УДК 62-50; 531.36: 534.1

© 2004 г. Д. В. Баландин, М. М. Коган, А. А. Федюков

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНИХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Методами теории H_∞-управления получен закон управления параметрически возмущенным маятником, при котором уровень гашения колебаний принимает значение, близкое к минимально возможному. Приведены результаты численного моделирования.

Активно разрабатываемая в последнее время теории H_∞-управления [1, 2] позволяет синтезировать робастные регуляторы для систем с неопределенностью [3, 4]. Уравнения таких систем содержат неизвестные параметры или функции, которыми, в частности, являются параметрические возмущения.

Одна из нерешенных задач теории H_∞-управления состоит в нахождении минимально возможного (по всем допустимым управлениям) уровня гашения колебания (УГК), понимаемого как максимум (по всем допустимым внешним возмущениям) отношения нормы выхода системы к норме внешнего возмущения. Математически эта задача связана с существованием специального решения матричного параметрического уравнения Риккати, содержащего ряд параметров, один из которых соответствует УГК в системе. До настоящего времени отсутствуют конструктивные условия существования такого решения; имеется только возможность с использованием пакета программ MATLAB проверить, существует ли требуемое решение при данном УГК [5].

Ниже приводятся оценки границ минимально возможного УГК параметрически возмущенного маятника, полученных на основе решения задачи о предельных возможностях управления [6]. Построено робастное H_∞-управление маятником, которое обеспечивает УГК, близкий к минимально возможному.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый маятник с параметрическим и внешним возмущениями

$$\ddot{x}+\dot{x}+\omega_0^2[1+f\Omega(t,x,\dot{x})]x = u+\upsilon, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \tag{1.1}$$

где $\omega_0, f (\omega_0 \neq 0,\ 0 \leq f < 1)$ – заданные параметры, u – управление, $\upsilon = \upsilon(t)$ – внешнее возмущение. Коэффициент диссипации выбран равным единице, что обеспечивается соответствующей заменой независимой переменной t. Функция $\Omega(t, x, \dot{x})$ определяет параметрическое возмущение и удовлетворяет условию

$$|\Omega(t,x,\dot{x})| \leq 1, \quad \forall t, x, \dot{x} \tag{1.2}$$

Обозначим класс таких функций через Σ. Относительно внешнего возмущения $\upsilon(t)$ будем предполагать, что $\upsilon \in L_2(0, \infty)$, т.е.

$$J_1(\upsilon) = \int_0^\infty \upsilon^2(t)dt < \infty$$

Класс допустимых управлений определяется линейными обратными связями вида

$$u = -\alpha x - \beta\dot{x} \tag{1.3}$$

Обозначим класс таких законов управления через Ξ.

Для описания цели управления введем функционал, характеризующий качество переходного процесса,

$$J_2(u, \upsilon) = \int_0^\infty (\omega_0^2 x^2 + \dot{x}^2 + \rho^2 u^2)dt$$

где ρ – заданный параметр. Подынтегральное выражение этого функционала соответствует механической энергии невозмущенного маятника с учетом затрат на управление.

Задача гашения колебаний маятника состоит в определении управления из класса Ξ, обеспечивающего выполнение неравенства

$$J_2(u, \upsilon)/J_1(\upsilon) < \gamma, \quad \forall \upsilon \in L_2, \quad \upsilon \not\equiv 0, \quad \forall \Omega(t, x, \dot{x}) \in \Sigma \tag{1.4}$$

с возможно меньшим значением параметра $\gamma > 0$.

При данном допустимом законе управления определим уровень гашения колебаний (УГК) в системе следующим образом:

$$\Gamma(u) = \sup_{\Omega \in \Sigma} \sup_{\upsilon \not\equiv 0} [J_2(u, \upsilon)/J_1(\upsilon)]$$

Минимально возможный на множестве допустимых управлений УГК в системе при внешних и параметрических возмущениях определим как

$$\gamma_0 = \inf_{u \in \Xi} \Gamma(u) \tag{1.5}$$

так что при всех $\gamma > \gamma_0$ задача (1.4) разрешима, а при всех $\gamma \le \gamma_0$ не имеет решения. В теории управления эта задача известна как задача H_∞-управления.

