УДК 531.381:534.1

© 2004 г. А.П. Маркеев

О МАЯТНИКООБРАЗНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ГОРЯЧЕВА – ЧАПЛЫГИНА

Рассматривается движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести. Геометрия масс тела и начальные условия его движения соответствуют случаю интегрируемости Горячева – Чаплыгина [1, 2]. В этом случае существуют периодические маятникообразные движения, отвечающие колебаниям или вращениям тела вокруг оси динамической симметрии, занимающей неизменное горизонтальное положение. Решается задача об орбитальной устойчивости этих движений. Найдено явное решение линеаризованных уравнений возмущенного движения и показано, что в линейном приближении колебания и вращения тела орбитально устойчивы, а нелинейная задача об устойчивости всегда является резонансной: при любой амплитуде колебаний (или любой угловой скорости вращения) тела в невозмущенном движении его возмущенное движение таково, что имеет место резонанс четвертого порядка (два отличных от единицы мультипликатора чисто мнимы и равны $\pm i$). Показано, что в нелинейной постановке задачи маятникообразные колебания тела всегда орбитально неустойчивы, а вращения устойчивы.

1. Введение. Пусть твердое тело имеет одну закрепленную точку O и движется в однородном поле тяжести. Вес тела mg, расстояние от неподвижной точки до центра тяжести равно l. Пусть $OXYZ$ – неподвижная система координат, ось OZ которой направлена вертикально вверх. Другая система координат $Oxyz$ жестко связана с движущимся телом, ее оси Ox, Oy и Oz направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O, соответствующие главные моменты инерции равны A, B и C. Через x_*, y_*, z_* обозначим координаты центра тяжести в системе $Oxyz$. Предположим, что геометрия масс тела отвечает случаю Горячева – Чаплыгина [1 – 6]. Тогда, считая, что $A = B = 4C$, $z^* = 0$, можно без ограничения общности положить $x^* = l$, $y^* = 0$.

Ориентацию тела зададим при помощи углов Эйлера, которые вводятся обычным образом. Уравнения движения имеют вид [7]

$$4\frac{dp}{dt} - 3qr = 0, \quad 4\frac{dq}{dt} + 3rp = \mu^2\gamma_3, \quad \frac{dr}{dt} = -\mu^2\gamma_2$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

$$p = \frac{d\psi}{dt}\gamma_1 + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi, \quad q = \frac{d\psi}{dt}\gamma_2 - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi, \quad r = \frac{d\psi}{dt}\gamma_3 + \frac{d\varphi}{dt} \tag{1.1}$$

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

Введено обозначение $\mu^2 = mgl/C$.

В случае интегрируемости Горячева – Чаплыгина имеется ограничение на начальные условия движения. Они должны быть такими, чтобы постоянная интеграла площадей была равна нулю, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$4(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = 0 \tag{1.2}$$

При условии (1.2) уравнения движения (1.1) помимо интеграла энергии и интеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ имеют еще и дополнительный интеграл

$$r(p^2 + q^2) - \mu^2 p\gamma_3 = \mu^3 c \quad (c = \text{const}) \tag{1.3}$$

Наличие дополнительного интеграла (1.3) позволяет свести интегрирование уравнений движения к квадратурам. Аналитическим свойствам решений уравнений (1.1) и качественному анализу движения тела в случае Горячева – Чаплыгина посвящено довольно много исследований (см. монографии [3 – 6] и приведенную в них библиографию).

При выполнении условия (1.2) уравнения (1.1) имеют решения, соответствующие плоским маятникообразным движениям тела, для которых

$$\psi = \text{const}, \quad \theta = \pi/2, \quad p = q = 0, \quad r = d\varphi/dt, \quad \gamma_1 = \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \cos\varphi, \quad \gamma_3 = 0$$

Для этих решений ось Oz динамической симметрии тела неподвижна и занимает горизонтальное положение, а движение тела вокруг этой оси описывается дифференциальным уравнением физического маятника $d^2\varphi/dt^2 + \mu^2\cos\varphi = 0$. Исключая из рассмотрения движения асимптотические к неустойчивому положению равновесия маятника (для него $\varphi = \pi/2$), будем исследовать орбитальную устойчивость колебаний произвольной амплитуды в окрестности устойчивого положения равновесия ($\varphi = 3\pi/2$) или вращений с произвольной угловой скоростью.

