

УДК 531.36:534.1

© 2004 г. Л. Д. Акуленко, Л. И. Коровина, С. А. Кумакшев, С. В. Нестеров

**АВТОКОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ РЕЛЕЯ И ВАН ДЕР ПОЛЯ ПРИ УМЕРЕННО БОЛЬШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ**

Построены и исследованы периодические движения существенно нелинейных автоколебательных систем, описываемых уравнениями Релея и Ван дер Поля. На основе метода Ляпунова – Пуанкаре с помощью разработанного алгоритма ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру вычислены период и начальная величина скорости системы, определяющие автоколебания осцилляторов для малых и умеренно больших значений коэффициентов обратной связи. С гарантированной относительной и абсолютной погрешностью также построены траектории и предельные циклы. Установлены качественные особенности автоколебаний, вызванные увеличением коэффициентов самовозбуждения; дано сопоставление осцилляторов. Приведено сравнение результатов численного исследования периодических решений уравнения Ван дер Поля с известными решениями.

Имеется обширная литература, посвященная качественным, аналитическим и численным методам исследования автоколебаний для систем с одной степенью свободы (см., например, монографии [1–7] и библиографию к ним). Разработанные качественные и топологические подходы к исследованию динамических систем на фазовой плоскости, описываемых уравнениями типа Льенара, дают критерии (достаточные условия) существования и устойчивости предельных циклов (автоколебаний). Положение и форма предельного цикла могут быть приближенно определены на фазовой плоскости с помощью метода изоклин [2–7] и привлечения численных методов. Такой подход в настоящее время не представляется эффективным для высокоточных массовых оперативных расчетов при параметрическом синтезе автоколебательных систем.

При малых значениях коэффициентов обратной связи (коэффициентов самовозбуждения), т.е. для квазилинейных автоколебательных систем, широко применяются приближенные аналитические методы нелинейной механики Ляпунова – Пуанкаре, Крылова – Боголюбова и др. [2, 5–10]. Если этот коэффициент асимптотически велик, то имеет место сингулярно возмущенная автоколебательная система, совершающая релаксационные колебания [1]. Предельный цикл тогда строится приближенно с помощью метода “припасовывания” А.А. Дородницына [11, 5] и методов релаксационных колебаний [7, 12, 13].

Промежуточная область изменения коэффициентов самовозбуждения представляет значительный интерес в теоретическом, методическом, вычислительном и особенно прикладном аспектах. Имеется весьма ограниченное количество работ, результаты которых относятся к построению периодических режимов (предельных циклов) для автоколебательных систем при умеренно больших значениях безразмерных коэффициентов обратной связи. Отметим численные результаты [14, 15], полученные для уравнения Ван дер Поля без обоснования соответствующих оценок точности расчетов. Искользованные подходы весьма громоздки и не допускают обобщения на автоколебательные системы большей размерности.

Разработанный авторами [16] эффективный численно-аналитический метод ускоренной сходимости в сочетании с процедурой продолжения по параметру (коэффициенту самовозбуждения) позволяет с помощью метода Ляпунова – Пуанкаре [10] строить искомые решения для широкого класса автоколебательных систем. В частности, исследован случай уравнения типа Ван дер Поля с нелинейной возвращающей силой, пропорциональной третьей и пятой степени отклонения. Установлены зависимости периодов и амплитуд автоколебаний от коэффициента обратной связи [16]. Ниже с помощью указанного подхода проводится практически точное (с относительной погрешностью  $10^{-6}$ – $10^{-8}$ ) решение задач об автоколебаниях осцилля-

торов Релея и Ван дер Поля и дается сопоставление их основных характеристик: периодов, амплитуд, фазовых траекторий, предельных циклов.

**1. Приведение уравнений к стандартной форме.** Рассмотрим уравнение типа Лье-нара, содержащее степенные функции обобщенной координаты  $x$  и скорости  $\dot{x}$  вида

$$m\ddot{x} + g(x, \dot{x})\dot{x} + f(x) = 0$$

$$g = -k|x|^\beta|\dot{x}|^{\gamma-1} + l|x|^\delta|\dot{x}|^{\sigma-1}, \quad f = c|x|^{\alpha-1}x \quad (1.1)$$

$$m, c, k, l > 0; \quad \infty > \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \geq 0; \quad \delta + \sigma > \beta + \gamma$$

Постоянная  $m$  имеет смысл инерционной характеристики, а  $c$  – коэффициента упругости (нелинейной при  $\alpha \neq 1$ ) возвращающей силы  $f$ . Если  $0 < \alpha \ll 1$ , то функция  $f$  близка к релейной при  $|x| \sim 1$ ; при  $\alpha = 0$  имеем  $f = c \operatorname{sign} x$ ,  $x \neq 0$ .