Для ее решения приведем уравнение (1.1) к виду

$$\dot{\mathbf{x}} = A_f(t, \mathbf{x})\mathbf{x} + B_1\upsilon + B_2 u \tag{1.6}$$

в котором

$$\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}, \quad A_f(t, \mathbf{x}) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2[1 + f\Omega(t, \mathbf{x})] & -1 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

2. Синтез управления маятником в отсутствие параметрических возмущений. Рассмотрим сначала маятник без параметрического возмущения, т.е. при $f = 0$. В этом случае система (1.6) принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A_0\mathbf{x} + B_1\upsilon + B_2 u \tag{2.1}$$

где

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -1 \end{Vmatrix}$$

В соответствии с соотношением (1.3) допустимые законы управления имеют вид

$$u = -\Theta\mathbf{x}, \quad \Theta = (\alpha\beta) \tag{2.2}$$

Введем в качестве управляемого выхода вектор

$$\mathbf{z} = C\mathbf{x} + Du, \quad C = \begin{Vmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

и рассмотрим задачу H_∞-управления системой (2.1), которая состоит в построении закона управления, обеспечивающего для заданного значения $\gamma > 0$ при нулевых начальных условиях $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ для любого возмущения из класса $L_2(0, \infty)$ выполнение следующего неравенства:

$$\frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\upsilon\|} < \gamma, \quad \forall \upsilon \in L_2, \quad \upsilon \not\equiv 0 \tag{2.4}$$

а в отсутствие возмущений – асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Здесь для любой вектор-функции $\mathbf{h}(t) \in L_2$

$$\|\mathbf{h}\|^2 = \int_0^\infty |\mathbf{h}(t)|^2 dt$$

и $|\mathbf{h}|$ – евклидова норма. Таким образом, поставленная выше задача гашения колебаний маятника эквивалентна задаче H_∞-управления системой (2.1).

Приведем также иную трактовку этой задачи.

Введем обозначения

$$S_\upsilon = \sup_{\upsilon \not\equiv 0} \frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\upsilon\|}, \quad I_u = \inf_{u \in \Xi} \frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\upsilon\|}$$

Поставим в соответствие системе (2.1), (2.3) при любом допустимом управлении оператор H, отображающий возмущение $\upsilon(t)$ из L_2 в выход $\mathbf{z}(t)$ из L_2. Тогда задачу (2.4) можно сформулировать в виде

$$\|H\| < \gamma, \quad \|H\| = S_\upsilon$$

где $\|H\|$ – норма этого оператора.

В предположении, что замкнутая система (2.1), (2.2) асимптотически устойчива, введем преобразования Лапласа $V(p)$ и $\mathbf{Z}(p)$ для $\upsilon(t)$ и $\mathbf{z}(t)$ соответственно. Тогда

$$\mathbf{Z}(p) = H(p)V(p)$$

где передаточная матрица

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + (1+\beta)p + (\omega_0^2 + \alpha)} \left\| \begin{matrix} \omega_0 \\ p \\ -\rho(\alpha + \beta p) \end{matrix} \right\|$$

Используя равенство Парсеваля, можно показать, что

$$\|H\| = \|H\|_\infty = \sup_\omega \sqrt{H^T(-i\omega)H(i\omega)}$$

где величина $\|H\|_\infty$ является H_∞-нормой рассматриваемой системы. Таким образом, в терминах H_∞-теории УГК $\Gamma(u)$ совпадает с H_∞-нормой замкнутой системы при этом законе управления, а минимально возможный УГК γ_0 совпадает с минимальной H_∞-нормой по всем допустимым законам управления.

