УДК 531.36:534.1

© 2004 г. **В. Н. Тхай**

ЦИКЛ В СИСТЕМЕ, БЛИЗКОЙ К РЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЕ

Исследуется автономная система, когда частоты линейной системы удовлетворяют соотношению, близкому, с расстройкой ε, к точному двухчастотному внутреннему резонансу. Установлен факт рождения в общей ситуации изолированного периодического решения. Цикл находится на расстоянии $O(\varepsilon)$ от нуля – для резонанса третьего порядка и на расстоянии $O(\sqrt{\varepsilon})$ от нуля – для резонансов второго и четвертого порядков. Рассмотрены как системы общего вида, так и системы Ляпунова. Изучен вопрос устойчивости циклов. Показано, что при действии на исследуемую систему малых периодических возмущений порядка μ, в μ^σ – окрестности нуля существуют периодические движения, причем $\varepsilon = O(\mu^k)$. При этом $\sigma = 1/2$, $\mu \geq 1/2$ для резонанса третьего порядка и $\sigma = 1/3$, $k \geq 2/3$ для резонансов второго и четвертого порядков.

1. Предварительные замечания. Проблема существования локальных периодических движений в окрестности нуля автономной системы получила достаточно полное разрешение в случаях систем Ляпунова [1] и обратимых систем [2, 3]. Общим для обоих случаев является наличие пары чисто мнимых корней, что приводит к существованию однопараметрического ляпуновского семейства, примыкающего к нулю. Такое же семейство обнаружено в обратимых резонансных системах [4], но в общей ситуации оно отсутствует, как следует из дальнейшего, в системах Ляпунова.

В системах общего вида из наличия пары чисто мнимых корней не выводится существование локальных периодических движений; эти движения есть только в сильно вырожденных случаях. В этом можно убедиться, проанализировав уже систему второго порядка.

В системе с двумя парами чисто мнимых корней линейная система допускает движение с двумя частотами. Поэтому только в ситуации, близкой к резонансной, нелинейные члены в системе приводят к периодическим колебаниям в окрестности нуля. Более того, можно ожидать, что рождается цикл.

В рамках теории периодических движений систем с малым параметром выводы для систем Ляпунова [1] и обратимых систем [2, 3] относятся к грубым случаям [5], когда задачу решает нулевое по малому параметру приближение, а возмущение принадлежит тому же классу, что и нулевое приближение. Задача о локальных периодических движениях с помощью изменения масштаба сводится к задаче, содержащей малый параметр, и с успехом решается методом Ляпунова–Пуанкаре. Таким образом установлено существование ляпуновских семейств в системе Ляпунова и обратимых системах.

Системы общего вида, близкие к резонансным системам, относятся к негрубым. Такие системы изучаются построением [5] новой порождающей системы, уже содержащей малый параметр. Основная идея такого подхода – выделение наиболее существенных, с точки зрения факта существования периодических движений, возмущений. Систематическое развитие подхода [5] позволяет исследовать в том числе и все резонансные системы.

Для негрубых систем стандартного вида установлена общая теорема ([5], теорема 5). При внимательном прочтении доказательства видно, что теорема доставляет необходимые и достаточные условия существования периодического движения, если исключить случай кратных корней амплитудного уравнения; в формулировке теоремы явно говорится только о достаточных условиях. Это обстоятельство важно при решении частных задач, ибо позволяет оценивать полноту исследования, в том числе, и в настоящей работе.

При дополнительном условии существования в исследуемой системе первого интеграла получаем задачу о локальных периодических движениях системы Ляпунова. Периодические движения в этой системе рассматривались при точном двухчастотном резонансе [6]. При этом исследован только случай "знакоопределенного" интеграла, если принять во внимание только резонансную подсистему. Ниже рассмотрен случай "незнакоопределенного" интеграла. С помощью интеграла порядок системы понижается на единицу, и исследуемая полученная система зависит от параметра – постоянной интеграла. При этом цикл существует на каждом уровне энергии и образует в исходной системе "семейство циклов".

Укажем, что интересные приложения системы Ляпунова находят в неголономной механике [7].