Из качественной теории динамических систем [2–5] следует, что при определенных достаточных условиях стационарная точка  $x = \dot{x} = 0$  неустойчива. Уравнение (1.1) допускает периодическое решение, которому соответствует устойчивый предельный цикл. Поскольку структура уравнения (1.1) не изменяется при замене  $x \rightarrow -x$ ,  $\dot{x} \rightarrow -\dot{x}$ , то предельный цикл есть центрально симметричная замкнутая кривая, причем  $x(t+T) \equiv -x(t)$ , где  $2T$  – период автоколебаний. Поэтому достаточно найти искомого функции на любом полупериоде. Для конкретных значений параметров системы искомое решение и его характеристики (период, амплитуда и т.п.) могут быть построены численно, см. ниже.

Уравнение (1.1) содержит четыре размерных параметра  $m, c, k, l$ . Линейными преобразованиями переменной  $x$  и аргумента  $t$  вводятся безразмерные величины

$$x^* = d^{-1}x, \quad d = (k/l)^{(1-\kappa)/\xi} (c/m)^{-\eta/(\lambda\xi)}$$

$$t^* = vt, \quad v = (k/l)^{(\alpha-1)/(\lambda\xi)} (c/m)^{1/\lambda} \quad (1.2)$$

$$\xi = \delta + \sigma - \beta - \gamma > 0, \quad \eta = \sigma - \gamma, \quad \lambda = 2 + (\alpha - 1)\eta/\xi > 0$$

$$\kappa = (\alpha - 1)\eta/(\lambda\xi) = (\alpha - 1)\eta/[2\xi + (\alpha - 1)\eta] \neq 1$$

Далее уравнение (1.1) переписывается в безразмерных переменных  $x^*, t^*$  (1.2) (для сокращения записи звездочка в верхнем индексе опускается). Оно содержит один безразмерный параметр  $\varepsilon > 0$  – коэффициент обратной связи или самовозбуждения автоколебаний

$$\ddot{x} + \varepsilon(-|x|^\beta|\dot{x}|^{\gamma-1} + |x|^\delta|\dot{x}|^{\sigma-1})\dot{x} + |x|^{\alpha-1}x = 0$$

$$\varepsilon = \frac{k}{m}d^{\beta+\gamma-1}v^{\gamma-2} = \frac{l}{m}d^{\delta+\sigma-1}v^{\sigma-2} \equiv m^M c^C l^L k^K$$

$$M = -1 - C, \quad C = \frac{1}{\lambda\xi}(\gamma\delta - \sigma\beta + 2\beta + \gamma - 2\delta + \sigma) \quad (1.3)$$

$$L = \frac{1}{\lambda\xi}(\lambda(\kappa - 1)(\beta + \gamma - 1) + (1 - \alpha)(\gamma - 2))$$

$$K = \frac{1}{\lambda\xi}(-\lambda(\kappa - 1)(\delta + \sigma - 1) + (1 - \alpha)(\sigma - 2))$$

Параметр  $\varepsilon$  в (1.3) выражается через исходные размерные величины  $m, c, l, k$  (1.1) и является громоздкой степенной функцией с весьма сложными выражениями для показателей степеней  $M, C, L, K$  через исходные показатели  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma$ . При сделанных предположениях численные значения  $M, C, L, K$  ограничены, так как  $\lambda\xi > 0$  согласно соотношениям (1.2). В частности, для уравнения типа Ван дер Поля с линей-

ной и нелинейной функцией  $f(x)$  (1.1) возвращающей силы согласно заменам (1.2) получается представление [16]

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + |x|^{\alpha-1}x &= 0, \quad \alpha \geq 0 \\ \beta = 0, \quad \gamma = \sigma = 1, \quad \delta = 2; \quad d &= (k/l)^{1/2}, \quad v = (c/m)^{1/2}(k/l)^{\chi} \\ \chi &= (1 - \alpha)/4, \quad \varepsilon = k(cm)^{-1/2}(k/l)^{-\chi} \end{aligned} \quad (1.4)$$

При  $\alpha = 1$ , т.е. в случае классического уравнения Ван дер Поля, имеем  $\chi = 0$ ,  $\varepsilon = k/\sqrt{cm}$ ; коэффициент самовозбуждения не зависит от параметра  $l$ . Для значений  $\alpha = 3, 5$  автоколебания, описываемые уравнением (1.4), подробно изучены [16].

