УДК: 531.36: 534.1

© 2004 г. А. С. Ковалева

УПРАВЛЕНИЕ ЧАСТОТОЙ ДВИЖЕНИЯ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ

Исследуются возможности слабого управления резонансными колебаниями нелинейной системы. Малые случайные возмущения приводят к отклонениям частот от резонанса. Цель управления – удержать частоту движения в малой окрестности резонансной поверхности. Показано, что малые уклонения частот от заданных значений можно описать как решение линеаризованной диффузионной системы. Это позволяет применить принцип динамического программирования для решения задачи управления. Строится ограниченное по норме управление, обеспечивающее максимальное среднее время пребывания системы в околорезонансной области. Показано, что управление не зависит от вида возмущения и структуры консервативной части системы. Рассмотрен пример управления частотой колебаний в системе связанных осцилляторов.

Стандартные преобразования сводят уравнения возмущенного движения колебательной системы в окрестности резонанса к уравнениям движения "эквивалентного маятника" с его колебаниями, вращением и сепаратрисой, разделяющей эти области [1, 2]. Переход через сепаратрису из области колебаний маятника в область вращения соответствует неограниченному возрастанию частотной расстройки и срыву резонанса. Цель управления – воспрепятствовать выходу системы из допустимой области под действием случайных возмущений.

Использование этой модели позволяет применить к задачам управления стохастическими резонансными системами хорошо развитые асимптотические методы управления колебательными системами [3, 4]. Строилось управление, препятствующее выходу системы из резонансной области на максимально возможном интервале времени [5]. Развитая процедура формально применима к широкому классу систем, но на практике решение задачи управления стохастической резонансной системой на относительно большом интервале времени представляет значительные трудности. В данной работе ставятся более жесткие ограничения на движение системы, требующие исследования движения на относительно коротком интервале времени. Предполагается, что цель управления – удержать частоты системы в малой окрестности стационарного резонансного режима. Управление малыми уклонениями сводится к задаче управления линейной системой уравнений в вариациях для малых уклонений. Функционал и ограничения задачи также формулируются в терминах малых уклонений. Аналогичная задача исследовалась в детерминированном случае [3]. Для стохастической системы решение уравнений в вариациях аппроксимируется диффузионным процессом [6, 7]. Это позволяет заменить исходную нелинейную задачу управления простой и хорошо изученной задачей, решение которой ищется методом динамического программирования. Строится управление, удовлетворяющее заданным ограничениям и поддерживающее резонансный режим на максимально возможном интервале времени.

1. Основные уравнения и постановка задачи. Ограничимся детальным рассмотрением двухчастотной системы со скалярной медленной переменной. Обобщение на многомерный случай обсуждается на примере разд. 3.

Уравнения движения приведены к стандартной форме системы с быстрыми и медленными переменными

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon f(y, \theta_1, \theta_2) + \varepsilon^n F(y, \theta_1, \theta_2)u + \varepsilon\Delta(y, \theta_1, \theta_2)\xi(t), \quad y \in Y, \quad u \in U \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i(y) + \varepsilon f_i(y, \theta_1, \theta_2) + \varepsilon^n F_i(y, \theta_1, \theta_2)u + \varepsilon\Delta_i(y, \theta_1, \theta_2)\xi(t), \quad \theta_i(\mathrm{mod}2\pi) \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где Y – открытая область, U – замкнутая область в R_1, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Показатель степени n в коэффициенте ε^n будет определен таким образом, чтобы управление оставалось слабым, но противодействующим внешним возмущениям в соответствии с требованиями задачи.

Предполагается, что правые части системы (1.1) 2π – периодичны по переменным θ_1, θ_2 и удовлетворяют требованиям гладкости по всем переменным, обеспечивающим существование решения и справедливость необходимых преобразований при всех допустимых управлениях. Случайное возмущение $\xi(t)$ рассматривается как случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условиям сильного перемешивания [6, 7]. Необходимым условиям удовлетворяют, например, нормальные марковские процессы или ограниченные случайные процессы с достаточно быстро убывающей корреляционной функцией [7].

Следуя известному подходу [1], определим резонансные соотношения между частотами системы. Рассмотрим среднее по времени $\Theta(y,\omega_1,\theta_2)$ для функции $f(y, \theta_1, \theta_2)$

$$\Theta(y, \omega_1, \omega_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(y, \omega_1 t + \theta_1, \omega_2 t + \theta_2)dt$$

Если функция $\Theta(y, \omega_1, \omega_2)$ равномерно непрерывна по ω_1, ω_2 при всех $y \in Y$, то система нерезонансная и $\Theta(y, \omega_1, \omega_2) = \langle f(y, \theta_1, \theta_2)\rangle$, где $\langle\cdot\rangle$ означает усреднение по фазам. Предположим, что функция Θ как функция частот ω_1, ω_2 имеет линию разрыва

$$\rho(y) = m_1\omega_1(y) + m_2\omega_2(y) = 0 \tag{1.2}$$

при некоторых целочисленных m_1, m_2, не равных одновременно нулю. Уравнение (1.2) определяет резонансное соотношение между частотами системы. Пусть y^* – единственное изолированное решение уравнения (1.2), такое, что

$$\rho(y^*) = 0, \quad d\rho(y^*)dy = r \neq 0 \tag{1.3}$$

Предположим также, что средние по времени функций

$$F(y, \omega_1 t + \theta_1, \omega_2 t + \theta_2) \text{ и } \Delta(y, \omega_1 t + \theta_1, \omega_2 t + \theta_2)\Delta(y, \theta_1, \theta_2)$$

не порождают новых резонансных соотношений в малой окрестности точки y^*.