Отметим, что в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы (в случае общего положения) фазовые портреты дают (см. [8], гл. 8, п. 3.2) исчерпывающую информацию о движении вблизи резонанса. Однако для этих механических систем бывает иногда удобно использовать уравнения в неканонических переменных (например, в квазикоординатах), и в этом смысле изложенные ниже результаты полезны.

Наконец, отметим, что при изучении системы, близкой к резонансной системе, удобно использовать нормализующее преобразование, непрерывное по параметру ε (ε – число, характеризующее расстройку резонанса) [9–11]. Основная идея такого преобразования прозрачна: в нормальной форме системы оставляются те нерезонансные члены $C^{(j)}(\varepsilon)$ ($j = 2, 3,\ldots$), которые становятся резонансными при $\varepsilon = 0$. При нормализации в квадратичных членах сохраняются нужные члены второго порядка исходной системы и $C^{(2)}(\varepsilon) = C^{(2)}(0)$. Если же исследуются резонансы $1:3$ и $1:1$, то резонанс $1:2$ (с точностью ε) отсутствует. Поэтому в нормальной форме квадратичные члены отсутствуют, а $C^{(3)}(\varepsilon) = C^{(3)}(0) + \varepsilon(\ldots)$. Значит, при получении выводов на основе изучения нормальной формы системы с точностью до кубических членов включительно можно учесть только $C^{(3)}(0)$.

2. Цикл в системе, близкой к резонансной системе. Рассмотрим гладкую в окрестности положения равновесия систему. Предположим, что система первого приближения имеет две пары $\pm\lambda_s$ ($s = 1, 2$) чисто мнимых корней, которые удовлетворяют (приближенно) резонансному соотношению

$$\begin{gathered}\lambda_1 + p\lambda_2 = i\kappa\varepsilon, \quad \kappa = \text{const}; \quad p = 1, 2, 3 \\ \lambda_s = \lambda_s(0) + i\kappa_s\varepsilon, \quad \kappa_1 + p\kappa_2 = \kappa, \quad \kappa_{1,2} = \text{const}\end{gathered} \tag{2.1}$$

(ε – число, характеризующее расстройку резонанса), а остальные корни не кратны корням $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$. В случае резонанса $1:1$ рассматриваются простые корни.

При $\varepsilon = 0$ линейная система допускает семейство периодических движений. Оказывается, и полная резонансная система допускает локальные периодические движения. Однако такое движение возникает в виде цикла, причем цикл находится на расстоянии $O(\varepsilon)$ или $O(\sqrt{\varepsilon})$ от положения равновесия.

Введем две пары комплексно-сопряженных переменных z_s, $\bar{z}_s$ ($s = 1, 2$), отвечающие корням $\pm\lambda_s$ ($s = 1, 2$), и, выделяя явно линейное приближение, получим

$$\begin{gathered}\dot{z}_s = \lambda_s z_s + Z_s(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + Z_s^*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{x}), \quad s = 1, 2 \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \\ Z_1^*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{0}) = Z_2^*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{const}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Положим в первой группе уравнений (для $\mathbf{z}$, $\bar{\mathbf{z}}$)

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad Z_s = Z_s^{(2)} + Z_s^{(3)} + Z_{s1}, \quad Z_{s1} = o(\|\mathbf{z}\|^3)$$

($Z_s^{(k)}$ – формы порядка k) и нормализуем полученную систему до членов третьего порядка включительно. Далее применим это преобразование к системе (2.2). Тогда получим систему, содержащую параметр ε:

$$\begin{aligned}
&\dot{\eta}_s = \lambda_s\eta_s + H_s^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) + H_s^{(3)}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) + H_{s1}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon H_{s2}(\varepsilon, \boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) + H_s^*(\varepsilon, \boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{y}),\\
&s = 1, 2\\
&\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Y}(\varepsilon, \boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n\\
&H_{s2}(\varepsilon, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad H_s^*(\varepsilon, \boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{0}) \equiv 0, \quad \mathbf{Y}(\varepsilon, \boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad H_s^* = o(\|\boldsymbol{\eta}\|^3)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

(H_s – нормальные формы порядка k).