Решение задачи (2.4) следует из общей теории H_∞-управления [1]: один из возможных (так называемый центральный) H_∞-закон управления имеет вид

$$u = -\rho^{-2} B_2^T P \mathbf{x} \tag{2.5}$$

где $P \geq 0$ – стабилизирующее решение матричного уравнения Риккати

$$A_0^T P + PA_0 + PBP + C^T C = 0, \quad B = \gamma^{-2} B_1 B_1^T - \rho^{-2} B_2 B_2^T \tag{2.6}$$

т.е. такое решение, для которого матрица $A_0 + BP$ гурвицева. Уравнение Риккати решается численно с применением пакета прикладных программ MATLAB. При этом может оказаться, что при выбранном значении параметра γ требуемое решение не существует, и возникает проблема определения возможных значений γ.

3. Оценка минимального уровня гашения колебаний, порождаемых внешними возмущениями. Рассмотрим вопрос о нахождении минимально возможного УГК γ_0 маятника, определенного выражением (1.5), в отсутствие параметрических возмущений. В данном случае γ_0 определяется следующим образом:

$$\gamma_0 = \inf_{u \in \Xi} S_\upsilon \tag{3.1}$$

Непосредственное вычисление этой величины не представляется возможным. Поэтому попытаемся получить для нее нижнюю оценку.

Для построения этой оценки предлагается подход, основанный на анализе предельных возможностей управления линейной системой [6]. Суть подхода состоит в рассмотрении вспомогательной максиминной задачи. Воспользуемся известным из теории игр соотношением, связывающим максимин и минимакс:

$$\inf_{u \in \Xi} S_\upsilon \geq \sup_{\upsilon \neq 0} I_u$$

Если бы теперь удалось найти величину

$$\gamma_* = \sup_{\upsilon \neq 0} I_u \tag{3.2}$$

то она являлась бы оценкой снизу для искомой величины γ_0. В этом смысле задачу (3.2) можно рассматривать как задачу о предельных возможностях управления системой (2.1) при действующих внешних возмущениях из класса L_2.

Следует отметить, что задача (3.2) в определенной степени проще исходной задачи (3.1). Во всяком случае, для каждого заданного возмущения $\upsilon(t)$ задача минимизации квадратичного функционала может быть эффективно решена [7]. С другой стороны, результат минимизации на множестве всех допустимых управлений отношения нормы выхода системы к норме внешнего возмущения невозможно записать в виде простого и доступного для дальнейшего анализа выражения, содержащего $\upsilon(t)$. Поэтому попытаемся дать оценку вида

$$\gamma_* = \sup_{\upsilon \neq 0} I_u \geq \gamma_+$$

Рассмотрим сначала вопрос о построении для каждого заданного $\upsilon(t)$ оценки снизу минимального по $u \in \Xi$ значения $\|\mathbf{z}\|$. Для этого зафиксируем некоторое возмущение $\upsilon(t)$ из класса L_2, выберем произвольное управление $u(\mathbf{x}) = -\Theta\mathbf{x}$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость системы (2.1), и оценим снизу $\|\mathbf{z}\|$. Пусть $\mathbf{x}(t)$ – решение задачи Коши для системы (2.1) с нулевыми начальными условиями, заданным возмущением и выбранным управлением $u(\mathbf{x})$. Обозначим $\hat{u}(t) = u(\mathbf{x}(t))$. Имеем

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + B_1\upsilon(t) + B_2\hat{u}(t) \tag{3.3}$$

Перейдем в последнем равенстве к изображениям по Фурье, умножив (3.3) на множитель $e^{-i\omega t}$ и проинтегрировав полученное уравнение по t в пределах от $-\infty$ до ∞. В изображениях по Фурье получим

$$\begin{gathered} i\omega\mathbf{X} = A_0\mathbf{X} + B_1V + B_2U \\ \mathbf{X} = \int \mathbf{x}(t)e^{-i\omega t}dt, \quad V = \int \upsilon(t)e^{-i\omega t}dt, \quad U = \int \hat{u}(t)e^{-i\omega t}dt \end{gathered} \tag{3.4}$$

Интегрирование по t (и далее по ω) ведется от $-\infty$ до ∞.