Пусть в невозмущенной системе существует устойчивый резонансный режим с частотами $\omega_1(y^*)$ и $\omega_2(y^*)$, удовлетворяющими соотношениям (1.2). Цель управления состоит в удержании частот системы в окрестности резонанса при действии возмущений, вызывающих уклонение переменной y от значения y^* и приводящих к нарушению резонансного соотношения (1.2).

Сформулируем это требование как задачу оптимального управления. Выделим допустимую область движения и построим управление, обеспечивающее максимальное среднее время пребывания системы внутри допустимой области.

Следуя стандартной процедуре [1, 2], введем новые переменные υ, φ, характеризующие частотную и фазовую расстройки соответственно. Запишем

$$\begin{aligned} \mu\upsilon &= \rho(y) = m_1\omega_1(y) + m_2\omega_2(y), \quad \mu = \varepsilon^{1/2} \\ \varphi &= m_1\theta_1 + m_2\theta_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Из определений (1.3), (1.4) следует, что в окрестности резонанса справедливы соотношения

$$y = Y(\mu\upsilon) = y^* + \mu y_1 + \mu^2 \ldots, y_1 = r^{-1}\upsilon$$
$$\theta_1 = \theta, \quad \theta_2 = m_2^{-1}(\varphi - m_1\theta) \tag{1.5}$$

Подставляя выражения (1.4), (1.5) в систему (1.1), получим уравнения в стандартной форме с малым параметром μ

$$\dot{\upsilon} = \mu[f^*(\varphi,\theta) + \Delta^*(\varphi,\theta)\xi(t)] + \mu^{2n-1}F^*(\varphi,\theta)u + \mu^2\Phi_1$$
$$\dot{\varphi} = \mu\upsilon + \mu^{2n}F_2^*(\varphi,\theta)u + \mu^2\Phi_2 \tag{1.6}$$
$$\dot{\theta} = \omega^* + \mu\omega_1\upsilon + \mu^{2n}F_3^*(\varphi,\theta)u + \mu^2\Phi_3$$

где

$$\theta = \theta_1, \quad \omega^* = \omega(y^*), \qquad \omega_1 = \omega_y(y^*)$$

Функции f^*, F^*, Δ^* определены соотношениями

$$f^*(\varphi,\theta) = r^{-1}f(y^*, \theta, \theta_2(\varphi,\theta)) \tag{1.7}$$

и т.д. Остаточные члены $\Phi_i(\upsilon, \varphi, \theta, u, \xi(t), \mu)$ в правых частях уравнений (1.6) исчезают при переходе к пределу при $\mu \to 0$, и их явный вид несущественен для дальнейших преобразований.

Определим допустимую область движения. Выделим в системе (1.6) порождающую консервативную подсистему

$$\upsilon' = \beta(\varphi), \quad \varphi' = \upsilon \tag{1.8}$$

где $\beta(\varphi) = \langle f(\varphi,\theta)\rangle$, штрих определяет производную по “медленному” времени $\tau = \mu t$. Уравнения (1.8) описывают движение маятника с периодическим потенциалом $U(\varphi)$ таким, что $U_\varphi(\varphi) = -\beta(\varphi)$. На фазовой плоскости колебаниям маятника соответствует замкнутая область Σ, ограниченная сепаратрисой. Эта область рассматривается как допустимая. Переход через сепаратрису из области колебаний в область вращения маятника соответствует неограниченному возрастанию частотной расстройки и срыву резонанса. Пусть потенциал $U(\varphi)$ имеет минимум в точке φ^*, т.е. $\beta(\varphi^*) = 0$, $\beta_\varphi(\varphi^*) = c < 0$. Устойчивая стационарная точка (y^*, φ^*) соответствует резонансу в невозмущенной системе.

Таким образом, задача управления свелась к управлению нелинейной системой (1.6) в допустимой области $(\upsilon, \varphi) \in \Sigma$. Эта задача исследовалась и приводила к достаточно сложным результатам [5]. Упростим построение управления, рассмотрев малые уклонения от невозмущенного состояния

$$\mu^{1/2}P = (\varphi - \varphi^*), \quad \mu^{1/2}Q = \upsilon \tag{1.9}$$

Сформулируем задачу управления относительно переменных P, Q. Удержать частоты системы в малой окрестности резонанса означает удержать процесс $\{P(\tau,\mu), Q(\tau,\mu)\}$ в некоторой окрестности $D \subset \Sigma$ точки $P = Q = 0$. При такой постановке задачи цель управления – обеспечить максимальное среднее время пребывания процесса $\{P(\tau,\mu), Q(\tau,\mu)\}$ в области D до момента T^μ первого выхода на ее границу Г. Форма области зависит от ограничений задачи. Предположим, что D – открытая односвязная область в R_2, $\bar{D}$ – ее замыкание, симметричное относительно начала координат, т.е. $\{P, Q\} \in \bar{D} \Leftrightarrow \{-P, -Q\} \in \bar{D}$. Ограничения на управление имеют вид $|u| \le U_0$. При сделанных предположениях функционал и ограничения задачи записываются в виде