2. Функция Гамильтона. Если геометрия масс тела отвечает случаю Горячева – Чаплыгина, то функция Лагранжа задается равенствами

$$L = T - \Pi, \quad T = \frac{1}{2}C(4p^2 + 4q^2 + r^2), \quad \Pi = mgl\gamma_1$$

Функция Гамильтона равняется сумме $T + \Pi$, в которой проекции p, q, r угловой скорости тела выражены через обобщенные импульсы p_ψ, p_θ, p_φ, определяемые соотношениями

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = 4C(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = 4C(p\cos\varphi - q\sin\varphi), \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = Cr$$

Учтя, что при условии Горячева – Чаплыгина (1.2) величина p_ψ равна нулю, находим отсюда

$$p = (p_\theta\cos\varphi - p_\varphi\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi)/(4C), \quad q = -(p_\theta\sin\varphi + p_\varphi\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi)/(4C), \quad r = p_\varphi/C$$

Введя затем безразмерные переменные q_1, q_2, p_1, p_2 при помощи канонического (с валентностью $(C\mu)^{-1}$) преобразования

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} + q_1, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + q_2, \quad p_\varphi = C\mu p_1, \quad p_\theta = C\mu p_2$$

а также безразмерное время $\tau = \mu t$, получим следующее выражение для функции Гамильтона задачи Горячева – Чаплыгина:

$$H = \frac{1}{8}[4 + \operatorname{tg}^2 q_2]p_1^2 + \frac{1}{8}p_2^2 - \cos q_1 \cos q_2 \tag{2.1}$$

Дополнительный интеграл (1.3) задачи Горячева – Чаплыгина в переменных q_i, p_i $(i = 1, 2)$ записывается в виде

$$p_1(\operatorname{tg}^2 q_2 p_1^2 + p_2^2) - 4\sin q_2(\cos q_1 \operatorname{tg} q_2 p_1 - \sin q_1 p_2) = c \tag{2.2}$$

3. Постановка задачи об орбитальной устойчивости плоских периодических движений. Плоским колебаниям и вращениям тела вокруг оси динамической симметрии отвечают решения, для которых $q_2 = p_2 = 0$, а q_1, p_1 описываются каноническими уравнениями с гамильтонианом $H^{(0)} = {}^1\!/_2 p_1^2 - \cos q_1$. Эти уравнения имеют интеграл $H^{(0)} = h = \text{const}$. При $-1 < h < 1$ тело совершает колебания в окрестности устойчивого положения равновесия, для которого центр тяжести тела лежит на вертикали OZ ниже закрепленной точки O. При $h > 1$ осуществляется режим плоских вращений тела вокруг оси Oz.

Для дальнейшего невозмущенное движение целесообразно записать в переменных действие – угол I, w, как это сделано ранее [8] при исследовании плоских движений волчка Ковалевской. В случае колебаний положим $k_1 = \sin(\beta/2)$, где β – амплитуда колебаний $(0 < \beta < \pi)$. Тогда

$$q_1 = 2\arcsin[k_1 \operatorname{sn}(u, k_1)], \quad p_1 = 2k_1 \operatorname{cn}(u, k_1), \quad u = \frac{2K(k_1)w}{\pi} \tag{3.1}$$

где

$$w = \omega_1\tau + w(0), \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2K(k_1)} \tag{3.2}$$

а $k_1 = k_1(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = \frac{8}{\pi}[E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)] \tag{3.3}$$

В случае вращений положим $k_2^2 = 2(1 + h)^{-1}$. Тогда

$$q_1 = 2\operatorname{am}(u, k_2), \quad p_1 = \frac{2}{k_2}\operatorname{dn}(u, k_2), \quad u = \frac{K(k_2)w}{\pi} \tag{3.4}$$

где

$$w = \omega_2\tau + w(0), \quad \omega_2 = \frac{\pi}{k_2 K(k_2)} \tag{3.5}$$

а $k_2 = k_2(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = \frac{4E(k_2)}{\pi k_2} \tag{3.6}$$

Используются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов [9].

В невозмущенном движении имеем $q_2 = p_2 = 0$, $I = I_0 = \text{const}$, а переменные q_1, p_1 при заданном значении I_0 определяются формулами (3.1) – (3.3) в случае колебаний и формулами (3.4) – (3.6) в случае вращений.

Положим $r_1 = I - I_0$. Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений тела эквивалентна задаче об их устойчивости по отношению к переменным q_2, p_2, r_1.

