательно, при $r \rightarrow +\infty$

$$\eta(r, \theta, t) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \omega r}} \left(\cos \left(\omega r - \frac{\pi}{4} \right) \sin \omega t + \sin \left(\omega r - \frac{\pi}{4} \right) \cos \omega t \right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi \omega r}} \sin \left(\omega r - \frac{\pi}{4} + \omega t \right)$$

Таким образом, случаю (4.5) соответствует прогрессивная волна, в то время как случаю

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0 \tag{4.6}$$

соответствует стоячая (осесимметричная) волна.

Осесимметричная прогрессивная волна, порожденная точечным источником, показана на фиг. 1 при $\omega = 0.6$, $\epsilon = 0.1$, $\mu = 0.3$, $t = \pi/\omega$. График иллюстрирует зависимость возвышения свободной поверхности η от радиальной координаты r . Сплошная кривая – нелинейное решение (порядка ϵ и μ^2), штриховая кривая – линейное решение. У волны, соответствующей новому решению, передний склон более крутой, а задний склон более пологий.

5. Случай 2: неосесимметрические волны (стоячие волны в круговом бассейне).

Предполагаем, что решение периодически по времени и может быть разложено в ряд Фурье в области, полученной исключением окрестности оси симметрии:

$$F(r, \theta, t) = u(r, \theta)\epsilon + (C_{00}^1(r, \theta) + C_{02}^1(r, \theta)\mu^2)\cos \omega t + (S_{10}^2(r, \theta)\epsilon)\sin 2\omega t + \dots, \tag{5.1}$$

$$C_{00}^1 = C^* \cos \theta$$

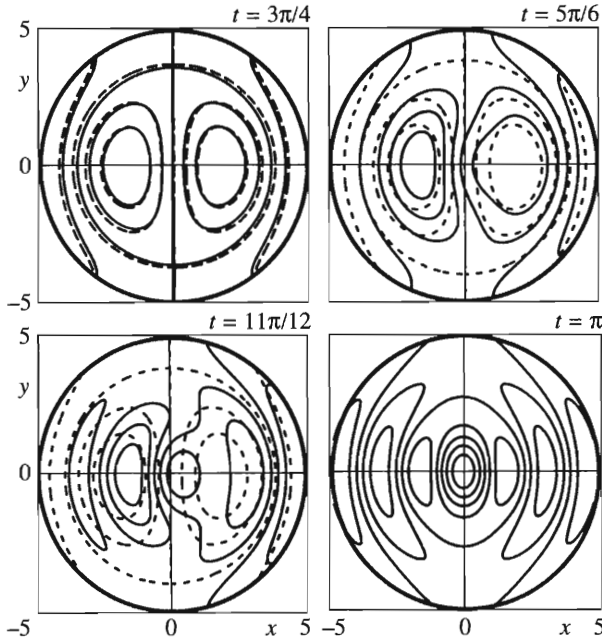
Вычисления дают

$$u = 0$$

$$C_{02}^1 = -\frac{\omega^2}{6}(r\omega^2 C + C^*) \cos \theta \tag{5.2}$$

$$S_{10}^2 = \left(\frac{3\omega^3}{8} C^2 + \frac{3\omega^3}{8} r C C^* - \frac{\omega}{4} C^{*2} \right) + \left(\frac{3\omega^3}{8} r C C^* + \frac{\omega}{8} C^{*2} \right) \cos 2\theta$$

Функция $C = C(r)$ – снова решение уравнения (3.8).



Фиг. 2

Подставляя эти выражения в формулы (2.13), получаем

$$\eta(r, \theta, t) = L_{10}^0(r, \theta)\varepsilon + (P_{00}^1(r, \theta) + P_{02}^1(r, \theta)\mu^2) \sin \omega t + (Q_{10}^2(r, \theta)\varepsilon) \cos 2\omega t \quad (5.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{10}^0 &= -\frac{\omega^4}{4} C^2 \cos^2 \theta - \frac{\omega^2}{2r} C C' \cos^2 \theta - \frac{1}{4r^2} C^2 \\ P_{00}^1 &= \omega C' \cos \theta, \quad P_{02}^1 = -\frac{\omega^5}{6} r C \cos \theta + \frac{\omega^3}{3} C' \cos \theta \\ Q_{10}^2 &= \omega^4 C^2 \left(-\frac{1}{4} \cos^2 \theta - \frac{3}{4} \right) - \omega^2 C C' \left(\frac{1}{2r} \cos^2 \theta + \frac{3\omega^2}{2} r \cos^2 \theta \right) + \\ &+ C'^2 \left(-\frac{1}{4r^2} + \frac{3}{4} \omega^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Предложенные нелинейные поправки существенно меняют форму линий уровня. В частности, поверхность никогда не бывает плоской в отличие от классического линейного решения.