$$\begin{aligned} &J^{\mu}(u) = \mathrm{M}T^{\mu} \\ &T^{\mu} = \inf\{\tau: P(\tau, \mu), Q(\tau, \mu) \notin D / P(0, \mu), Q(0, \mu) \in D, |u| \le U_0\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Оптимальное управление u_{opt} определяется как

$$u_{\text{opt}} = \arg \max_{|u| \le U_0} J^{\mu}(u) \tag{1.11}$$

Учитывая замены переменных (1.4), (1.9), можно интерпретировать стратегию управления как захват частот системы в $\mu^{3/2}$-окрестность резонансной точки. Такая постановка задачи оправдана, так как допустимая область Σ имеет порядок μ, и система должна оставаться внутри области, не приближаясь к ее границе.

Подставляя соотношения (1.9) в систему (1.6) и принимая во внимание уравнения (1.8), запишем

$$\begin{aligned} &Q' = \mu^{-1/2}[\beta(\mu^{1/2}P + \varphi^*) - \beta(\varphi^*)] + \mu^{-1/2}\Delta^*(\mu^{1/2}P + \varphi^*, \theta)\xi(\tau/\mu) + \\ &+ \mu^{2n-5/2}F^*(\mu^{1/2}P + \varphi^*, \theta)u + \mu^{-1/2}b(\mu^{1/2}P + \varphi^*, \theta) + \mu^{1/2}\Phi_1, \quad Q(0) = 0 \\ &P' = Q + \mu^{2n-3/2}F_2^*(\mu^{1/2}P + \varphi^*, \theta)u + \mu^{1/2}\Phi_2, \quad P(0) = 0 \\ &\theta' = \mu^{-1}\omega^* + \mu^{2n-1}F_3^*(\mu^{1/2}P + \varphi^*, \theta)u + \mu^{1/2}\Phi_3 \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$b(\varphi, \theta) = f^*(\varphi, \theta) - \beta(\varphi), \quad \langle b(\varphi, \theta)\rangle = 0$$

Таким образом, задача управления состоит в минимизации функционала (1.10) на траекториях системы (1.12).

2. Асимптотическое решение задачи. Для анализа уравнений возмущенного движения (1.12) используется теорема о малых (нормальных) уклонениях [6, 7]. Сформулируем эту теорему для неуправляемой возмущенной системы и приведем обобщение для управляемой системы (1.6).

Рассмотрим в области $z \in Z \in R_n$, $0 \le t < \infty$ систему уравнений

$$\dot{z} = \mu b(t, z) + B(t, z)\xi(t), \quad z(0) = z_0 \tag{2.1}$$

Предположим, что вектор $b(t, z)$ и матрица $B(t, z)$ равномерно непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы по z и равномерно непрерывны и ограничены по t в рассматриваемой области изменения переменных, $\xi(t)$ – случайный процесс в R_l, удовлетворяющий условиям сильного перемешивания, $\mathrm{M}\xi(t) = 0$. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия

1°. Равномерно по $z \in Z$, $t_0 \ge 0$ существуют пределы

$$\begin{aligned} &\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} b(t, z)dt = \beta(z), \quad \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial b(t, z)}{\partial z}dt = \frac{\partial \beta(z)}{\partial z} \\ &\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} ds \int_{t_0}^{t_0+T} A_{ki}(s, t, z)dt = \alpha_{ki}(z) \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$A_{ki}(s, t, z) = \sum_{m, j = 1}^{l} B_{kj}(s, z)B_{mi}(t, z)\mathrm{M}[\xi_j(s)\xi_m(s)]; \quad k, i = 1, \ldots, n$$

2°. Укороченная система

$$\dot{z} = \mu\beta(z), \quad z(0) = z_0 \tag{2.3}$$

имеет решение $z^*(\tau)$, $\tau = \mu t$.

Тогда процесс

$$Z(\tau, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}(z(t, \mu) - z^*(\tau)) \tag{2.4}$$

при $\mu \to 0$ слабо сходится на отрезке $[0, T_0]$ к гауссовскому марковскому процессу $\zeta(\tau)$, удовлетворяющему системе линейных уравнений

$$\zeta'(\tau) = C(z^*(\tau))\zeta(\tau) + \sigma(z^*(\tau))w'(\tau), \quad \zeta(0) = 0 \tag{2.5}$$

где $w(\tau)$ – стандартный винеровский процесс, матрица коэффициентов сноса $C(z) = \partial\beta/\partial z$, матрица диффузии определяется равенством $\sigma(z)\sigma^T(z) = \alpha(z)$. Детерминированная часть системы (2.5) соответствует уравнениям в вариациях для укороченной системы (2.2). Второе слагаемое получено с учетом слабой сходимости возмущения $\mu^{-1/2}B(\tau/\mu, z)\xi(\tau/\mu)$ к процессу $\sigma(z)w'(\tau)$ с коэффициентом диффузии (2.2).