Выразим вектор $\mathbf{X}$ из уравнения (3.4)

$$\mathbf{X} = RB_1V + RB_2U, \quad R = (i\omega I - A_0)^{-1} \tag{3.5}$$

и, воспользовавшись равенством Парсеваля, запишем выражение для квадрата нормы выхода системы

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int(\mathbf{X}^*C^TC\mathbf{X} + \rho^2U^*U)d\omega \tag{3.6}$$

где звездочка означает эрмитово сопряжение. Подставляя первое выражение (3.5) под знак интеграла в равенстве (3.6), получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{z}\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int[K(|U|^2 - U^*U_0 - U_0^*U) + B_1^TLB_1|V|^2]d\omega \\ K = B_2^TLB_2 + \rho^2, \quad L = R^*C^TCR, \quad U_0 = -K^{-1}B_2^TLB_1V\end{gathered} \tag{3.7}$$

Рассмотрим далее следующую вспомогательную задачу: для любой заданной функции V (а следовательно, и для любой заданной функции $\upsilon(t)$) найти такую функцию U, которая доставляет минимум подынтегральному выражению в (3.7).

Ее решение формулируется следующим образом: минимум подынтегрального выражения по U в соотношении (3.7) достигается при

$$U = U_0 = -K^{-1}B_2^TLB_1V \tag{3.8}$$

Доказательство этого утверждения содержится в [6].

При U_0 из соотношения (3.8) подынтегральное выражение в (3.7) приводится к виду $G(\omega)|V|^2$, где

$$G(\omega) = B_1^T(L - LB_2K^{-1}B_2^TL)B_1 \tag{3.9}$$

Отметим также, что поскольку подынтегральное выражение в (3.6) неотрицательно, то $G(\omega) \geq 0$.

Итак, для любого заданного возмущения $\upsilon(t)$ и любого фиксированного управления из класса Ξ имеем оценку

$$\|\mathbf{z}\|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int G(\omega)|V|^2d\omega$$

Значит,

$$I_u \geq \int G(\omega)|V|^2d\omega/\int|V|^2d\omega$$

Вычисляя далее sup по $\upsilon \in L_2$, получим

$$\sup_{\upsilon \neq 0} I_u \geq \sup_{V \neq 0}\left[\int G(\omega)|V|^2d\omega/\int|V|^2d\omega\right] = \max G(\omega)$$

Здесь и в дальнейшем max, если не указано иное, вычисляется при $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Окончательно искомая оценка предельных возможностей управления приобретает вид

$$\gamma_0 \geq \gamma_* \geq \max\sqrt{G(\omega)} = \gamma_+ \tag{3.10}$$

Для системы (2.1), (2.3) функция $G(\omega)$ определяется соотношением

$$G(\omega) = \frac{\rho^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{\rho^2[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2] + \omega^2 + \omega_0^2}$$

Максимизация этой функции по ω дает следующую оценку минимально возможного УГК маятника при отсутствии параметрических возмущений:

$$\gamma_+ = \rho/\sqrt{\rho^2\omega_0^2\theta^2+1}$$

где

$$\theta^2 = \begin{cases} 1, & \omega_0 \le \sqrt{3}/3 \\ \omega_0^{-2}(2\omega_0 - \sqrt{4\omega_0^2-1})\sqrt{4\omega_0^2-1}, & \omega_0 > \sqrt{3}/3 \end{cases}$$

Например, при $\rho = 1$ и $\omega_0 = 10$ не существует допустимого управления, при котором УГК маятника меньше, чем $\gamma_+ \approx 0.817$. Решая численно уравнение Риккати (2.6) при $\gamma = 0.819$, найдем, что закон управления (2.5), обеспечивающий данное УГК, имеет вид

$$u_1 = -0.50x_1 - 1.79x_2 \tag{3.11}$$

Это означает, что минимально возможный УГК маятника находится в пределах $0.817 \le \gamma_0 \le 0.819$.