Полученное решение при $\omega = 1.0$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.4$ иллюстрировано на фиг. 2, где представлены контуры (линии уровней $\eta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$) неосесимметрических волн (случай 2) для разных значений t . Сплошные кривые – решение порядка ε и μ^2 , штриховые – классическое решение Лэмба.

6. Случай 3: неосесимметричные волны (полусуточные приливы). Случай 3 отличается от случая 2 тем, что

$$C_{00}^1 = \left(-\omega^2 C - \frac{2}{r} C' \right) \cos 2\theta \quad (6.1)$$

Получены следующие формулы:

$$u = 0$$

$$C_{02}^1 = -\frac{\omega^4}{6} r C \cos 2\theta$$

$$S_{10}^2 = \omega^4 C^2 + \left(\frac{3\omega^4 r}{8} + \frac{\omega^2}{r}\right) C C' + \left(-\frac{3\omega^2}{4} + \frac{1}{r^2}\right) C^2 + \left[-\frac{\omega^4}{2} C^2 + \left(-\frac{2\omega^2}{r} + \frac{3\omega^4 r}{8}\right) C C' + \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{3\omega^2}{4}\right) C^2\right] \cos 4\theta \quad (6.2)$$

Подставляя эти выражения в формулы (2.13), выводим

$$\eta(r, \theta, t) = L_{10}^0(r, \theta) \varepsilon + (P_{00}^1(r, \theta) + P_{02}^1(r, \theta) \mu^2) \sin \omega t + Q_{10}^2(r, \theta) \varepsilon \cos 2\omega t \quad (6.3)$$

Здесь

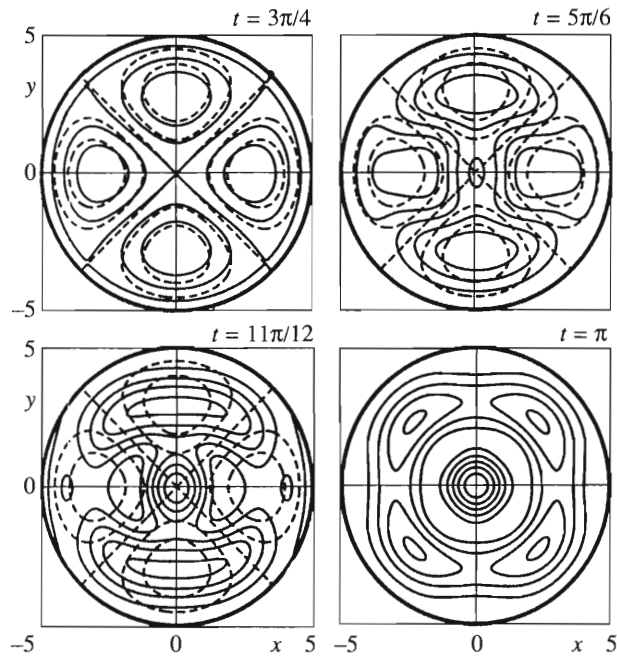
$$L_{10}^0 = \left(-\frac{\omega^4}{2} - \frac{\omega^4}{2r^2}\right) C^2 + \left(-\frac{2\omega^2}{r^3} - \frac{2\omega^2}{r} + \frac{\omega^4}{2r}\right) C C' + \left(-\frac{2}{r^4} - \frac{2}{r^2} + \frac{\omega^2}{r^2} - \frac{\omega^4}{8}\right) C^2 + \left[\left(\frac{\omega^4}{2} - \frac{\omega^4}{2r^2}\right) C^2 + \left(-\frac{2\omega^2}{r^3} + \frac{2\omega^2}{r} + \frac{\omega^4}{2r}\right) C C' + \left(-\frac{2}{r^4} + \frac{2}{r^2} + \frac{\omega^2}{r^2} - \frac{\omega^4}{8}\right) C^2\right] \cos 4\theta$$

$$P_{00}^1 = \omega \left(-\omega^2 C - \frac{2}{r} C'\right) \cos 2\theta, \quad P_{02}^1 = \omega \left(-\frac{\omega^4}{2} C - \left(\frac{\omega^2}{r} + \frac{\omega^4 r}{6}\right) C'\right) \cos 2\theta$$