Условие существования пределов (2.2) означает, что подынтегральные выражения в (2.2) допускают усреднение. Показано [7], что построение предельного уравнения (2.5) распадается на две части: сначала строится уравнение возмущенного движения относительно неусредненной системы, а затем проводится усреднение. Используя развитый подход [7], можно применить принцип частичного усреднения для стохастических систем [4, 8] и получить, что процесс (2.1) слабо сходится к решению $\zeta_\mu(\tau)$ частично усредненного уравнения

$$\zeta'_\mu(\tau) = K(\tau/\mu, z^*(\tau))\zeta_\mu(\tau) + \sigma(z^*(\tau))w'(\tau), \quad \zeta_\mu(0) = 0 \tag{2.6}$$

где

$$K(t, z) = C(z) + k(t, z), \quad k(t, z) = \partial[b(t, z) - \beta(z)]/\partial z$$

Применим теорему о малых уклонениях в форме (2.6) для перехода к пределу при $\mu \to 0$ в (1.12). Положим $n = 5/4$. Тогда при $\mu \to 0$ слагаемое, зависящее от управления, в первом уравнении (1.12) удерживается в главном приближении, в прочих уравнениях остается малой величиной. Сравнивая равенства (1.6), (2.1), (1.9), (2.4) и используя соотношения (2.6), получим, что при любом допустимом управлении процесс $\{P(\tau, \mu), Q(\tau, \mu)\}$ слабо сходится при $\mu \to 0$ на интервале времени $0 \le \tau < T_0$ к решению $\{p(\tau, \mu), q(\tau, \mu)\}$ частично усредненной системы уравнений

$$\begin{aligned} p' &= q, \quad p(0) = 0 \\ q' &= cp + F_0(\theta)u + \sigma w'(\tau), \quad q(0) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$F_0(\theta) = F^*(\varphi^*, \theta), \quad \theta = \omega^*\tau/\mu$$

Система (2.7) аналогична (2.6) с дополнительным слагаемым, отражающим влияние управления. Коэффициент диффузии определяется формулой

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(s)\langle\Delta^*(\varphi^*, \theta)\Delta^*(\varphi^*, \theta + \omega^* s)\rangle ds \tag{2.8}$$

В силу сделанных предположений функция $\Delta^*(\varphi^*, \theta)\Delta^*(\varphi^*, \theta + \omega^* s)$ не порождает дополнительных резонансных соотношений, поэтому в равенствах (2.2) возможен переход от среднего по времени к среднему по фазе, приводящий к формуле (2.8).

Пусть τ^μ – первый момент выхода процесса $\{p(\tau, \mu), q(\tau, \mu)\}$ на границу Γ области D, $I^\mu(u) = M\tau^\mu$, $|u| \le U_0$. Определим управление

$$u^\mu = \arg\max_{|u| \le U_0} I^\mu(u) \tag{2.9}$$

Слабая сходимость $\{P, Q\} \to \{p, q\}$ означает [7], что при любом допустимом управлении $u \in U$ существует сходимость

$$\left|I^\mu(u) - J^\mu(u)\right| \to 0, \quad \mu \to 0$$

Отсюда получено [4]

$$\left|J^\mu(u^\mu) - J^\mu(u_{\text{opt}})\right| \to 0, \quad \mu \to 0 \tag{2.10}$$

т.е. управление u^μ квазиоптимально по отношению к исходной задаче. Следовательно, задачу (1.10) – (1.12) можно заменить более простой задачей (2.7), (2.9).

Задача (2.7), (2.9) – вырожденная, так как возмущение действует только по координате q, но к ней применим принцип динамического программирования [9]. При этом решение трактуется в обобщенном смысле [9, 10].

Уравнение динамического программирования для задачи (2.7), (2.9) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial V}{\partial \tau} + cp\frac{\partial V}{\partial q} + q\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} + \max_{|u| \le U_0}\left[F_0(\theta)u\frac{\partial V}{\partial q}\right] = -1, \quad p, q \in D \\ V(\tau, p, q) = 0, \quad p, q \in \Gamma\end{gathered} \tag{2.11}$$

где $\theta = \omega^*\tau/\mu$. Из уравнения (2.11) с учетом начальных условий (2.7) будем иметь

$$u^\mu = U_0 \operatorname{sign}\left[F_0(\theta)\frac{\partial V}{\partial q}\right] \tag{2.12}$$

Подставляя выражение (2.12) в выражения (2.11), получим уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial V}{\partial \tau} + cp\frac{\partial V}{\partial q} + q\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} + U_0\left|F_0(\theta)\frac{\partial V}{\partial q}\right| = -1, \quad p, q \in D \\ V(\tau, p, q) = 0, \quad p, q \in \Gamma\end{gathered} \tag{2.13}$$

Функция V имеет единственный максимум в точке $p = q = 0$.