Изменим в системе (2.3) масштаб: $(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{x}) \to (\varepsilon_1\mathbf{z}, \varepsilon_1\bar{\mathbf{z}}, \varepsilon_1^\sigma\mathbf{x})$, $1 < \sigma < 2$, $\sigma = \text{const}$. Далее воспользуемся полярными координатами

$$\eta_s = \sqrt{r_s}\exp(i\theta_s), \quad \bar{\eta}_s = \sqrt{r_s}\exp(-i\theta_s), \quad s = 1, 2$$

В результате получим автономную систему

$$\begin{aligned}
&\dot{r}_s = \varepsilon_1 R_{s2}(\mathbf{r}, \theta) + \varepsilon_1^2 R_{s3}(\mathbf{r}, \theta) + \sqrt{r_s}(H_s^{**}e^{-i\theta_s} + \bar{H}_s^{**}e^{i\theta_s})\\
&\dot{\theta}_s = i\lambda_s + \frac{1}{2ir_s^{1/2}}[\varepsilon_1\Theta_{s2}(\mathbf{r}, \theta) + \varepsilon_1^2\Theta_{s3}(\mathbf{r}, \theta) + (H_s^{**}e^{-i\theta_s} - \bar{H}_s^{**}e^{i\theta_s})]; \quad s = 1, 2\\
&\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \varepsilon_1^{-\sigma}\mathbf{Y}(\varepsilon, \varepsilon_1\sqrt{\mathbf{r}}\exp(i\theta), \varepsilon_1\sqrt{\mathbf{r}}\exp(-i\theta), \varepsilon_1^\sigma\mathbf{y})\\
&H_s^{**} = H_{s1} + \varepsilon H_{s2} + H_s^*\\
&H_s^{**} = H_s^{**}(\varepsilon, \varepsilon_1\sqrt{\mathbf{r}}\exp(i\theta), \varepsilon_1\sqrt{\mathbf{r}}\exp(-i\theta), \varepsilon_1^\sigma\mathbf{y}), \quad \theta = \theta_1 + p\theta_2
\end{aligned} \tag{2.4}$$

периодическую по углам θ_1, θ_2, содержащую параметры ε и ε_1. В правых частях системы (2.4) явно выписаны основные для дальнейшего изложения слагаемые по ε_1.

Система (2.4) имеет стандартный вид для применения метода Ляпунова–Пуанкаре в теории периодических движений [5]. Воспользуемся периодичностью системы (2.4) по углу θ_2 и выберем θ_2 в качестве новой независимой переменной. Соотношение (2.1) позволяет вместо угла θ_1 ввести резонансный угол θ. В результате имеем периодическую по θ_2 (и по θ) систему $n + 3$ порядка, где роль "амплитуд" играют переменные r_1, r_2, θ, а роль "угла" – вектор $\mathbf{y}$.

Теорема 1. Каждому простому корню (r_1^0, r_2^0, θ^0) системы амплитудных уравнений для переменных r_1, r_2, θ в ε_1 – окрестности нуля отвечает цикл

$$\begin{aligned}
&z_1 = \varepsilon_1\{(r_1^0 + O(\varepsilon_1))^{1/2}\exp[i(\theta^0 - p\theta_2 + O(\varepsilon_1))] + O(\varepsilon_1)\}\\
&z_2 = \varepsilon_1\{(r_2^0 + O(\varepsilon_1))^{1/2}\exp[i(\theta_2 + O(\varepsilon_1))] + O(\varepsilon_1)\}\\
&\theta_2 = [i\lambda_2 + O(\varepsilon_1)]t + \theta_2^0, \quad \theta_2^0 = \text{const}\\
&\mathbf{x} = \mathbf{O}(\varepsilon_1)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

системы (2.2); $\varepsilon_1 = \varepsilon$ в случае $p = 2$ и $\varepsilon_1^2 = \varepsilon$ при $p = 1$ и $p = 3$.