4. Об устойчивости колебаний. Примем величину $\omega_1\tau$ в качестве новой независимой переменной. Функцию Гамильтона возмущенного движения можно представить в виде ряда

$$H = r_1 + h_2 + H_4 + \dots \tag{4.1}$$

Функции h_2 и H_4 определяются равенствами

$$h_2 = \frac{K(k_1)}{4\pi}(p_2^2 + 4\mu_{02}q_2^2), \quad H_4 = \mu_{20}r_1^2 + \mu_{12}r_1q_2^2 + \mu_{04}q_2^4$$

$$\begin{gathered}
\mu_{02} = 3\mathrm{dn}^2u + k_1^2 - 2, \quad \mu_{20} = -\frac{\pi[E(k_1) - (1-k_1^2)K(k_1)]}{16k_1^2(1-k_1^2)K^2(k_1)} \\
\mu_{12} = \frac{1}{4(1-k_1^2)}[1 - k_1^2 + 3\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u(\mathrm{cn}u\mathrm{zn}u - \mathrm{sn}u\mathrm{dn}u)]
\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\mu_{04} = \frac{K(k_1)}{12\pi}(6k_1^2\mathrm{cn}^2u + 2k_1^2 - 1)$$

Величина u определена последней формулой (3.1), k_1 соответствует невозмущенному движению. Функция (4.1) π – периодична относительно w. Многоточием в (4.1) обозначена совокупность членов выше пятой степени относительно q_2, p_2, $|r_1|^{1/2}$.

Интеграл (2.2) для уравнений возмущенного движения также можно представить в виде ряда по степеням величин q_2, p_2, r_1:

$$g_2 + g_4 + \dots = c \tag{4.3}$$

где g_n – форма степени n относительно q_2, p_2, $|r_1|^{1/2}$ с периодическими относительно w коэффициентами. При этом g_2 – квадратичная форма относительно q_2, p_2, имеющая вид

$$g_2 = 8k_1\mathrm{cn}u(2k_1^2 - 1 - k_1^2\mathrm{cn}^2u)q_2^2 + 8k_1\mathrm{sn}u\mathrm{dn}uq_2p_2 + 2k_1\mathrm{cn}up_2^2 \tag{4.4}$$

Об устойчивости в первом (линейном) приближении. В линеаризованных уравнениях возмущенного движения $r_1 = \mathrm{const}$, а изменение переменных q_2 и p_2, если за независимую переменную принять величину w, описывается уравнениями

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial h_2}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial h_2}{\partial q_2} \tag{4.5}$$

Функция h_2 определена первым равенством (4.2).

Пусть $\mathbf{X}(w)$ – матрица фундаментальных решений системы (4.5), нормированная условием $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица второго порядка. Элементы $x_{ij}(w)$ матрицы $\mathbf{X}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_{1j}}{dw} = \frac{K(k_1)}{2\pi}x_{2j}, \quad \frac{dx_{2j}}{dw} = -\frac{2K(k_1)}{\pi}\mu_{02}x_{1j}; \quad j = 1, 2 \tag{4.6}$$

и начальным условиям

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0 \tag{4.7}$$

Квадратичная часть (4.4) интеграла (4.3) является первым интегралом линейных уравнений (4.5). Используя этот интеграл, уравнения (4.6) удалось проинтегрировать в явном виде и получить следующие выражения для величин $x_{ij}(w)$:

$$
\begin{gathered}
x_{11} = \operatorname{cn}\upsilon \operatorname{dn}\upsilon\, f(\upsilon), \quad x_{21} = 2\operatorname{sn}\upsilon\,[4k_1^2\operatorname{sn}^2\upsilon - (1+k_1^2)(1+k_1^2\operatorname{sn}^4\upsilon)]f^3(\upsilon) \\
x_{12} = \operatorname{sn}\upsilon\, f(\upsilon)/2, \quad x_{22} = \operatorname{cn}\upsilon \operatorname{dn}\upsilon\,(1+k_1^2\operatorname{sn}^4\upsilon)f^3(\upsilon) \\
f(\upsilon) = (1-k_1^2\operatorname{sn}^4\upsilon)^{-1/2}, \quad \upsilon = K(k_1)w/\pi
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

Здесь модуль эллиптических функций равен k_1.

При $w = \pi$ матрица $\mathbf{X}(w)$ будет иметь такой вид:

$$
\mathbf{X}(\pi) = \left\| \begin{matrix} 0 & a^{-2} \\ -a^2 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad a = [4(1-k_1^2)]^{1/4}
\tag{4.9}
$$

Корни (мультипликаторы) характеристического уравнения этой матрицы

$$
\mu^2 + 1 = 0
\tag{4.10}
$$

различны и имеют модули, равные единице ($\mu_1 = i$, $\mu_2 = -i$). Отсюда следует [10], что изучаемые плоские колебания твердого тела орбитально устойчивы в линейном приближении.