Для доказательства заменим анализ уравнения (2.13) анализом более простого однородного усредненного уравнения. Усредняя (2.13) по быстрой фазе $\theta = \omega^*\tau/\mu$, получим уравнение, не зависящее от медленной переменной τ,

$$\begin{gathered}cp\frac{\partial V^0}{\partial q} + q\frac{\partial V^0}{\partial p} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V^0}{\partial q^2} + U_0 f_0\left|\frac{\partial V^0}{\partial q}\right| = -1, \quad p, q \in D \\ V^0(p, q) = 0, \quad p, q \in \Gamma\end{gathered} \tag{2.14}$$

где $f_0 = \langle|F_0(\theta)|\rangle$. Доказана [11] равномерная сходимость

$$V(\tau, p, q) \underset{\mu \to 0}{\to} V^0(p, q), \quad p, q \in \bar{D}, \quad 0 \le \tau \le \tau^\mu \tag{2.15}$$

и, как следствие,

$$I^\mu(u^\mu) = V(0, 0, 0) \underset{\mu \to 0}{\to} V^0(0, 0) \tag{2.16}$$

Из уравнений (2.11)–(2.14) и симметрии области $\bar{D}$ следует, что $V^0(-p, -q) = V^0(p, q)$. Если решение уравнения (2.14) существует и ограничено, то разложение четной функции $V^0(p, q)$ содержит только положительные четные степени аргументов. Это означает, что

$$\frac{\partial V^0}{\partial q} = \frac{\partial V^0}{\partial p} = 0, \quad p = q = 0 \tag{2.17}$$

В свою очередь, из соотношений (2.14), (2.17) получим, что $\partial^2 V^0/\partial q^2 = -2/\sigma^2 < 0$ в точке $p = q = 0$, т.е. функция $V^0(p, q)$ имеет максимум по q при $p = q = 0$.

Покажем, что $p = q = 0$ – единственный максимум функции $V^0(p, q)$ в области D. Предположим, что существует отличная от нуля точка максимума функции $V^0(p, q)$. Тогда должна существовать промежуточная точка $\bar{p}$, $\bar{q}$, в которой функция $V^0(p, q)$ достигает минимума, т.е. $\partial V^0/\partial q = \partial V^0/\partial p = 0$, но $\partial^2 V^0/\partial q^2 > 0$ при $p = \bar{p}$, $q = \bar{q}$. Последнее неравенство противоречит уравнению (2.14). Следовательно, $p = q = 0$ – единственный максимум функции $V^0(p, q)$ в области D.

Из условия максимума в точке $q = 0$ следует, в частности, что

$$\operatorname{sign}\frac{\partial V^0}{\partial q} = -\operatorname{sign} q \tag{2.18}$$

во всей области D. Используя соотношение (2.18), приведем уравнение (2.14) к виду

$$\begin{aligned} &cp\frac{\partial V^0}{\partial q} + q\frac{\partial V^0}{\partial p} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V^0}{\partial q^2} - U_0 f_0 \frac{\partial V^0}{\partial q}\operatorname{sign} q = -1, \quad p, q \in D \\ &V^0(p, q) = 0, \quad p, q \in \Gamma \end{aligned} \tag{2.19}$$

Соотношения (2.12), (2.18), (2.19) используются для построения управления в виде обратной связи.

Рассмотрим два варианта синтеза управления, вытекающих из (2.12), (2.18), (2.19):

$$\begin{aligned} &1)\ u_1(\upsilon, \theta) = -U_0 \operatorname{sign} F_0(\theta) \operatorname{sign} \upsilon \\ &2)\ u_2(\upsilon, y, \theta_1, \theta_2) = -U_0 \operatorname{sign}[r^{-1} F(y, \theta_1, \theta_2)] \operatorname{sign} \upsilon \end{aligned} \tag{2.20}$$

где, согласно равенствам (1.4), (1.7),

$$F_0(\theta) = r^{-1} F(y^*, \theta_1, \theta_2(\theta_1, \varphi^*))$$

Покажем, что управления u_1 и u_2 квазиоптимальны по отношению к возмущенной системе (1.12). Для этого вычислим среднее время $\mathrm{M}T_1^\mu$ и $\mathrm{M}T_2^\mu$ достижения траекторией системы (1.12) границы области D при $u = u_1$ и $u = u_2$ соответственно. Внося u_1 или u_2 в систему (1.1) и повторив преобразования, приведенные в разд. 1, 2, получим, что при $\mu \to 0$ решение $P(\tau, \mu)$, $Q(\tau, \mu)$ системы (1.12) слабо сходится к решению $p_0(\tau)$, $q_0(\tau)$ усредненной системы

$$\begin{aligned} &p_0' = q_0 \quad p_0(0) = 0 \\ &q_0' = cp_0 - f_0 U_0 \operatorname{sign} q_0 + \sigma w'(\tau), \quad q_0(0) = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Система (2.21) аналогична (2.7), но получена усреднением всех слагаемых, включая члены, зависящие от управления.