Доказательство. Существование периодических по θ_2 движений периодической по θ_2 и θ системы, полученной из автономной системы (2.4), гарантируется общей теоремой [5]. Эти движения существуют при $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, где ε_0 – некоторое положительное число, и

$$r_s^0 = r_s^0 + O(\varepsilon_1), \quad \theta = \theta^0 + O(\varepsilon_1), \quad \mathbf{y} = \mathbf{O}(\varepsilon_1^\sigma)$$

Теперь, учитывая масштабирование и автономность системы (2.2), получим цикл (2.5).

Замечания. 1°. Теорема 1 доставляет условия рождения изолированного цикла в ε_1 – окрестности нуля в системе общего вида, близкой к резонансной системе.

2°. Из теоремы 1 следует, что при анализе задачи можно ограничиться исследованием только резонансной системы.

3°. Для систем, обладающих дополнительными свойствами гамильтоновой системы, системы Ляпунова, обратимой системы, амплитудные уравнения имеют непростые корни и применение теоремы 1 не дает условий цикла – изолированного периодического движения. В гамильтоновой системе цикл имеется в каждой системе, построенной на фиксированном уровне энергии, и в исходной системе образует "семейство циклов" – все периодические движения, строго говоря, будут неизолированными; ссылки можно найти в [8]. Аналогичная ситуация имеет место в системе с первыми интегралами. Здесь утверждение, подобное теореме 1, необходимо применять к системе, редуцированной с помощью первых интегралов. Соответствующее утверждение нетрудно вывести и оно используется ниже при рассмотрении системы Ляпунова. Для обратимой системы утверждение типа теоремы 1 тоже существует.

3. Резонанс третьего порядка. Пусть в соотношении (2.1) имеем $p = 2$. Тогда в системе (2.4) получим

$$\begin{aligned}
\dot r_s &= 2\varepsilon R_s(\theta)\sqrt{r_1}r_2 + 2\varepsilon^2(A_{s1}r_1 + A_{s2}r_2)r_s + o(\varepsilon^2)\\
\dot\theta_s &= (3-2s)\omega_s + \varepsilon Q_s(\theta)r_1^{s-3/2}r_2^{2-s} + \varepsilon^2(B_{s1}r_1 + B_{s2}r_2) + o(\varepsilon^2)\\
\omega_s &= |\lambda_s|, \quad \theta = \theta_1 + 2\theta_2, \quad \omega_1 = 2\omega_2 + \kappa\varepsilon\\
R_s(\theta) &= a_s\cos\theta + b_s\sin\theta, \quad Q_s(\theta) = dR_s(\theta)/d\theta; \quad s = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.1}$$

(a_s, b_s, A_{sj}, B_{sj} – действительные постоянные). Заменим два уравнения для θ_1 и θ_2 одним уравнением для θ

$$\dot\theta = \varepsilon(\kappa + r_1^{-1/2}F) + \varepsilon^2(B_1r_2 + B_2r_2) + O(\varepsilon^2)$$

$$F = -(a_1r_2 + 2a_2r_1)\sin\theta + (b_1r_2 + 2b_2r_1)\cos\theta$$

$$B_1 = B_{11} + 2B_{21}, \quad B_2 = B_{12} + 2B_{22}$$

Далее выберем в качестве независимой переменной угол θ_2 и запишем в первом приближении по ε систему амплитудных уравнений [5]

$$(a_s\cos\theta + b_s\sin\theta)\sqrt{r_1}r_2 = 0, \quad s = 1, 2, \quad F = 0 \tag{3.2}$$

Имея в виду, что на рассматриваемых движениях $r_s \neq 0$ ($s = 1, 2$), получим, что система (3.2) имеет решение только в случае

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 = -\mathrm{tg}\,\theta^0 = -\xi \quad (\xi = \mathrm{const}) \tag{3.3}$$

Отметим, что условия (3.3) не могут выполнятся [9] в неустойчивой резонансной системе, а при выполнении условий (3.3) система может быть как неустойчивой ($b_1b_2 > 0$), так и устойчивой во втором порядке ($b_1b_2 < 0$).