4. Синтез управления маятником при параметрических возмущениях. Рассмотрим задачу о гашении колебаний маятника при параметрических ($f \ne 0$) и внешних возмущениях. С точки зрения H_∞-теории задача (1.4) является задачей робастного H_∞-управления, состоящей в построении закона управления, обеспечивающего для заданного значения $\gamma > 0$ при нулевых начальных условиях $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ для любого возмущения $\upsilon(t)$ из класса $L_2(0, \infty)$ и любого допустимого параметрического возмущения $\Omega(t, \mathbf{x})$ из класса Σ определенного условием (1.2), выполнение неравенства

$$\frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\upsilon\|} < \gamma, \quad \forall \upsilon \in L_2, \quad \upsilon \not\equiv 0, \quad \forall \Omega(t, \mathbf{x}) \in \Sigma \tag{4.1}$$

а в отсутствие внешних возмущений – асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Для решения этой задачи рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A_0\mathbf{x} + B_1\upsilon + F\xi + B_2u, \quad \mathbf{z} = C\mathbf{x} + Du \tag{4.2}$$

где $F = \mathrm{col}(0, f)$, ξ – дополнительная переменная, а все остальные переменные и параметры – те же, что и в исходной системе (1.6). При $\xi = -\Omega(t, \mathbf{x})E\mathbf{x}$, где $E = (\omega_0^2, 0)$, уравнения (4.2) и (1.6) совпадают, и в этом случае из условия (1.2) следует, что

$$|\xi(t)| \le |y(t)|, \quad \forall t \ge 0, \quad y = E\mathbf{x} \tag{4.3}$$

Перепишем первое из уравнений (4.2) и введем новый управляемый выход ($\hat{\mathbf{z}}$)

$$\dot{\mathbf{x}} = A_0\mathbf{x} + (B_1, \gamma\mu^{-1}F)\mathbf{w} + B_2u, \quad \hat{\mathbf{z}} = \mathrm{col}(\mathbf{z}, \mu y) \tag{4.4}$$

Здесь $\mathbf{w} = \mathrm{col}(w_1, w_2)$, $w_1 = \upsilon$, $w_2 = \gamma^{-1}\mu\xi$, $\mu \ne 0$ – некоторый параметр. Тогда закон управления, обеспечивающий для системы (4.4) при некотором значении μ выполнение целевого неравенства

$$\|\hat{\mathbf{z}}\| < \gamma\|\mathbf{w}\|, \quad \forall \mathbf{w} \in L_2, \quad \mathbf{w} \not\equiv 0 \tag{4.5}$$

будет обеспечивать выполнение неравенства (4.1) для системы (1.6) при том же значении параметра γ. Действительно, из неравенства (4.5) получим

$$\|\mathbf{z}\|^2 < \gamma^2\|\upsilon\|^2 + \mu^2(\|\xi\|^2 - \|y\|^2)$$

а значит, для системы (1.6), для которой выполняется условие $\|\xi\|^2 - \|y\|^2 \le 0$, следующее из условия (4.3), будет справедливо неравенство (4.1). С другой стороны, выполнение целевого неравенства (4.1) для системы (1.6) при некотором законе управления еще не означает, вообще говоря, что при том же законе управления и том же значении γ существует такое значение μ, что этот закон управления обеспечивает для системы (4.4) достижение цели (4.5).

Таким образом, в качестве робастного H_∞-управления маятником при параметрических возмущениях может быть взят центральный H_∞-закон управления для вспомогательной полностью определенной системы (4.4). Этот закон управления будет иметь вид (2.5), где $P \ge 0$ – стабилизирующее решение матричного уравнения Риккати

$$A_0^T P + PA_0 + P(B + \mu^{-2}FF^T)P + C^T C + \mu^2 E^T E = 0 \tag{4.6}$$

Это параметрическое уравнение также решается численно с использованием пакета программ MATLAB. При этом может оказаться, что при выбранных значениях параметров μ и γ требуемое решение не существует. Вопрос о выделении области на плоскости (μ, γ), в которой уравнение (4.6) разрешимо, будет рассмотрен в следующем разделе с использованием подхода, описанного в разд. 3.