Из слабой сходимости $\{P, Q\} \to \{p, q\}$, $\{P, Q\} \to \{p_0, q_0\}$ следует, в частности, что [7]

$$\mathrm{M}T_1^\mu \to \mathrm{M}T_0, \quad \mathrm{M}T_2^\mu \to \mathrm{M}T_0, \quad \mu \to 0 \tag{2.22}$$

где T_0 – момент первого выхода процесса $\{p_0(\tau), q_0(\tau)\}$ на границу области D, т.е.

$$T_0 = \inf\{\tau\colon p_0(\tau), q_0(\tau) \notin D\}$$

В свою очередь, из уравнений (2.19), (2.21) следует, что

$$MT_0 = V^0(0, 0) \tag{2.23}$$

Сравнивая соотношения (2.10), (2.16), (2.22) и (2.23), получим, что

$$\left|J^{\mu}(u_{1,2}) - J^{\mu}(u_{\text{opt}})\right| \to 0, \quad \mu \to 0 \tag{2.24}$$

т.е. управления (2.20) квазиоптимальны и не зависят от случайного возмущения и структуры неуправляемой системы. Физическая интерпретация полученного решения очевидна из уравнений (2.21): для "эквивалентного маятника" управление u_1 или u_2 эквивалентно сухому трению с максимально возможным коэффициентом.

Если выбрать другой критерий качества и другие ограничения на управления, то управление может оказаться зависящим от структуры системы и возмущения. Но и в этом случае задача управления исходной нелинейной системой в допустимой области изменения переменных сводится к задаче управления линейной системой (2.5).

3. Управление частотой вынужденного движения нелинейного осциллятора. Как пример, рассмотрим задачу управления резонансными колебаниями нелинейной системы с одной степенью свободы при случайных флуктуациях собственной частоты. Уравнение управляемого движения принимает вид

$$\ddot{x} + \varepsilon n\dot{x} + \phi(x) + \varepsilon\xi(t)g(x) = \varepsilon a\sin\Omega t + \varepsilon^{5/4}u \tag{3.1}$$

Здесь $\phi(x) = d\Pi(x)/dx$, $\Pi(x)$ – потенциал консервативной части системы, $\xi(t)$ – случайное возмущение, удовлетворяющее условиями разд. 1. Управление u строится по критериям разд. 1.

Обозначим $\dot{x} = z$ и введем новые переменные y, θ_2 по формулам [1]

$$\begin{gathered} y = \frac{1}{2}z^2 + \Pi(x), \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial x} = \frac{\omega(y)}{z(y, x)} \\ z(y, x) = \pm\sqrt{2(y - \Pi(x))}, \quad \omega(y) = \frac{2\pi}{T(y)} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Период движения определяется соотношением

$$T(y) = \oint\limits_{y = \text{const}} \frac{dx}{z(y, x)}$$

Второе из соотношений (3.2) определяет формальную зависимость $x = X(y, \theta_2)$ и соответственно $z(y, x) = Z(y, \theta_2)$.

Преобразуя уравнение (3.1) к стандартной форме с помощью замены (3.2), получим систему уравнений, аналогичную (1.1),

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon Y(y, \theta_1, \theta_2, \xi(t), u)Z(y, \theta_2) \\ \dot{\theta}_2 &= \omega(y) + \varepsilon\frac{\partial\omega}{\partial y}Y(y, \theta_1, \theta_2, \xi(t), u)Z(y, \theta_2) \\ \dot{\theta}_1 &= \Omega \end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$Y(y, \theta_1, \theta_2, \xi(t), u) = -nZ(y, \theta_2) - \xi(t)g(X(y, \theta_2)) + a\sin\theta_1 + \varepsilon^{1/4}u \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.3), (3.4) следует, что при 2π – периодичной по θ_2 функции $Z(y, \theta_2)$ может существовать бесконечное число линий разрыва вида (1.2). В дальнейшем интересуемся резонансом по первой гармонике, т.е. условия (1.2), (1.3) примут вид

$$\begin{aligned} &\rho(y) = \omega(y) - \Omega = 0, \quad \rho(y^*) = 0 \\ &d\rho(y^*)/dy = d\omega(y^*)/dy = r \neq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для анализа малых уклонений от резонанса используем преобразование (1.4)

$$\mu\upsilon = \rho(y) = \omega(y) - \Omega, \quad \varphi = \theta_1 - \theta_2, \quad \theta_1 = \theta \tag{3.6}$$

Как и в разд. 1, ищем управление, препятствующее уклонению частот от резонанса. Малые уклонения вводятся по формулам (1.9), функционал и ограничения задачи определяются формулами (1.10). Подставляя новые переменные (3.6) в уравнения (3.3), используя соотношения (1.9) и повторяя преобразования, проведенные в разд. 1, 2, получим, что для построения управлений (2.12) или (2.20) необходимо определить функцию

$$F(y, \theta_1, \theta_2) = Z(y, \theta) = \dot{x} \tag{3.7}$$

Сравнивая соотношения (3.7) и (2.20), заметим, что синтез управления может быть построен в виде

$$u = u_2 = -U_0 \operatorname{sign}(r^{-1}\dot{x}) \operatorname{sign}[\omega(y) - \Omega] \tag{3.8}$$

где $r = \omega_y(y^*)$. Знак коэффициента r часто может быть определен без вычисления частоты $\omega(y)$: $r > 0$, если в малой окрестности точки y^* система “жесткая”, и $r < 0$, если система “мягкая”.