Пусть условия (3.3) выполнены. Тогда одно из двух уравнений для r_s в системе (3.1) заменим уравнением

$$b_2\dot{r}_1 + b_1\dot{r}_2 = \varepsilon^2[b_2(A_{11}r_1 + A_{12}r_2)r_1 + b_1(A_{21}r_1 + A_{22}r_2)r_2] + o(\varepsilon^2)$$

и, следовательно, система амплитудных уравнений [5] примет вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\theta = \xi \\ &\kappa + (b_1r_2 + 2b_2r_1)r_1^{-1/2}/\cos\theta = 0 \\ &A_{22}^*u^2 + A^*u + A_{11}^* = 0, \quad u = r_2/r_1 \\ &A^* = A_{12}^* + A_{21}^*, \quad A_{sj}^* = A_{sj}/b_s; \quad s, j = 1, 2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Проанализируем совместность системы (3.4). В вырожденных случаях

$$\begin{aligned} &\text{а) } A_{11}^*A_{22}^* < 0, \quad A^* = 0 \\ &\text{б) } A_{22}^* = 0, \quad A^*A_{11}^* < 0 \\ &\text{в) } A_{11}^* = 0, \quad A^*A_{22}^* < 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

последнее уравнение системы (3.4) имеет один положительный корень u^0. Тогда $r_2^0 = u^0r_1^0$, и из второго уравнения системы (3.4) найдем

$$r_1^0 = -\kappa\cos\theta^0/(b_1 + 2b_2u^0)^2 \tag{3.6}$$

если $b_1 + 2b_2u^0 \neq 0$. Угол θ определяется из первого уравнения (3.4), причем при заданном коэффициенте κ угол θ^0 имеет единственное значение.

Следовательно, в вырожденных случаях *а–в* система (3.4) имеет один простой корень r_1^0, r_2^0, θ^0, а корню при $\kappa < 0$ обязательно отвечает корень при $\kappa > 0$.

В общих случаях

$$\begin{aligned} &\text{г) } D > 0, \quad A^*A_{22}^* > 0 \\ &\text{д) } D > 0, \quad A^*A_{22}^* < 0 \\ &D = A^{*2} - 4A_{11}^*A_{22}^* \end{aligned} \tag{3.7}$$

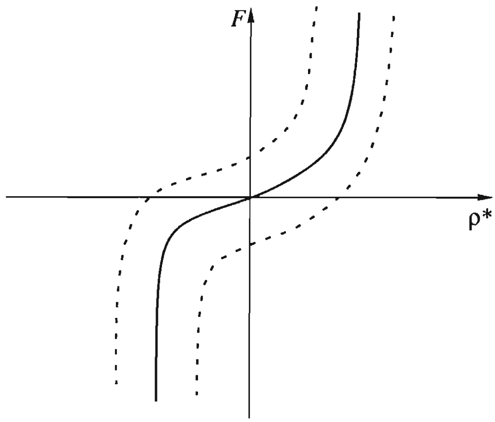
система (3.4) имеет соответственно один или два простых корня, причем r_1^0 находится, как и ранее, из равенства (3.6).

Теорема 2. В каждом из перечисленных случаев *а–д* в системе, близкой к резонансной с соотношением $\lambda_1 + 2\lambda_2 = \kappa\varepsilon$ (κ = const), в ε – окрестности нуля рождается один (случаи *а–г*) или два (случай *д*) цикла, причем цикл обязательно существует как при $\kappa > 0$, так и при $\kappa < 0$.

Замечание. Из выражения (3.6) следует, что цикл рождается в окрестности как устойчивой, так и неустойчивой точки равновесия.

4. Устойчивость циклов. Составим уравнения в вариациях для решения (r_1^0, r_2^0, θ^0), полагая

$$\Delta r_s = r_s - r_s^0, \quad s = 1, 2, \quad \Delta\theta = \theta - \theta^0$$