В прикладных задачах уравнения типа Ван дер Поля обычно получаются с помощью искусственных приемов из исходных, имеющих форму уравнений Релея и описывающих различные физические процессы автоколебательного характера [1, 5–8, 10]. Для уравнения типа Релея аналогично (1.4) получим представление

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \varepsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + |x|^{\alpha-1}x &= 0, \quad \alpha \geq 0 \\ \beta = \delta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \sigma = 3; \quad d &= (km/cl)^{\rho}, \quad v = (m/c)^{-\rho}(k/l)^{1/2(\alpha-1)} \\ \rho &= 1/(\alpha + 1), \quad \varepsilon = (d/m)\sqrt{kl} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Сходным образом для классического уравнения Релея (при  $\alpha = 1$ ) получаются выражения для нормирующих коэффициентов:  $v = (c/m)^{1/2}$ ,  $d = (km/cl)^{1/2}$ ; коэффициент самовозбуждения автоколебаний  $\varepsilon = (k/mc)^{1/2}$  также не зависит от параметра  $l$ . Отметим, что все основные характеристики автоколебаний (кроме периода) будут зависеть от  $l$  в случае классических уравнений Релея и Ван дер Поля.

**2. Автоколебания осциллятора Релея при умеренно больших коэффициентах самовозбуждения.** Рассматривается задача высокоточного построения предельных циклов и траекторий для уравнений Релея при умеренно больших значениях параметра задачи

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \varepsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x &= 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^* \quad (\varepsilon \sim 10) \\ x(0) = x(2T), \quad \dot{x}(0) &= \dot{x}(2T) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Полупериод  $T$  неизвестен и подлежит определению совместно с другими характеристиками автоколебаний. Построение единственного устойчивого периодического решения проводится на основе метода Ляпунова – Пуанкаре [10] аналогично описанному ранее подходу [16]. Производится замена аргумента  $t$  на  $\tau$  с целью явного выделения зависимости от неизвестной  $T$ . В силу центральной симметрии, как отмечалось в разд. 1, достаточно ограничиться рассмотрением задачи на полупериоде  $\Delta t = \Theta$ , где  $\Theta > 0$  – любое фиксированное число; удобно положить  $\Theta = 1$ . В результате имеет место краевая задача

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \varepsilon T(1 - T^{-2}\dot{x}^2)\dot{x} + T^2x &= 0, \quad x = x(\tau, \varepsilon) \\ x(0, \varepsilon) = 0, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) &= b, \quad x(1, \varepsilon) = 0, \quad \dot{x}(1, \varepsilon) = -b \\ T &= T(\varepsilon), \quad b = b(\varepsilon), \quad 0 \leq \tau \leq 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее точками сверху вновь обозначены производные по аргументу  $\tau$ . Задача содержит четыре неизвестных параметра (две постоянные интегрирования и параметры  $T, b$ ), которые находятся из четырех краевых условий. Ее решение позво-

ляет найти “правую половину” предельного цикла. “Левая половина” является центрально симметричной; она получается при замене  $\tau = 0$  на  $\tau = 2$  или  $\tau = -1$ .

Аналогично ставится краевая задача при построении решения, отвечающего “верхней” (или “нижней”) половине цикла [16],

$$\begin{aligned} x(0, \varepsilon) = -a, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) = 0; \quad x(1, \varepsilon) = a, \quad \dot{x}(1, \varepsilon) = 0 \\ (x = -a, \dot{x} = 0, \tau = 2, -1), \quad a = a(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Неизвестная  $a$  в задаче (2.3) имеет механический смысл амплитуды автоколебаний. Ее определение (наряду с  $b, T$ ) и исследование как функции параметра  $\varepsilon$  представляют существенный интерес при исследовании автоколебаний осциллятора Релея.