Рассмотрим другую схему возбуждения резонансных колебаний. Предположим, что периодическое возбуждение не может быть приложено непосредственно к нелинейной системе. Слабый сигнал усиливается с помощью резонансного контура и передается на вход управляемой нелинейной системы с помощью слабых связей. Уравнения движения двух слабо связанных осцилляторов запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \varepsilon n\dot{x} + \phi(x) + \varepsilon\xi(t)g(x) = \varepsilon^{5/4}u + \varepsilon f(\psi, \dot{\psi}) \\ &\ddot{\psi} + \varepsilon b\dot{\psi} + \Omega^2\psi = \varepsilon a \sin\Omega t + \varepsilon s(x, \dot{x}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Функции $f(\psi, \dot{\psi})$ и $s(x, \dot{x})$ отражают взаимное влияние двух подсистем.

Приведем систему (3.9) к стандартной форме. От переменных x, $\dot{x}$ перейдем к переменным y, θ_2 по формулам (3.2). Для переменных ψ, $\dot{\psi}$ введем стандартную замену

$$\psi = R\cos\theta_1, \quad \dot{\psi} = -\Omega R \sin\theta_1 \tag{3.10}$$

Подставляя выражения (3.2), (3.10) в уравнения (3.9) и используя обозначения разд. 1, приведем систему (3.9) к виду

$$\begin{aligned} &\dot{R} = -\frac{\varepsilon}{\Omega}[\Psi(R, \theta_1, \theta_3) + S(y, \theta_2)]\sin\theta_1 \\ &\dot{y} = \varepsilon[f(y, \theta_2) + \Theta(R, \theta_1)Z(y, \theta_2) + \Delta(y, \theta_2)\xi(t) + \varepsilon^{1/4}F(y, \theta_2)u] \\ &\dot{\theta}_1 = \Omega - \frac{\varepsilon}{\Omega R}[\Psi(R, \theta_1, \theta_3) + S(y, \theta_2)]\cos\theta_1 \\ &\dot{\theta}_2 = \omega(y) + \varepsilon\frac{\partial\omega}{\partial y}[f(y, \theta_2) + \Theta(R, \theta_1)Z(y, \theta_2) + \Delta(y, \theta_2)\xi(t) + \varepsilon^{1/4}F(y, \theta_2)u] \\ &\dot{\theta}_3 = \Omega \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $Z(y, \theta_2) = \dot{x}$, прочие коэффициенты имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\Psi(R, \theta_1, \theta_3) = b\Omega R \sin\theta_1 + a\sin\theta_3 \\
&f(y, \theta_2) = -nZ^2(y, \theta_2), \quad \Delta(y, \theta_2) = -g(X(y, \theta_2))Z(y, \theta_2) \\
&F(y, \theta_2) = Z(y, \theta_2) \\
&S(y, \theta_2) = s(X(y, \theta_2), Z(y, \theta_2)), \quad \Theta(R, \theta_1) = f(R\cos\theta_1 - \Omega R \sin\theta_1)
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Нелинейные связи порождают бесконечное число резонансных соотношений типа (1.2). Считаем, что цель управления – поддержать резонансные колебания по первой гармонике. В этом случае условия резонанса сохраняют вид (3.5).

Введем новые переменные

$$
\begin{aligned}
&\varphi = \theta_2 - \theta_1, \quad \varphi_1 = \theta_1 - \theta_3, \quad \theta_2 = \theta \\
&\mu \upsilon = \rho(y) = \omega(y) - \Omega, \quad \mu = \varepsilon^{1/2}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Подстановка соотношений (3.5), (3.13) в систему (3.11) приводит к системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{R} = -\mu^2[\Psi_1(R, \theta + \varphi, \varphi_1) + S_1(\theta, \varphi)] + \mu^3 \ldots \\
&\dot{\varphi}_1 = -\mu^2[\Psi_2(R, \theta + \varphi, \varphi_1) + S_2(\theta, \varphi)] + \mu^3 \ldots \\
&\dot{\upsilon} = \mu[f^*(\theta) + Q^*(R, \theta, \varphi)] + \mu\Delta^*(\theta)\xi(t) + \mu^{3/2}F^*(\theta)u \ldots \\
&\dot{\varphi} = \mu\upsilon + \mu^2 \ldots \\
&\dot{\theta} = \Omega + \mu \ldots
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Коэффициенты f^*, Δ^*. F^* определяются так же, как в разд. 1, функция $Q^* = r^{-1}\Theta(R, \theta - \varphi)Z(y^*, \theta)$, функции Ψ_i и S_i получены подстановкой соотношений $y = y^*$, $\theta_1 = \theta + \varphi$, $\theta_3 = \theta + \varphi + \varphi_1$ в правые части соответствующих уравнений в (3.11).

Система (3.14) включает медленные переменные R, φ_1, "полубыстрые" переменные υ, φ и быструю переменную θ. Анализ движения должен проводиться методом последовательного усреднения с учетом членов второго приближения [5], но для вычисления стационарных точек можно ограничиться рассмотрением стационарной системы первого приближения.