5. Границы минимального уровня гашения колебаний маятника при параметрических возмущениях. Напомним, что минимально возможный УГК маятника при параметрических возмущениях определяется следующим образом:

$$\gamma_0 = \inf_{u \in \Xi} \Gamma(u) = \inf_{u \in \Xi} \sup_{\Omega \in \Sigma} S_v \tag{5.1}$$

так что при всех $\gamma > \gamma_0$ неравенство (4.1) разрешимо, а при всех $\gamma \le \gamma_0$ не имеет решения. Величину γ_0 естественно назвать минимальной робастной H_∞-нормой. Найдем границы интервала, в котором заведомо находится γ_0.

В качестве нижней границы γ_l величины γ_0 возьмем минимальную робастную H_∞-норму системы (1.6) для более узкого класса параметрических возмущений, а именно для стационарных параметрических возмущений $\Omega(t, \mathbf{x}) \equiv \Omega_0$, удовлетворяющих (1.2). Величина γ_l может быть непосредственно получена путем максимизации по Ω_0 приведенной выше оценки (3.10)

$$\gamma_0 \ge \gamma_l = \max_{\Omega_0} \max_{\omega \in (-\infty, \infty)} \sqrt{G(\omega, \Omega_0)} \tag{5.2}$$

Функция $G(\omega, \Omega_0)$ вычисляется для каждого заданного Ω_0 в соответствии с формулой (3.9), причем в матрице A_0 величина ω_0^2 меняется на $\omega_0^2(1 + f\Omega_0)$. В результате получим

$$G(\omega, \Omega_0) = \frac{\rho^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{\rho^2\{[\omega^2 - \omega_0^2(1 + f\Omega_0)]^2 + \omega^2\} + \omega^2 + \omega_0^2} \tag{5.3}$$

Для построения верхней границы величины γ_0 воспользуемся вспомогательной системой (4.4). Введем обозначения

$$\hat{S}_w = \sup_{\mathbf{w} \ne 0} \frac{\|\hat{\mathbf{z}}\|}{\|\mathbf{w}\|}, \quad \hat{I}_u = \inf_{u \in \Xi} \frac{\|\hat{\mathbf{z}}\|}{\|\mathbf{w}\|}$$

Для системы (4.4) определим минимальную H_∞-норму, зависящую от параметров γ и μ:

$$\nu_0(\gamma, \mu) = \inf_{u \in \Xi} \hat{S}_w \tag{5.4}$$

Из неравенства (4.5) непосредственно следует, что

$$\nu_0(\gamma, \mu) \le \gamma \tag{5.5}$$

Рассмотрим следующее уравнение относительно γ:

$$\nu_0(\gamma, \mu) = \gamma$$

Предположим, что это уравнение неявно определяет при $\gamma > 0$, $\mu > 0$ функцию $\gamma = \gamma_*(\mu)$ такую, что для заданного μ неравенство (4.5) выполнено при $\gamma > \gamma_*(\mu)$ и невыполнено при $\gamma \le \gamma_*(\mu)$ (как будет видно из дальнейшего, именно такая ситуация имеет место для маятника). Так как H_∞-управление для вспомогательной системы при данном μ является робастным H_∞-управлением для исходной системы с параметрическим возмущением при том же значении γ, то для минимальной робастной H_∞-нормы справедливо неравенство

$$\gamma_0 \le \gamma_*(\mu)$$

Тогда в качестве верхней границы γ_u величины γ_0 может служить

$$\gamma_u = \inf_{\mu \ne 0} \gamma_*(\mu) \tag{5.6}$$

Таким образом, минимальная робастная H_∞-норма находится в следующих пределах:

$$\gamma_l \le \gamma_0 \le \gamma_u \tag{5.7}$$

Величина γ_l определена выражением (5.2).

Для построения границы γ_u потребуется следующая вычислительная процедура. Она состоит в нахождении пары значений ($\mu > 0$, $\gamma > 0$), для которых существует стабилизирующее решение P двухпараметрического уравнения Риккати (4.6). Найденное значение γ можно принять за верхнюю оценку γ_u. Эта оценка может оказаться грубой, поэтому желательно найти по возможности меньшее значение γ.