при условии, конечно, что одно из условий *а–д* в (3.5), (3.7) выполнено. Получим

$$\begin{aligned}
\Delta\dot r_1 &= -\varepsilon b_1\sqrt{r_1^0}r_2^0\chi\Delta\theta \\
\Delta\dot r_1/b_1+\Delta\dot r_2/b_2 &= -2\varepsilon^2[(2A_1^*r_1^0+A^*r_2^0)\Delta r_1^0+(A^*r_1^0+2A_{22}^*r_2^0)\Delta r_2]/\omega_2 \\
\Delta\dot\theta &= \frac{-\varepsilon\chi}{2r_1^0\sqrt{r_1^0}}[(2b_2r_1^0-b_1r_2^0)\Delta r_1+2b_1r_1^0\Delta r_2], \quad \chi = \frac{1}{\omega_2\cos\theta^0}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Характеристическое уравнение при $\varepsilon = 0$ имеет только нулевые корни $\rho = 0$. Поэтому при $\varepsilon \ne 0$ положим $\rho = \varepsilon\rho_*/\omega_2$ и для нахождения ρ_* составим уравнение

$$\det\begin{Vmatrix}
-\rho_* & 0 & -b_1\sqrt{r_1^0}r_2^0\chi \\
-2\varepsilon(2A_{11}^*r_1^0+A^*r_2^0)-\dfrac{\rho_*}{b_1} & -2\varepsilon(A^*r_1^0+2A_{22}^*r_2^0)-\dfrac{\rho_*}{b_2} & 0 \\
-\dfrac{\chi}{2r_1^0\sqrt{r_1^0}}(2b_2r_1^0-b_1r_2^0) & -\dfrac{\chi b_1}{\sqrt{r_1^0}} & -\rho_*
\end{Vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, запишем это уравнение в виде

$$F = [(1+\varepsilon a_1)\rho_*^2+a_2]\rho_*+\varepsilon a_3 = 0 \tag{4.2}$$

$$a_2 = (r_2^0b_1\chi)^2/(2r_1^0)$$

$$a_3 = \chi^2(r_2^0/r_1^0)\left\{2b_1(A_{11}^*-A^*)r_1^{0^2}+[(2b_1+b_2)A^*-4b_1A_{22}^*]r_1^0r_2^0+2b_2A_{22}^*r_2^{0^2}\right\}$$

(явный вид коэффициента a_1 в дальнейшем не понадобится).

Из графика функции $F(\rho_*)$ видно (фигура), что при $a_3 = 0$ (сплошная линия) уравнение (4.2) имеет один нулевой и пару чисто мнимых корней. При $a_3 > 0$ ($a_3 < 0$) нулевой корень переходит в отрицательный (положительный), не равный нулю (штриховые кривые), а мнимая пара корней расщепляется. Также заметим, что коэффициент при ρ_*^2 равен нулю, а $a_2 > 0$. Поэтому применение критерия Рауса–Гурвица сводится только к одному условию: $a_3 > 0$.

Теорема 3. Цикл при резонансе третьего порядка ($\lambda_1 + 2\lambda_2 = \kappa\varepsilon$) устойчив, если

$$
\begin{aligned}
&A_{22}^* u^2 + A^* u^2 + A_{11}^* = 0, \quad u > 0 \\
&2b_2 A_{22}^* u^2 + [(2b_1 + b_2)A^* - 4b_1 A_{22}^*]u + 2b_1(A_{11}^* - A^*) > 0
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Замечания. 1°. Очевидно,что условия (4.3) совместны как для устойчивой ($b_1 b_2 < 0$), так и для неустойчивой точки равновесия.

2°. Условия (4.3) теоремы 3 гарантируют ассимптотическую устойчивость цикла системы (3.1) по переменным r_1, r_2, $\theta = \theta_1 + 2\theta_2$. Хотя очевидно, что устойчивость цикла системы (3.1) достаточно исследовать только по части переменных r_1, r_2.

5. Резонанс четвертого порядка. Выпишем нормальную форму системы, когда в ней имеется соотношение (2.1) с $p = 3$

$$
\begin{aligned}
\dot{r}_s &= 2\varepsilon_1^2[(A_{s1}r_1 + A_{s2}r_2)r_s + R_s(\theta)r_1^{1/2}r_2^{3/2}] + o(\varepsilon_1^2) \\
\dot{\theta}_s &= (3 - 2s)\omega_s + \varepsilon_1^2[B_{s1}r_1 + B_{s2}r_2 + Q_s(\theta)r_1^{s-3/2}r_2^{5/2-s}] + o(\varepsilon_1^2) \\
\theta &= \theta_1 + 3\theta_2, \quad \omega_1 = 3\omega_2 + \kappa\varepsilon, \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon; \quad s = 1, 2
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