Вычисление характеристических показателей. Резонанс. Пусть $\pm i\lambda$ – характеристические показатели линейной системы (4.5). Из равенств $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\pi\lambda)$ следует, что величина λ будет корнем уравнения $\cos\pi\lambda = 0$. Отсюда следует, что λ – постоянное полуцелое число, не зависящее от амплитуды колебаний тела в невозмущенном движении. Конкретное значение этого числа можно найти, воспользовавшись непрерывной зависимостью характеристических показателей от величины k_1. Для этого рассмотрим колебания тела бесконечно малой амплитуды ($k_1 \to 0$). В предельном случае, когда $k_1 = 0$, функция h_2 представляет собой гамильтониан $(p_2^2 + 4q_2^2)/8$ линейного осциллятора с частотой, равной 1/2. Следовательно, $\lambda = 1/2$. Отсюда, принимая во внимание π – периодичность гамильтониана возмущенного движения по w, получаем, что задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний твердого тела в случае Горячева – Чаплыгина всегда является резонансной: при любой амплитуде колебаний имеет место резонанс четвертого порядка $4\lambda = 2$.

Об орбитальной неустойчивости плоских колебаний в строгой нелинейной постановке задачи. Согласно полученным ранее алгоритмам [11], для исследования нелинейной задачи об орбитальной устойчивости рассматриваемых периодических движений тела требуется получить нормальную форму гамильтониана возмущенного движения (4.1).

Нормализация квадратичной части гамильтониана (4.1). Сначала надо построить преобразование, нормализующее гамильтониан $h_2(q_2, p_2, w)$ линейной системы (4.5). Для этого (см.[11]) сделаем замену переменных $w, r_1, q_2, p_2 \to u_1, \upsilon_1, u_2, \upsilon_2$ по формулам

$$
\begin{gathered}
w = u_1, \quad r_1 = \upsilon_1 + \frac{1}{4}(u_2^2 + \upsilon_2^2) - h_2(n_{11}u_2 + n_{12}\upsilon_2, n_{21}u_2 + n_{22}\upsilon_2, u_1) \\
q_2 = n_{11}u_2 + n_{12}\upsilon_2, \quad p_2 = n_{21}u_2 + n_{22}\upsilon_2 \\
n_{j1} = \frac{1}{a}x_{j1}\cos\frac{u_1}{2} + ax_{j2}\sin\frac{u_1}{2}, \quad n_{j2} = -\frac{1}{a}x_{j1}\sin\frac{u_1}{2} + ax_{j2}\cos\frac{u_1}{2}, \quad j = 1, 2
\end{gathered}
\tag{4.11}
$$

функции $x_{ij}(u_1)$ задаются формулами (4.8).

Преобразование (4.11) является каноническим, унивалентным и π – периодическим относительно u_1. После замены (4.11) функция Гамильтона (4.1) запишется в виде

$$F = F_2 + F_4 + \dots$$
$$F_2 = \upsilon_1 + \frac{1}{4}(u_2^2 + \upsilon_2^2), \qquad F_4 = \mu_{20}\upsilon_1^2 + f_2(u_2, \upsilon_2, u_1)\upsilon_1 + f_4(u_2, \upsilon_2, u_1) \tag{4.12}$$

Здесь f_k форма степени k относительно u_2, υ_2 с π – периодическими по u_1 коэффициентами

$$f_k = \sum_{\nu + \mu = k} f_{\nu\mu}(u_1)u_2^\nu \upsilon_2^\mu$$

Выпишем нужные в дальнейшем выражения для коэффициентов формы f_4

$$f_{40} = \mu_{20}m_{20}^2 + \mu_{12}m_{20}n_{11}^2 + \mu_{04}n_{11}^4$$

$$f_{31} = 2\mu_{20}m_{20}m_{11} + \mu_{12}(m_{11}n_{11}^2 + 2m_{20}n_{11}n_{12}) + 4\mu_{04}n_{11}^3 n_{12}$$

$$f_{22} = \mu_{20}(m_{11}^2 + 2m_{20}m_{02}) + \mu_{12}(m_{02}n_{11}^2 + 2m_{11}n_{11}n_{12} + m_{20}n_{12}^2) + 6\mu_{04}n_{11}^2 n_{12}^2$$

$$f_{13} = 2\mu_{20}m_{11}m_{02} + \mu_{12}(m_{11}n_{12}^2 + 2m_{02}n_{11}n_{12}) + 4\mu_{04}n_{11}n_{12}^3 \tag{4.13}$$

$$f_{04} = \mu_{20}m_{02}^2 + \mu_{12}m_{02}n_{12}^2 + \mu_{04}n_{12}^4$$

$$m_{20} = 1/4 - K(k_1)(4\mu_{02}n_{11}^2 + n_{21}^2)/(4\pi), \quad m_{02} = 1/4 - K(k_1)(4\mu_{02}n_{12}^2 + n_{22}^2)/(4\pi)$$

$$m_{11} = -K(k_1)(4\mu_{02}n_{11}n_{12} + n_{21}n_{22})/(2\pi)$$

В новых переменных интеграл (4.3) запишется в виде ряда по степеням величин u_2, υ_2, υ_1

$$G = G_2 + G_4 + \dots = c \tag{4.14}$$

где G_n – форма степени n относительно u_2, υ_2, $|\upsilon_1|^{1/2}$, причем вычисления показывают, что

$$G_2 = 4k_1\sqrt{1-k_1^2}\left[\left(\sin\frac{u_1}{2}u_2 + \cos\frac{u_1}{2}\upsilon_2\right)^2 - \left(\cos\frac{u_1}{2}u_2 - \sin\frac{u_1}{2}\upsilon_2\right)^2\right] \tag{4.15}$$

Многоточием в соотношениях (4.12) и (4.14) обозначена совокупность членов выше пятой степени относительно u_2, υ_2, $|\upsilon_1|^{1/2}$.