Изложим весьма кратко процедуру численно-аналитического решения задачи (2.2). Представим уравнение в стандартной форме Коши введением переменной скорости  $y = \dot{x}$ . Кроме того, введем функции чувствительности  $(p, w), (q, z)$  – производные решения  $(x, y)$  по параметрам  $T, b$ ; получим соотношения (зависимость неизвестных функций и параметров от  $\varepsilon$  для сокращения записи не указывается)

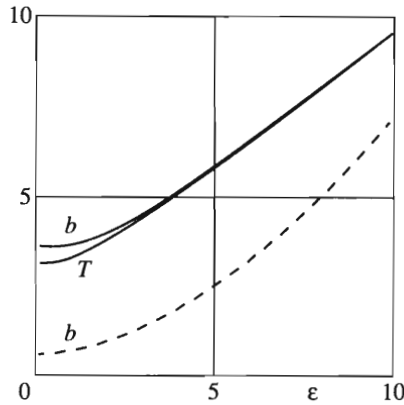
$$\begin{aligned} \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -T^2 x + \varepsilon T(1 - T^{-2} y^2) y; \quad x(0) = x(1) = 0, \quad y(0) = b, \quad y(1) = -b \\ \dot{p} = q, \quad \dot{q} = -T^2 p + \varepsilon T(1 - 3T^{-2} y^2) q, \quad p = \partial x / \partial b; \quad p(0) = 0, \quad q(0) = 1 \\ \dot{w} = z, \quad \dot{z} = -T^2 w - 2Tx + \varepsilon T(1 - 3T^{-2} y^2) z + (1 + T^{-2} y^2) y \\ w = \partial x / \partial T, \quad z = \partial y / \partial T; \quad w(0) = z(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Краевая задача для  $x, y$  формально не зависит от неизвестных  $p, q, w, z$ . После определения  $x(\tau), y(\tau), T$  эти функции находятся интегрированием двух независимых линейных задач Коши второго порядка, см. (2.4).

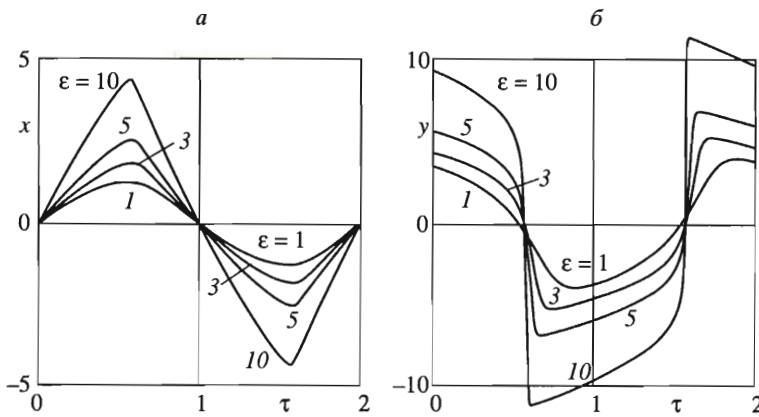
Однако введенные функции чувствительности  $(p, w), (q, z)$ , т.е. их значения при  $t = 1$ , позволяют уточнять недостающие значения параметров  $T, b$  (согласно краевым условиям (2.3)) в итерационной процедуре ускоренной сходимости типа Ньютона на основе некоторых оценок  $T_0(\varepsilon), b_0(\varepsilon)$ . При достаточно малом  $\varepsilon > 0$  можно взять значения, отвечающие нулевому приближению в методе возмущений [10]:  $T_0(0) = \pi, b(0) = 2\pi/\sqrt{3}, a(0) = 2/\sqrt{3}$ . Последовательным увеличением параметра  $\varepsilon$  в сочетании с экстраполяцией величин  $T(\varepsilon), b(\varepsilon), a(\varepsilon)$  посредством быстросходящегося метода ускоренной сходимости [16, 17] на основе высокоточного интегрирования задач Коши (2.4) могут быть построены периодические функции  $x(t, \varepsilon), \dot{x}(t, \varepsilon)$  и искомые величины  $T(\varepsilon), b(\varepsilon), a(\varepsilon)$  с требуемой относительной и абсолютной точностью для умеренно больших значений  $\varepsilon: 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \sim 10 \dots 10^2$ .