Покажем далее, как можно сузить область поиска требуемых параметров на множестве $\mu > 0$, $\gamma > 0$. Основная идея при этом состоит в "отбраковывании" некоторой области первого квадранта, в которой заведомо не существует стабилизирующего решения уравнения Риккати (4.6).

С этой целью сначала к системе (4.4) применим подход, изложенный выше при получении оценки (3.10). А именно, при фиксированных γ и μ для этой системы получим

$$\nu_0(\gamma, \mu) \ge \sup_{\mathbf{w} \ne 0} \hat{I}_u \ge \sup_{\mathbf{W} \ne 0} \left(\frac{\int \mathbf{W}^* G_u(\omega) \mathbf{W} d\omega}{\int |\mathbf{W}|^2 d\omega} \right)^{1/2} = \nu_+(\gamma, \mu)$$

где

$$G_u(\omega) = \left\| \begin{matrix} B_1^T \\ \gamma\mu^{-1} F^T \end{matrix} \right\| [L_u - L_u B_2 K_u^{-1} B_2^T L_u](B_1, \gamma\mu^{-1} F)$$

$$K_u = B_2^T L_u B_2 + \rho^2, \quad L_u = R^*(C^T C + \mu^2 E^T E) R, \quad R = (i\omega I - A_0)^{-1}$$

$$\nu_+(\gamma, \mu) = \max \sqrt{r(G_u(\omega))}$$

$\mathbf{W}$ – фурье-изображение функции $\mathbf{w}(t)$, а $r(\cdot)$ – спектральный радиус соответствующей матрицы. В рассматриваемом случае имеем

$$G_u(\omega) = \Phi(\omega) \left\| \begin{matrix} 1 & \mu^{-1}\gamma f \\ \mu^{-1}\gamma f & \mu^{-2}\gamma^2 f^2 \end{matrix} \right\|$$

и спектральный радиус этой матрицы равен

$$r(G_u(\omega)) = (1+\mu^{-2}\gamma^2 f^2)\Phi(\omega)$$

где

$$\Phi(\omega) = \frac{\rho^2[\omega^2+\omega_0^2(1+\mu^2\omega_0^2)]}{\rho^2[(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2]+\omega^2+\omega_0^2(1+\mu^2\omega_0^2)}$$

Рассмотрим следующее уравнение относительно γ:

$$\nu_+(\gamma,\mu) = \gamma \tag{5.8}$$

решение которого обозначим $\gamma_+(\mu)$. Тогда в области $\gamma \le \gamma_+(\mu)$ уравнение Риккати (4.6) заведомо не имеет требуемого решения.

Отметим, что

$$\max\sqrt{r(G_u(\omega))} = (1+\mu^{-2}\gamma^2 f^2)^{1/2}\Psi(\mu), \quad \Psi(\mu) = \max\sqrt{\Phi(\omega)}$$

и решение уравнения (5.8) может быть выражено явно в виде

$$\gamma_+^2(\mu) = \frac{\mu^2\Psi^2(\mu)}{\mu^2 - f^2\Psi^2(\mu)}$$

Далее в суженной области $\gamma > \gamma_+(\mu)$ выбираем μ с некоторым шагом и для каждого такого μ численно (например, с использованием пакета MATLAB) находим минимально возможное значение γ, при котором уравнение Риккати (4.6) имеет стабилизирующее решение. Затем из полученных значений γ выбирается минимальное, которое и принимается за верхнюю оценку для γ_u.