(A_{sj}, B_{sj}, a_s, b_s – действительные постоянные), а функции $R_s(\theta)$, $Q_s(\theta)$ введены последними соотношениями в (3.1). Как и в случае резонанса третьего порядка, выберем угол θ_2 за новую независимую переменную, а вместо уравнения для θ_1 используем уравнение для θ. Тогда амплитудные уравнения [5] для полученной периодической по θ_2 системы третьего порядка запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&A_{s1}r_1 + A_{s2}r_2 + R_s(\theta)r_1^{s-3/2}r_2^{5/2-s} = 0, \quad s = 1, 2 \\
&\kappa + B_1 r_1 + B_2 r_2 + Q_1(\theta)r_1^{-1/2}r_2^{3/2} + 3Q_2(\theta)r_1^{1/2}r_2^{1/2} = 0 \\
&B_s = B_{1s} + 3B_{2s}, \quad s = 1, 2
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Проанализируем совместность системы (5.2). Квадратное уравнение

$$
A_{22}u^2 + R_2(\theta)u + A_{21} = 0; \quad R_2(\theta) = a_2\cos\theta + b_2\sin\theta \tag{5.3}
$$

с параметром θ при известных ограничениях на коэффициенты имеет один или два положительных корня. В вырожденных случаях равенства нулю одного из коэффициентов A_{11} или A_{22} это ограничение заключается в неравенстве $a_2^2 + b_2^2 < \max\{|A_{11}^2|, |A_{22}^2|\}$.

Подставим полученное решение $u(\theta)$ уравнения (5.3) в первое уравнение системы (5.2) и определим корень θ^0 из уравнения

$$
A_{11} + A_{12}u^2(\theta) + (a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)u(\theta)\sqrt{u(\theta)} = 0
$$

Наконец, подставляя $r_2 = u(\theta^0)r_1$ и $\theta = \theta^0$ в последнее уравнение системы (5.2), найдем r_1^0 и $r_2^0 = u(\theta^0)r_1^0$.

Изложенный алгоритм доказывает совместность системы (5.2) и позволяет вывести условия существования простого корня.

Теорема 4. Каждому простому корню (r_1^0, r_2^0, θ^0) системы амплитудных уравнений (5.2) в $\sqrt{\varepsilon}$ – окрестности положения системы, близкой к резонансной $(\lambda_1 + 3\lambda_2 = \kappa\varepsilon)$, отвечает цикл.

Замечание. Из третьего уравнения системы (5.2) следует, что в случае $B_1 = B_2 = 0$ существование цикла возможно как при $\kappa < 0$, так и при $\kappa > 0$.

6. Кратные корни ($\lambda_1 + \lambda_2 = \kappa\varepsilon$). Получим нормальную форму системы в случае кратных корней

$$\dot{r}_s = 2\varepsilon_1^2\{(A_{s1}r_1 + A_{s2}r_2)r_s + [R_{s1}(\theta)r_1 + R_{s2}(\theta)r_2]\sqrt{r_1r_2} + $$
$$+ (\alpha_s\cos 2\theta + \beta_s\sin 2\theta)r_1r_2\} + o(\varepsilon_1^2)$$

$$\dot{\theta}_s = (3-2s)\omega_s + \varepsilon_1^2\{B_{s1}r_1 + B_{s2}r_2 + [Q_{s1}(\theta)r_1 + Q_{s2}(\theta)r_2]r_1^{s-3/2}r_2^{3/2-s} +$$
$$+ (-\alpha_s\sin 2\theta + \beta_s\cos 2\theta)r_{3-s}\} + o(\varepsilon_1^2) \tag{6.1}$$

$$R_{sj}(\theta) = a_{sj}\cos\theta + b_{sj}\sin\theta, \quad Q_{sj} = dR_{sj}(\theta)/d\theta; \quad s, j = 1, 2$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad \omega_1 = \omega_2 + \kappa\varepsilon, \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon$$