Основные результаты проведенных вычислений заключаются в нахождении искомых величин  $T(\varepsilon), b(\varepsilon)$  для  $0 \leq \varepsilon \leq 10$ ; они представлены ниже

$\varepsilon$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8
$T$	3.14356	3.14946	3.15990	3.17287	3.19033	3.21156	3.26414
$b$	3.62775	3.62926	3.63169	3.63519	3.63996	3.64630	3.66447
$\varepsilon$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
$T$	3.33164	3.41061	3.50007	3.59827	3.70368	3.81493	3.93099
$b$	3.69180	3.72997	3.78028	3.84297	3.91732	4.00233	4.09645
$\varepsilon$	2.4	2.6	2.8	3.0	3.5	4.0	4.5
$T$	4.05104	4.17446	4.30075	4.42955	4.76056	5.10177	5.45085
$b$	4.19833	4.30664	4.42027	4.53834	4.84895	5.17574	5.51419
$\varepsilon$	5.0	5.5	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
$T$	5.80616	6.16643	6.53093	7.26988	8.01912	8.77614	9.53918
$b$	5.86138	6.21529	6.57471	7.30600	8.04979	8.80277	9.56383



Фиг. 1

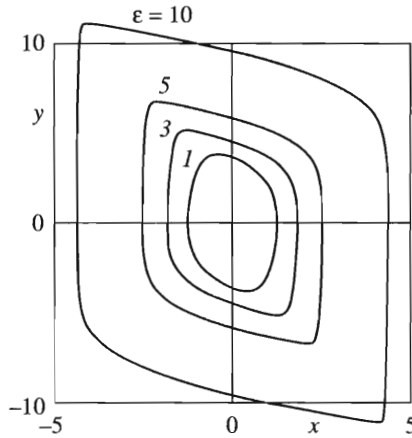


Фиг. 2

На их основе остальные характеристики колебаний определяются интегрированием задачи Коши. Данные свидетельствуют, что при возрастании  $\epsilon$  период и начальное значение скорости в нормированном времени  $\tau$ , отвечающие предельному циклу, монотонно возрастают с производной по  $\epsilon$  (при  $\epsilon \geq 2$ ) порядка единицы. Кроме того, можно установить, что отношение  $b/T \approx 1$  при  $\epsilon \gg 1$ , т.е.  $y/T \approx 1$  для  $t = 0, \epsilon \gg 1$ . Сравнение численных результатов с аналитическими расчетами по теории возмущений (методы Ляпунова – Пуанкаре, Крылова – Боголюбова) показывает, что решение в первом приближении по  $\epsilon$  достаточно хорошо аппроксимирует численное при  $\epsilon \sim 0.1$ .

На фиг. 1 сплошными кривыми представлены полупериод колебаний  $T$  и указанное значение скорости  $b$  как функции коэффициента самовозбуждения  $\epsilon, 0 \leq \epsilon \leq 10$ . Изложенный алгоритм позволяет проводить точные расчеты для существенно больших  $\epsilon \sim 10^2 \dots 10^3$ .

Графики функций  $x(\tau), y(\tau)$  на интервале, равном полному периоду  $0 \leq \tau \leq 2$  ( $0 \leq t \leq 2T$  в исходном времени), для характерных значений  $\epsilon$  изображены на фиг. 2. Как отмечалось, эти функции удовлетворяют условию  $x(\tau - 1) \equiv -x(\tau), y(\tau - 1) \equiv -y(\tau)$ ; поэтому можно ограничиться интервалом  $0 \leq \tau \leq 1$ , т.е.  $0 \leq t \leq T$ . При  $\epsilon \leq 1$  колебания  $x(\tau)$



Фиг. 3

“близки” к гармоническим, см. кривую для  $\epsilon = 1$  на фиг. 2, а. Для  $\epsilon > 1$  наблюдаются значительные отклонения, особенно скорость  $y(\tau)$ , см. фиг. 2, б, отличается от косинусоиды. Начиная с  $\epsilon = 2$  наблюдается релаксационный (по переменной  $y(\tau)$ ) характер колебаний, который при  $\epsilon \geq 5$  становится резко выраженным, см. фиг. 2, б.