Подчеркнем еще раз, что нижняя и верхняя оценки в неравенстве (5.7) находятся с помощью приведенных вычислительных процедур, и что существующие в настоящее время методы не позволяют, в общем случае, найти точное значение γ_0 и соответствующее ему робастное управление. В связи с этим конструктивную процедуру построения робастного H_∞-управления можно представить следующим образом. Как было показано выше, H_∞-управление с заданным уровнем γ гашения возмущений для вспомогательной системы (4.4) является робастным H_∞-управлением для исходной неопределенной системы (1.5) с тем же γ. Следовательно, в качестве искомого робастного H_∞-управления может быть выбран закон управления

$$u = -\rho^{-2}B_2^T P\mathbf{x} \tag{5.9}$$

где $P \ge 0$ – стабилизирующее решение уравнения (4.6) при μ из области определения функции $\gamma_*(\mu)$ и при $\gamma > \gamma_*(\mu)$. Следует также отметить, что уровень гашения возмущений в неопределенной системе (1.5) не может быть сделан меньшим, чем полученная нижняя оценка γ_l ни при каком допустимом законе управления.

Теперь приведем эти границы для маятника при $\omega_0 = 10$, $f = 0.05$, $\rho = 1$. Нижняя граница γ_l определяется численно согласно (5.2), (5.3): $\gamma_l \approx 0.820$. Численный анализ показывает, что минимальное значение функции $\gamma_+(\mu)$ достигается при $\mu = 0.141$ и равняется 0.942. Возьмем $\gamma_u \approx 0.943$. Таким образом,

$$0.820 \le \gamma_0 \le 0.943$$

Решая численно уравнение Риккати (4.6) при $\mu = 0.141$ и $\gamma = 0.943$, найдем робастное управление (5.9) в виде

$$u_2 = -1.503x_1 - 3.955x_2 \tag{5.10}$$

6. Численное моделирование. Сравним путем численного моделирования гашение колебаний параметрически возмущенного маятника при двух стратегиях: законе управления (3.11), построенном для параметрически невозмущенного маятника, и робастном законе управления (5.10). Моделирование проводилось при следующих внешнем и параметрическом возмущениях:

$$v(t) = \begin{cases} \sin 10t, & 0 \le t \le 20 \\ 0, & t > 20 \end{cases}, \quad \Omega(t, \mathbf{x}) = \sin 20t$$

(частоты возмущений близки к резонансным). В результате при законе управления (3.11) отношение нормы выхода к норме внешнего возмущения получилось равным 1.150, а при законе управления (5.10) равным 0.903. Это означает, что при данных законах управления УГК удовлетворяют неравенствам $\Gamma(u_1) \ge 1.150$ и $\Gamma(u_2) \ge 0.903$. С другой стороны, согласно процедуре построения робастного H_∞-управления имеем $\Gamma(u_2) \le 0.943$. Следовательно, закон управления u_2 обеспечивает УГК $\Gamma(u_2)$ при параметрических и внешних возмущениях в пределах от 0.903 до 0.943. Для сравнения укажем, что в отсутствие управления ($u = u_0 = 0$) $\Gamma(u_0) \ge 1.753$, что, по крайней мере, в 1.86 раза превышает минимально возможный УГК. Отметим, что для законов управления u_0 и u_1 верхние границы в параметрически возмущенной системе не могут быть указаны в принципе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00591, 02-01-00230, 04-01-00222), программы "Университеты России" (УР.03.01.013), Конкурсного центра фундаментального естествознания (А03-2.10-380) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 03-51-5547).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. № 8. С. 831–847.
2. *Барабанов А.Е., Первозванский А.А.* Оптимизация по равномерно-частотным показателям // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 3–32.
3. *Xie L., de Souza C.E.* Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty // IEEE Trans. Automal. Control. 1992. V. 37. № 8. P. 1188–1191.
4. *Коган М.М.* Синтез робастных H_∞-субоптимальных регуляторов как решение дифференциальной игры в условиях неопределенности: прямая и обратная задачи // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 109–120.
5. *Kwakernaak H.* Robust control and H_∞-optimization // Automat. 1993. V. 29. № 2. P. 255–273.
6. *Баландин Д.В.* Предельные возможности управления линейными системами и оценка минимальной H_∞-нормы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 6. С. 50–56.
7. *Салуквадзе М.Е.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора при постоянно действующих возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1962. № 6. С. 721–731.

Нижний Новгород
e-mail: mkogan@nngasu.ru

Поступила в редакцию
27.I.2003