Нормализация гамильтониана возмущенного движения до членов четвертой степени включительно. Нормальную форму членов четвертой степени в функции Гамильтона (4.12) можно, следуя описанному ранее подходу [11], получить при помощи метода Депри – Хори [12, 13]. Нормализующее каноническое преобразование u_1, υ_1, u_2, $\upsilon_2 \to \theta_1$, ρ_1, ξ_2, η_2 будет близким к тождественному

$$u_1 = \theta_1 + \dots, \quad \upsilon_1 = \rho_1 + \dots, \quad u_2 = \xi_2 + \dots, \quad \upsilon_2 = \eta_2 + \dots$$

Многоточия обозначают сходящиеся ряды по степеням ρ_1, ξ_2, η_2 с π – периодическими по θ_1 коэффициентами.

Нормализованный гамильтониан (4.12) примет вид

$$\Gamma = \rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2 + c_{20}\rho_1^2 + c_{11}\rho_1\rho_2 + \rho_2^2[c_{02} + \alpha_{40}\sin(4\theta_2 - 2\theta_1) + \beta_{40}\cos(4\theta_2 - 2\theta_1)] + O_3;$$
$$\xi_2 = \sqrt{2\rho_2}\sin\theta_2, \quad \eta_2 = \sqrt{2\rho_2}\cos\theta_2 \tag{4.16}$$

Постоянные коэффициенты c_{ij}, α_{40}, β_{40} вычисляются по формулам [11]

$$c_{20} = \mu_{20}, \quad c_{11} = \langle f_{20} + f_{02}\rangle, \quad c_{02} = \frac{1}{2}\langle 3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}\rangle$$

$$\alpha_{40} = -\frac{1}{2}\langle\sigma_{40}\sin 2u_1 - \chi_{40}\cos 2u_1\rangle, \quad \beta_{40} = \frac{1}{2}\langle\sigma_{40}\cos 2u_1 + \chi_{40}\sin 2u_1\rangle \tag{4.17}$$

$$\sigma_{40} = f_{40} - f_{22} + f_{04}, \quad \chi_{40} = f_{13} - f_{31}$$

Символом $\langle g\rangle$ обозначается среднее значение π – периодической функции $g(u_1)$ на периоде.

С точностью до несущественного постоянного множителя $8k_1\sqrt{1-k_1^2}$ интеграл (4.14) можно записать в виде

$$G = \rho_2\cos(2\theta_2 - \theta_1) + O_2 = \text{const} \tag{4.18}$$

Через O_k обозначена совокупность членов не ниже k-й степени относительно ρ_1, ρ_2.

Из соотношений (4.2), (4.8), (4.13) и (4.17) видно, что σ_{40} – четная, а χ_{40} – нечетная функции u_1. Поэтому коэффициент α_{40} нормальной формы (4.16) равен нулю.

Структуру нормальной формы (4.16) и интеграла (4.18) можно несколько упростить, сделав унивалентную каноническую замену переменных по формулам

$$\theta_1 = \psi_1, \quad \theta_2 = \psi_1/2 + \psi_2, \quad \rho_1 = R_1 - R_2/2, \quad \rho_2 = R_2 \tag{4.19}$$

Учитывая, что $\alpha_{40} = 0$, в новых переменных имеем

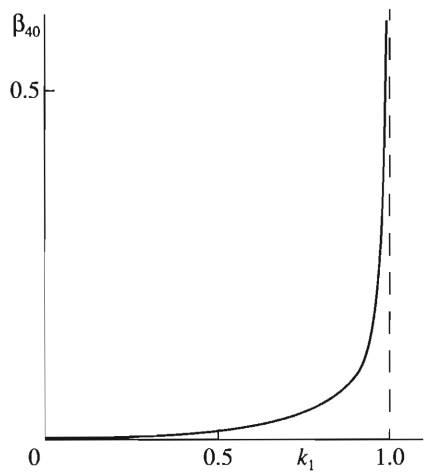
$$\Gamma = R_1 + a_{20}R_1^2 + a_{11}R_1R_2 + (a_{02} + \beta_{40}\cos 4\psi_2)R_2^2 + O_3 \tag{4.20}$$

$$a_{20} = c_{20}, \quad a_{11} = c_{11} - c_{20}, \quad a_{02} = c_{02} - c_{11}/2 + c_{20}/4$$
$$G = R_2\cos 2\psi_2 + O_2 = \text{const} \tag{4.21}$$