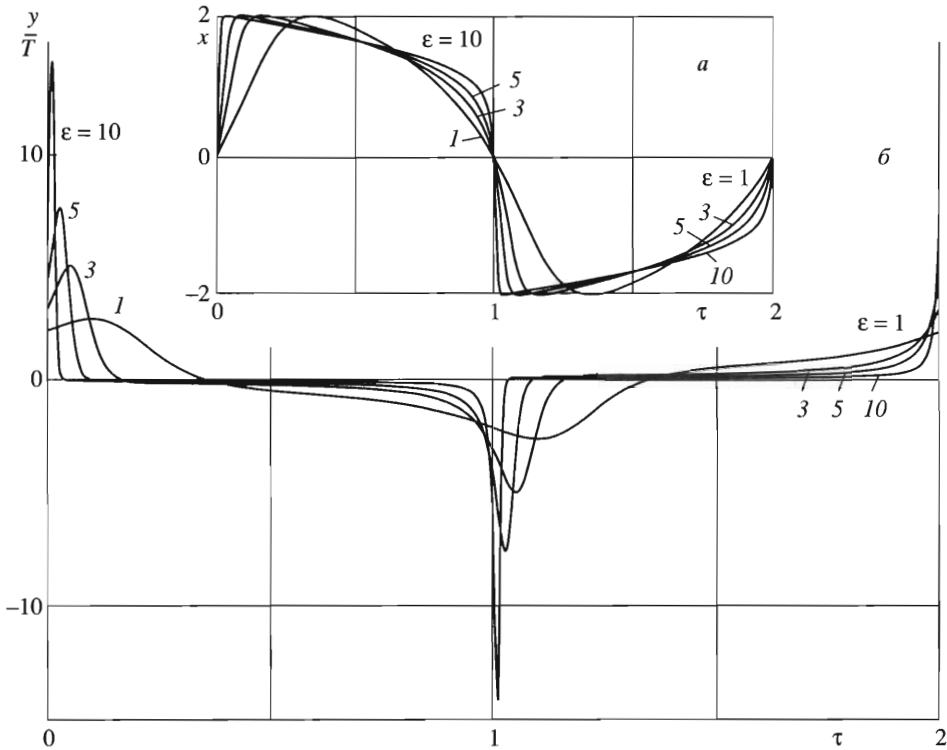
Отмеченные свойства автоколебаний довольно наглядно проявляются на графиках фиг. 3, изображающих предельные циклы на фазовой плоскости  $(x, y)$  для разных значений  $\epsilon$ . В качестве “естественного” аргумента взят параметр  $\tau = t/T, 0 \leq \tau \leq 2$ , связанный с “собственным” периодом колебаний. При  $\epsilon \leq 1$  предельные циклы “близки” к эллипсу с полуосями  $(b/T, b), b = 2\pi/\sqrt{3}$ . С увеличением  $\epsilon (\epsilon \geq 5)$  во втором и четвертом квадрантах наблюдаются резкие (типа угловых точек) повороты касательных к кривым (большая локальная кривизна), связанные с практически релейным изменением переменной  $y(\tau)$  (см. фиг. 2, б).

Заметим, что детальные численно-аналитических исследований автоколебаний осциллятора Релея для умеренно больших коэффициентов самовозбуждения в известной научной литературе нет, имеются спорадические численные результаты ([18] и др.) Уравнение Релея лежит в основе описания многих физических процессов, в то время как уравнение Ван дер Поля, которому посвящено существенно больше работ (см. список литературы), является следствием, полученным при довольно обременительных дополнительных условиях.

**3. Автоколебания осциллятора Ван дер Поля при умеренно больших коэффициентах самовозбуждения.** Аналогично исследованиям, представленным в разд. 2, проводятся построения характеристик автоколебаний для классического уравнения Ван дер Поля при умеренно больших значениях  $\epsilon$

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x &= 0, \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon^* \quad (\epsilon \sim 10) \\ x(0) &= x(2T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(2T) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Это уравнение получается дифференцированием по  $t$  уравнения (2.1) и переобозначениями  $\sqrt{3}\dot{x} \rightarrow x, \sqrt{3}\ddot{x} \rightarrow \dot{x}$ . Таким образом, предельный цикл  $(x(t), \dot{x}(t))$  – траектория на фазовой плоскости – для уравнения (3.1) эквивалентен кривой  $\sqrt{3}(\dot{x}(t), \ddot{x}(t))$  в задаче (2.1). Это приводит к дополнительной существенной неустойчивости расчетов при больших  $\epsilon$ , в частности  $\epsilon \sim 10$  (начиная с  $\epsilon \approx 5$ ).