По аналогии с выделением медленной подсистемы (1.8) выделим в системе (3.14) укороченную усредненную систему. Усредняя правые части системы (3.14) по быстрой фазе θ, учитывая вид функций (3.12) и пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости, получим

$$
\begin{aligned}
&\dot{R} = -\mu^2[\psi_1(R, \varphi_1) + s_1(\varphi)] \\
&\dot{\varphi}_1 = -\mu^2[\psi_2(R, \varphi_1) + s_2(\varphi)] \\
&\dot{\upsilon} = \mu[\beta_0 + \beta_1(R, \varphi)] \\
&\dot{\varphi} = \mu\upsilon
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\beta_0 = \langle f^*(\theta)\rangle, \quad \beta_1(R, \varphi) = \langle Q^*(R, \theta, \varphi)\rangle \\
&\psi_i(R, \varphi_1) = \langle \Psi_i(R, \theta + \varphi, \varphi_1)\rangle, \quad s_i(\varphi) = \langle S_i(\theta, \varphi)\rangle
\end{aligned}
$$

Стационарные точки определяются как решение системы

$$
\upsilon = 0, \quad \beta_0 + \beta_1(R, \varphi) = 0, \quad \psi_i(R, \varphi_1) + s_i(\varphi) = 0 \tag{3.16}
$$

Разделение слагаемых, зависящих от фаз φ и φ_1, исключает из рассмотрения вторичные резонансы в усредненной системе. Устойчивость стационарных состояний исследуется обычным способом [1].

Построим управление, препятствующее уклонению частот от резонанса. Выберем устойчивую стационарную точку R^*, φ^*, φ_1^* и исследуем уклонения от стационарного состояния на интервале времени $t \sim 1/\mu$ при $\mu \to 0$. Поскольку скорости изменения медленных и "полубыстрых" переменных различны, то масштаб уклонений также должен быть различен. Сравнивая степени малого параметра в уравнениях (3.14), представим малые уклонения в виде

$$\mu^{1/2}Q = \upsilon, \quad \mu^{1/2}P = \varphi - \varphi^*, \quad \mu^{3/2}H = R - R^*, \quad \mu^{3/2}G = \varphi_1 - \varphi_1^* \tag{3.17}$$

т.е. уклонения от стационарных значений R^*, φ_1^* малы по сравнению с уклонениями по "полубыстрым" переменным.

Подставляя выражения (3.17) в систему (3.14) и повторяя преобразования, проведенные в разд. 1, 2 с учетом порядка величин, получим, что при $\mu \to 0$ уравнения для переменных P, Q отделяются и не зависят от переменных G, H. Отсюда следует, что функционал и ограничения задачи можно определить формулами (1.10), не зависящими от G, H.

Из теоремы о малых уклонениях следует, что при $\mu \to 0$ процесс $\{P, Q, G, H\}$ на интервале времени $0 \le \tau \le T_0$ сходится к решению $\{p, q, g, h\}$ аппроксимирующей линеаризованной системы. Как и в уравнениях (2.7), детерминированная часть линеаризованной системы соответствует системе уравнений в вариациях для усредненной системы (3.15), и учитываются управляющие и возмущающие воздействия. Принимая во внимание порядки величин в соотношениях (3.17), получим, что при $\mu \to 0$ аппроксимирующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &p' = q, \quad p(0) = 0 \\ &q' = cp + F_0(\theta)u + \sigma w'(\tau), \quad q(0) = 0 \\ &g' = k_1 p, \quad h' = k_2 p \end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$c = \partial\beta_1(R^*, \varphi)/\partial\varphi, \quad F_0(\theta) = Z(y^*, \theta), \quad k_i = ds_i(\varphi^*)/d\varphi$$

Штрих означает производную по медленному времени $\tau = \mu t$.

Уравнения разделяются, и все выводы и преобразования, относящиеся к построению квазиоптимального управления относительно переменных P, Q, сохраняют силу. В частности, отсюда следует, что синтез управления имеет вид

$$u = u_2 = -U_0 \operatorname{sign}(r^{-1}\dot{x}) \operatorname{sign}[\omega(y) - \Omega] \tag{3.19}$$

Полученное решение означает, что при сделанных предположениях квазиоптимальное управление не зависит от возмущения и параметров линейной подсистемы. Единственный параметр нелинейной подсистемы, необходимый для построения управления (3.8), – знак постоянной r. Этот вывод сохраняет силу и для детерминированной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00011).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
2. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
3. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
4. *Ковалева А.С.* Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990. 256 с.
5. *Kovaleva A.S.* Control of resonance oscillations in stochastic systems // Computational Stochastic Mechanics / Eds. P. Spanos and G. Deodatis. Rotterdam: Millpress, 2003. P. 335–341.
6. *Хасьминский Р.З.* О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применение. 1966. Т. 11. Вып. 2. С. 240–259.
7. *Kushner H. J.* Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory. Cambridge: MIT Press, 1984. 269 p.
8. *Kushner H. J.* Weak Convergence Methods and Singularly Perturbed Stochastic Control and Filtering Problems. Boston: Birkhauser, 1990. 233 p.
9. *Fleming W.H., Rishel R.W.* Deterministic Stochastic Optimal Control. Berlin, etc.: Springer, 1975 = *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 316 с.
10. *Fleming W. H., Soner H.M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Berlin, etc. : Springer, 1993. 428 p.
11. *Bensoussan A.* Perturbation Methods in Optimal Control. N. Y: Wiley, 1988. 492 p.

Москва
e-mail: a.kovaleva@ru.net

Поступила в редакцию
19.VI.2003