Свойства коэффициентов нормальной формы (4.20), вытекающие из существования интеграла (4.21). Известны [13] достаточные условия устойчивости и неустойчивости системы с функцией Гамильтона вида (4.21): если выполняется неравенство $|a_{02}| > |\beta_{40}|$, то система устойчива, а если $|a_{02}| < |\beta_{40}|$, то неустойчива. Коэффициенты нормальной формы вычисляются по формулам (4.17). Но в изучаемой конкретной задаче об устойчивости плоских колебаний твердого тела уравнения возмущенного движения имеют интеграл (4.21). Поэтому заранее, не прибегая к вычислениям по этим формулам, можно показать, что коэффициенты нормальной формы (4.20) не вполне произвольны, а должны удовлетворять некоторым соотношениям.

Действительно, условие того, что (4.21) – интеграл, можно записать в виде равенства нулю скобки Пуассона функций G и Γ

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial G}{\partial\psi_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial R_i} - \frac{\partial G}{\partial R_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial\psi_i}\right) = 0$$



Из соотношений (4.20) и (4.21) следует, что это условие может быть записано в виде равенства

$$\sin 2\psi_2 R_2[a_{11}R_1 + 2(a_{02} - \beta_{40})R_2] + O_3 = 0$$

которое должно выполняться при любых значениях ψ_1, ψ_2 и произвольных достаточно малых R_1, R_2. Это возможно только тогда, когда выполняются соотношения

$$a_{11} = 0, \quad a_{02} = \beta_{40}$$

Следовательно, нормализованный гамильтониан (4.20) имеет такую структуру:

$$\Gamma = R_1 + a_{20}R_1^2 + \beta_{40}(1 + \cos 4\psi_2)R_2^2 + O_3 \tag{4.22}$$

Компьютерные вычисления по формулам (4.17) показали, что коэффициент β_{40} нормальной формы (4.22) – положительная функция от k_1 (т.е. от амплитуды колебаний твердого тела в невозмущенном движении). При $k_1 \to 0$ функция β_{40} стремится к нулю, а при $k_1 \to 1$ неограниченно возрастает. График функции $\beta_{40} = \beta_{40}(k_1)$ показан на фигуре.

Доказательство орбитальной неустойчивости плоских колебаний. Для функции Гамильтона (4.22) сформулированные выше достаточные условия устойчивости и неустойчивости не выполняются. И, следовательно, при любой амплитуде колебаний тела в невозмущенном движении реализуется критический случай резонанса четвертого порядка [14, 15]. В этом случае приближенная система, функция Гамильтона которой получается из функции (4.22) отбрасыванием членов O_3, неустойчива. Вообще говоря, члены O_3 можно было бы подобрать так, чтобы полная система осталась неустойчивой или, наоборот, превратилась в устойчивую [14, 15]. Но, как видно из дальнейшего, последнее в рассматриваемой конкретной задаче невозможно, и это обусловлено существованием у уравнений возмущенного движения интеграла вида (4.21).

Для доказательства орбитальной неустойчивости исследуемого движения твердого тела достаточно показать его неустойчивость на нулевом изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$.

За независимую переменную примем координату ψ_1. Из уравнений движения, соответствующих функции Гамильтона (4.22), следует, что в достаточно малой окрестности невозмущенной траектории переменная ψ_1 будет монотонно возрастающей функцией времени, и, следовательно, в задаче об устойчивости она может играть ту же роль, что и время.

Из уравнения $\Gamma = 0$ при малых R_1 и R_2 находим

$$R_1 = -S = -\beta_{40}(1+\cos 4\psi_2)R_2^2 + \tilde{S}(R_2, \psi_2, \psi_1), \quad \tilde{S} = O(R_2^3) \tag{4.23}$$

На изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$ возмущенное движение описывается уравнениями Уиттекера [16], которые имеют гамильтонову форму

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_2}{d\psi_1} &= \frac{\partial S}{\partial R_2} = 2\beta_{40}(1+\cos 4\psi_2)R_2 + O(R_2^2), \\ \frac{dR_2}{d\psi_1} &= -\frac{\partial S}{\partial \psi_2} = 4\beta_{40}\sin 4\psi_2 R_2^2 + O(R_2^3) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Эти уравнения имеют интеграл

$$G(R_2, \psi_2, \psi_1) = R_2\cos 2\psi_2 + \tilde{G}(R_2, \psi_2, \psi_1) = \text{const}, \quad \tilde{G} = O(R_2^2) \tag{4.25}$$

который получается из интеграла (4.21), если в нем величину R_1 заменить на ее значение, определяемое соотношениями (4.23).