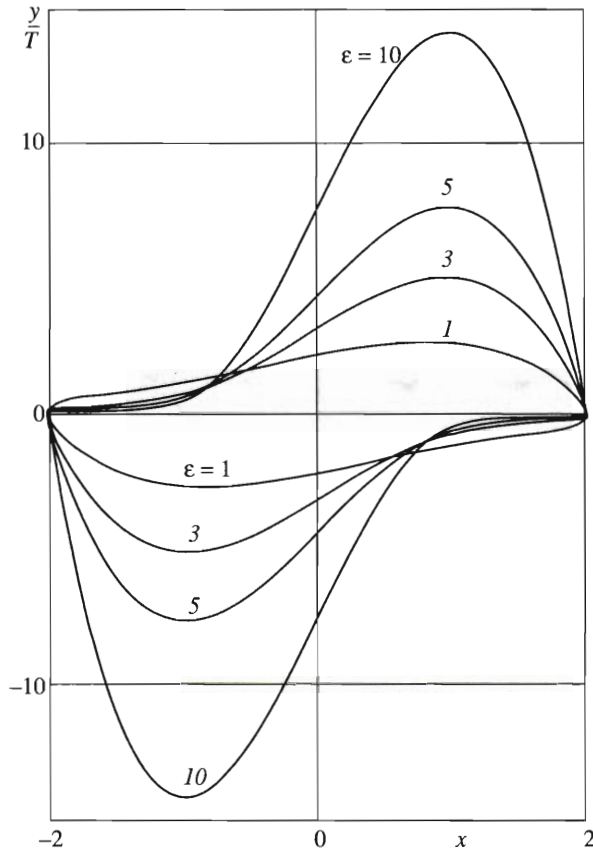
Фиг. 4

Единственное устойчивое периодическое решение строится на основе метода Ляпунова – Пуанкаре [10]. Затем применяются процедура продолжения по параметру  $\epsilon$  и метод ускоренной сходимости аналогично изложенному ранее подходу [16]. Краевая задача для переменных  $(x, y)$  и функций чувствительности  $(p, q), (w, z)$  по параметрам  $b, T$  типа (2.4) приводится в нормированном времени (с аргументом)  $\tau$  к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -T^2x + \epsilon T(1 - x^2)y, & x(0) &= x(1) = 0, & y(0) &= b, & y(1) &= -b \\
 \dot{p} &= q, & \dot{q} &= -T^2p + \epsilon T(1 - x^2)q - 2\epsilon Txy, & p(0) &= 0, & q(0) &= 1 \\
 \dot{w} &= z, & \dot{z} &= -T^2w + \epsilon(1 - x^2)(y + Tz) - 2\epsilon Txyw - 2Tx, & w(0) &= z(0) = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Алгоритм вычислений для решения задачи (3.2) аналогичен изложенному выше. Уточняющие добавки  $\delta T, \delta b$  находятся рекуррентно из системы типа (2.5), в которой коэффициенты и правые части получаются интегрированием системы (3.2) при заданных  $T, b$ , начиная с  $T_0 = T(0), b_0 = b(0)$ ; величины  $T(0), b(0)$  находятся методом малого параметра Ляпунова – Пуанкаре:  $T(0) = \pi, b(0) = 2\pi$ ; для амплитуды автоколебаний  $a(\epsilon)$  имеем  $a_0 = a(0) = 2$ . Очевидно, что полученные значения для  $b_0, a_0$  существенно больше, чем для осциллятора Релея, см. разд. 2. Полупериоды  $T(\epsilon)$  для обеих задач должны совпадать. Расчеты свидетельствуют, что определение функции  $T(\epsilon)$  согласно схеме (3.2), (2.5) требует большего числа итераций вследствие отмеченной выше неустойчивости для  $\epsilon \gg 1$ , начиная с  $\epsilon \sim 5$ .

Если воспользоваться приведенными в разд. 2 высокоточными значениями для  $T(\epsilon)$ , то вычисления коэффициента  $b(\epsilon)$  значительно упрощаются и требуют интегрирования системы (3.2) для  $(x, y), (p, q)$  при заданном  $T(\epsilon)$ .