$$Q_{10}^2 = \left(-\frac{\omega^4}{2} - \frac{\omega^4}{2r^2} - 2\omega^5\right) C^2 + \left(-\frac{2\omega^2}{r^3} - \frac{2\omega^2}{r} - \frac{2\omega^3}{r} + \frac{\omega^4}{2r} - \frac{3r\omega^5}{4}\right) C C' + \left(-\frac{2}{r^4} + \frac{2}{r^2} + \frac{4\omega}{r^2} + \frac{\omega^2}{r^2} - \frac{3\omega^3}{2} - \frac{\omega^4}{8}\right) C^2 + \left[\left(\frac{\omega^4}{2} - \frac{\omega^4}{2r^2} + \omega^5\right) C^2 + \left(-\frac{2\omega^2}{r^3} - \frac{2\omega^2}{r} - \frac{2\omega^3}{r} + \frac{\omega^4}{2r} - \frac{3r\omega^5}{4}\right) C C' + \left(-\frac{2}{r^4} - \frac{2}{r^2} - \frac{2\omega}{r^2} + \frac{\omega^2}{r^2} + \frac{3\omega^3}{2} - \frac{\omega^4}{8}\right) C^2\right] \cos 4\theta$$

Полученное решение при $\omega = 1.0$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.4$ иллюстрировано на фиг. 3, где представлены контуры (линии уровней $\eta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$) неосесимметрических волн (случай 3) для разных значений t . Сплошные кривые – решение порядка ε и μ^2 , штриховые – классическое линейное решение Лэмба.

7. Заключение. Существуют, по крайней мере, два способа сведения трехмерной задачи о поверхностных волнах к двумерной задаче: 1) предположить, что движение не зависит от одной из горизонтальных координат, 2) предположить, что глубина мала по сравнению с длиной волны; это позволяет исключить вертикальную коор-



Фиг. 3

динату из числа независимых переменных в приближенных теориях мелкой воды (лагранжевы приближения). Оба эти способа исключают из рассмотрения одну из пространственных координат.

Выше был использован второй способ, который приводит к классическим уравнениям типа Буссинеска. Для этих уравнений получены три типа периодических решений. Они могут рассматриваться как решения классических уравнений поверхностных волн (2.2)–(2.5) с точностью до членов порядка ϵ и μ^2 . Промежуточные уравнения даются для иллюстрации метода вывода, но решения, соответствующие случаям 1–3, могут быть проверены подстановкой в систему (2.2)–(2.5) (с использованием выражения (2.10) для потенциала). Линейные версии этих проблем были предметом классического исследования в книге Лэмба ([1], § 191–195).

Автор полагает, что эти выражения – только первые члены некоторого ряда, дающего точное трехмерное решение уравнений поверхностных волн (2.2)–(2.5). Число известных точных решений довольно мало, в частности неизвестно никаких трехмерных решений.

Результаты получены методом неопределенных коэффициентов как решения некоторых переопределенных систем алгебраических линейных уравнений (причина их совместности остается пока непонятной). Эти результаты могут быть интерпретированы как интегрируемость некоторых кубических выражений от функций Бесселя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1924. 687 p.
2. *Lagrange J.-L.* Mecanique Analytique. V. 2. Paris: Veuve Desaint, 1788. 512 p.
3. *Boussinesq J.* Theorie des ondes et des remous qui se propagent de long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond // *J. Math. Pures Appl. Ser. 2.* 1872. V. 17. P. 55–108.

4. *Friedrichs K.O.* On the derivation of the shallow water theory // *Comm. Pure Appl. Math.* 1948. V. 1. № 1. P. 81–85.
5. *Овсянников Л.В.* Лагранжевы приближения в теории волн // *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.* Новосибирск: Наука, 1985. С. 10–77.
6. *Dingemans M.W.* *Water Wave Propagation over Uneven Bottoms,* River Edge, N.J.: World Scient., 1997. 1016 p.
7. *Madsen P.A., Schaffer H.A.* Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1998. V. 356. № 1749. P. 3123–3184.
8. *Mei C.C.* *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves.* N.Y.: Wiley, 1983. 740 p.
9. *Shermenev A. Shermeneva M.* Long periodic waves on an even beach // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 61. № 5. P. 6000–6002.
10. *Shermenev A.* Nonlinear periodic waves on a beach // *Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics.* 2001. V. 94. № 1–2. P. 1–14.

Москва
e-mail: sher@orc.ru

Поступила в редакцию
15.VIII.2002