Для доказательства неустойчивости воспользуемся теоремой Четаева [10]. Функцию Четаева возьмем в виде

$$V = R_2^2\sin 4\psi_2 \tag{4.26}$$

За область $V > 0$ примем область $0 < \psi_2 < \pi/4$.

Для производной функции (4.26) в силу уравнений движения (4.24) получаем такое выражение:

$$\frac{dV}{d\psi_1} = 8\beta_{40}(1+\cos 4\psi_2)R_2^3 + O(R_2^4) \tag{4.27}$$

Для траекторий $\psi_2 = \psi_2(\psi_1)$, $R_2 = R_2(\psi_1)$ системы (4.24), начинающихся в области $V > 0$ при достаточно малых значениях $R_2(0)$, величина $G_0 = G(R_2(0), \psi_2(0), 0)$ постоянной интеграла (4.25) отлична от нуля. Из соотношения $G = G_0$ следует, что $R_2\cos 2\psi_2 = G_0 + O(R_2^2)$. Учтя это равенство, выражение (4.27) для производной $dV/d\psi_1$ можно представить в виде

$$\frac{dV}{d\psi_1} = 16\beta_{40}R_2[G_0^2 + G_0 O(R_2^2) + O(R_2^3)]$$

При достаточно малых R_2 производная $dV/d\psi_1$ положительна. Следовательно, согласно теореме Четаева, имеет место неустойчивость.

5. О маятникообразных вращениях тела. В случае вращений функция Гамильтона возмущенного движения, как и в случае колебаний, может быть представлена рядом вида (4.1), где теперь в качестве независимой переменной принимается величина $\omega_2\tau$, а функция $h_2(q_2, p_2, w)$ задается равенствами

$$h_2 = \frac{k_2K(k_2)}{8\pi}[p_2^2 + 4\nu_{02}q_2^2], \quad \nu_{02} = k_2^{-2}(3\,\mathrm{dn}^2 u + k_2^2 - 2) \tag{5.1}$$

Величина u определяется последним из соотношений (3.4), k_2 соответствует невозмущенному движению. Члены разложения (4.1), имеющие степень выше третьей относительно q_2, p_2, $|r_1|^{1/2}$, не выписываем, так как их явное выражение в дальнейшем не потребуется. Функция (4.1) 2π – периодична относительно w.

Интеграл (2.2) запишется в виде ряда (4.3), причем

$$g_2 = 8k_2^{-3}\mathrm{dn}u(1-k_2^2\mathrm{cn}^2u)q_2^2 + 8\mathrm{sn}u\mathrm{cn}uq_2p_2 + 2k_2^{-1}\mathrm{dn}up_2^2 \tag{5.2}$$

Для элементов $x_{ij}(w)$ матрицы фундаментальных решений $\mathbf{X}(w)$ системы (4.5) можно получить следующие явные выражения:

$$x_{11} = \mathrm{cn}\nu\mathrm{dn}\nu g(\nu), \quad x_{21} = 2k_2^{-1}\mathrm{sn}\nu[4k_2^2\mathrm{sn}^2\nu - (1+k_2^2)(1+k_2^2\mathrm{sn}^4\nu)]g^3(\nu)$$

$$x_{12} = k_2/2\ \mathrm{sn}\nu g(\nu), \quad x_{22} = \mathrm{cn}\nu\mathrm{dn}\nu(1+k_2^2\mathrm{sn}^4\nu)g^3(\nu) \tag{5.3}$$

$$g(\nu) = (1-k_2^2\mathrm{sn}^4\nu)^{-1/2}, \quad \nu = K(k_2)w/(2\pi)$$

В выражениях (5.3) модуль эллиптических функций равен k_2.

Матрица $\mathbf{X}(2\pi)$ будет такой:

$$\mathbf{X}(2\pi) = \left\|\begin{matrix} 0 & b^{-2} \\ -b^2 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad b = \left[\frac{4(1-k_2^2)}{k_2^2}\right]^{1/4} \tag{5.4}$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид (4.10). Поэтому, как и в случае колебаний, имеем $\mu_1 = i$, $\mu_2 = -i$, и, следовательно, маятникообразные вращения тела орбитально устойчивы в линейном приближении.