Фиг. 5

Результаты расчетов  $b(\epsilon)$  по общей схеме представлены ниже

$\epsilon$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$b$	6.29386	6.32103	6.36886	6.43497	6.52101	6.62168	6.75056
$\epsilon$	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$b$	6.89422	7.05693	7.23847	8.41259	9.97483	11.86048	14.03403
$\epsilon$	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
$b$	19.19177	25.39582	32.64521	40.93048	50.49040	60.62275	72.03648

Они подтверждают сделанные выводы относительно точности вычислений. Функция  $b(\epsilon)$  в уменьшенном масштабе 1:10 представлена на фиг. 1 штриховой кривой. График функции  $T(\epsilon)$  практически совпадает с кривой, отвечающей автоколебаниям осциллятора Релея.

На фиг. 4 для характерных значений  $\epsilon$  представлены графики функций  $x(\tau)(a)$  и  $y(\tau) \dots (b)$ . Формы кривых  $x(\tau)$  на фиг. 4,  $a$  и  $y(\tau)$  на фиг. 2,  $b$  совпадают (кривые различаются постоянным сдвигом по  $\tau$  и масштабам). Существенные свойства автоколебаний иллюстрируются семейством предельных циклов (фиг. 5). Основное свойство состоит в том, что  $a(\epsilon) \approx 2$  ( $a(0) = 2$ ) при всех  $\epsilon > 0$  [11–16].

Основные результаты численного исследования автоколебаний осциллятора Ван дер Поля для умеренно больших значений  $\epsilon \sim 10, 20$  содержатся в довольно давних работах ([14, 15] и др.). Сравнение с ними позволяет сделать следующие выводы.

1°. Изложенный выше метод и алгоритм расчета значительно эффективнее и проще.  
 2°. Для каждого значения  $\epsilon$  алгоритм позволяет осуществлять контроль точности. Имеются конструктивные способы значительного повышения точности. Это свойство практически отсутствует в [14, 15] и контроль точности затруднителен (надежны только два-три десятичных знака).

3°. Интересно отметить, что полученные выше значения находятся, как правило, между значениями, указанными Кругдалом [14] и Урабе [15].

Предложенные и реализованные алгоритмы метода ускоренной сходимости и продолжения по параметру – коэффициенту обратной связи – являются весьма эффективными для нахождения периодических решений и предельных циклов систем, описываемых уравнениями типа Релея и Ван дер Поля. Они основаны на использовании свойств симметрии. Проведенные численно-аналитические исследования позволили выявить ряд характерных особенностей перехода систем от режимов почти гармонические автоколебаний к сильно нелинейным (многочастотным) релаксационным автоколебаниям и провести сопоставление осцилляторов Релея и Ван дер Поля для малых и умеренно больших значений коэффициентов обратной связи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00252, 02-01-00157).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Харкевич А.А. Автоколебания. М.: Гостехиздат, 1953. 171 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
3. Lefschetz S. Differential Equations: Geometric Theory. N. Y.: Wiley, 1957 = Лefшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. *Vlaquière A.* Nonlinear System Analysis. N. Y.: Acad. Press. 1966 = Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
6. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
7. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.
8. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
9. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
10. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
11. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В., Шматков А.М. Обобщенные параметрические колебания механических систем // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 746–756.
12. Дородницын А.А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 3. С. 313–328.
13. Cartwright M.L. Van der Pol's equation for relaxation oscillations // *Contribut. Theory Nonlinear Oscillations. Ann. Math. Studies.* 1952. № 29. P. 3–18.
14. Krogdahl W.S. Numerical solutions of the Van der Pol equation // *Z. angew. Math. Phys.* 1960. V. 2. № 1. P. 59–63.
15. Urabe M. Numerical study of periodic solutions of Van der Pol's equation // *Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям.* Киев: Изд-во АН УССР, 1963. Т. 2. С. 367–376.
16. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Автоколебания существенно нелинейной системы // *Изв. РАН. МТГ.* 2002. № 3. С. 42–48.
17. Акуленко Л.Д., Кумакиев С.А., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 723–741.
18. Nayfeh A.H. Introduction to Perturbation Techniques. N. Y.: Wiley, 1981 = Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.