Мнимая часть характеристических показателей $\pm i\lambda$ удовлетворяет уравнению $\cos 2\pi\lambda = 0$. Отсюда величина λ определяется неоднозначно. Можно лишь утверждать, что она не зависит от угловой скорости вращения тела в невозмущенном движении и отличается от целого числа на величину, равную 1/4. Неоднозначность устраняется рассмотрением бесконечно больших угловых скоростей ($k_2 \to 0$). Если в гамильтониане (5.1) сделать каноническую замену переменных $q_2 = k_2\tilde{q}_2$, $p_2 = 2\tilde{p}_2$, то в пределе ($k_2 = 0$) получим гамильтониан $(\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2)/8$ линейного осциллятора с частотой, равной 1/4. Следовательно, $\lambda = 1/4$. Таким образом, в случае вращений, как и в рассмотренном выше случае колебаний, всегда имеет место резонанс четвертого порядка.

Однако в отличие от случая колебаний маятникообразные вращения твердого тела в случае Горячева – Чаплыгина орбитально устойчивы. Чтобы доказать это, воспользуемся теоремой Румянцева об устойчивости по отношению к части переменных [17]. Функцию V получим как квадратичную связку интеграла $H = \mathrm{const}$ и дополнительного интеграла (4.3).

Предварительно удобно сделать 2π – периодическую по u_1 каноническую замену переменных w, r_1, q_2, $p_2 \to u_1$, v_1, u_2, v_2, нормализующую гамильтониан линейной системы уравнений возмущенного движения. Эта замена задается равенствами, аналогичными равенствам (4.11). Надо только коэффициент 1/4 в равенстве для r_1 заменить на коэффициент 1/8, а коэффициенты n_{ij} должны теперь вычисляться по следующим формулам:

$$n_{j1} = \frac{1}{b}x_{j1}\cos\frac{u_1}{4} + bx_{j2}\sin\frac{u_1}{4}, \quad n_{j2} = -\frac{1}{b}x_{j1}\sin\frac{u_1}{4} + bx_{j2}\cos\frac{u_1}{4}, \quad j = 1, 2$$

Функции $x_{ij}(u_1)$ задаются равенствами (5.3).

В новых переменных гамильтониан возмущенного движения приобретает такую форму:

$$F = v_1 + \frac{1}{8}(u_2^2 + v_2^2) + \ldots \tag{5.5}$$

а интеграл (4.3) с точностью до постоянного множителя $4\sqrt{1 - k_2^2}/k_2^2$ записывается в виде

$$G = u_2^2 + v_2^2 + \ldots = \text{const} \tag{5.6}$$

В равенствах (5.5) и (5.6) многоточиями обозначаются члены рядов, степень которых относительно u_2, v_2, $|v_1|^{1/2}$ выше третьей.

Пусть

$$V = F^2 + G^2 \tag{5.7}$$

Функция $V \geq 0$, причем $V = 0$ только для таких значений переменных v_1, u_2, v_2, которые удовлетворяют системе двух уравнений

$$F = 0, \quad G = 0 \tag{5.8}$$

Из первого уравнения можно выразить величину v_1 через u_2, v_2, u_1. Получим

$$v_1 = -\frac{1}{8}(u_2^2 + v_2^2) + \tilde{R}_1(u_2, v_2, u_1), \quad \tilde{R}_1 = O((u_2^2 + v_2^2)^2) \tag{5.9}$$

При учете этого равенства второе уравнение системы (5.8) запишем в виде

$$u_2^2 + v_2^2 + \tilde{G}(u_2, v_2, u_1) = 0, \quad \tilde{G} = O((u_2^2 + v_2^2)^2)$$

Для достаточно малых u_2, v_2 это уравнение удовлетворяется только при $u_2 = v_2 = 0$. Из равенства (5.9) тогда следует, что $v_1 = 0$. Таким образом, функция V является определенно-положительной относительно переменных v_1, u_2, v_2 и, согласно теореме Румянцева, невозмущенное движение устойчиво относительно этих переменных. А это и означает, что маятникообразные вращения твердого тела в случае Горячева – Чаплыгина орбитально устойчивы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00831) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (1477. 2003. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горячев Д.Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Мат. сб. 1900. Т.21. Вып. 3. С. 431–438.
2. *Чаплыгин С.А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке // Тр. Отд. физ. наук об-ва любителей естествознания. 1901. Т. 10. Вып. 2. С. 32–34.
3. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
4. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. 256 с.
5. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера – Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 167 с.

6. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 384 с.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 591 с.
8. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
9. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
10. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
11. *Маркеев А.П.* Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 929–938.
12. *Giacaglia G. E. O.* Perturbation Methods in Non – Linear Systems. Berlin etc.: Springer, 1972 = *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
13. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
14. *Маркеев А.П.* О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 369–376.
15. *Маркеев А.П.* К задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 653–660.
16. *Whittaker E. T.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge: Univ. Press, 1927 = *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
17. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. мат., механ., астрон. физ., хим. 1957. № 4. С. 9–16.

Москва
e-mail: markeev ipmnet.ru

Поступила в редакцию
7.IV.2003