(A_{sj}, B_{sj}, a_{sj}, b_{sj}, α_s, β_s – действительные постоянные). Амплитудные уравнения для этой системы запишем в виде

$$(A_{s1} + A_{s2}u^2)u^{s-1} + [(a_{s1} + a_{s2}u^2)\cos\theta + (b_{s1} + b_{s2}u^2)\sin\theta]u^{2-s} +$$
$$+ (\alpha_s\cos 2\theta + \beta_s\sin 2\theta)u^{3-s} = 0, \quad s = 1, 2 \tag{6.2}$$

$$a + r_1F(u, \theta) = 0 \tag{6.3}$$

$$F(u, \theta) = B_1 + B_2u^2 + \sum_{s=1}^{2}[(-(a_{s1} + a_{s2}u^2)\sin\theta +$$
$$+ (b_{s1} + b_{s2}u^2)\cos\theta)u^{3-2s} + (-\alpha_s\sin 2\theta + \beta_s\cos 2\theta)u^{4-2s}]$$

$$u = \sqrt{r_2/r_1}, \quad B_s = B_{1s} + B_{2s}, \quad s = 1, 2$$

Очевидно, вопрос совместности системы (6.2), (6.3) сводится к анализу системы (6.2). Каждому простому корню (u^0, θ^0), $u^0 > 0$ системы (6.2) отвечает простой корень (r_1^0, r_2^0, θ^0), $r_2^0 = u^0r_1$ системы (6.2), (6.3).

Таким образом справедлива

Теорема 5. Каждому простому корню (u^0, θ^0), $u^0 > 0$, системы (6.2) отвечает цикл, рождающийся в $\sqrt{\varepsilon}$ – окрестности нуля.

Замечание. Полученные выше в теоремах 1–5 условия принципиально решают проблему существования цикла. При этом используется общая теорема [5], которая с точностью до отсутствия кратных корней системы амплитудных уравнений доставляет необходимые и достаточные условия. В этом смысле полученные результаты являются полными. Однако применение результатов требует анализа корней некоторых полиномов. Оказывается, в частных случаях проблема цикла решается до конца.

7. Система Ляпунова. Исследуем систему (2.1), (2.2) при дополнительном условии существования в окрестности нуля первого интеграла $V = h$ (h = const); V – гладкая функция. Наличие чисто мнимых корней λ_1, λ_2 и резонансное условие (2.1) указывают на то, что квадратичную часть V_2 функции V можно представить в виде

$$V_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + W_2(\mathbf{x}), \quad \omega_s = |\lambda_s|, \quad s = 1, 2$$

(W_2 – квадратичная форма от $\mathbf{x}$). Этот наиболее интересный для приложений случай применим не только к равновесию, но и к стационарным движениям. Укажем, что случай "знакоопределенного" интеграла, когда перед ω_2 стоит "плюс", рассматривался ранее [6].

Пусть остальные корни не кратны λ_2. Тогда при $\varepsilon = 0$ у системы имеется ляпуновское семейство, отвечающее корню λ_1 [1], а при $\varepsilon \neq 0$ существуют уже два семейства, соответствующих λ_1 и λ_2; возникает второе семейство. На первом семействе имеем $r_1 = O(h)$, r_2, $\|\mathbf{x}\|^2 = o(h)$, на втором – $r_2 = O(h)$, $r_1 = O(h)$, $\|\mathbf{x}\|^2 = o(h)$. Оказывается, при $\varepsilon \neq 0$ возникает "семейство" циклов, на котором $r_1 = O(r_2)$.

Ниже исследуем "семейство циклов" в системе с первым интегралом. При этом, не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим случай, когда присоединенная система по переменной $\mathbf{x}$ отсутствует.

Учитывая масштабирование и соотношение (2.1), интеграл V представим в виде

$$(pr_1 - r_2)\omega_2 + \kappa\varepsilon r_1 + O(\varepsilon_1) = h^* \ (h^* = \text{const}) \tag{7.1}$$

и рассмотрим движения, на которых $h^* = o(1)$. Тогда из интеграла (7.1) радиус r_1 определяется через r_2 и вместо системы (2.4) четвертого порядка ($\mathbf{y} = 0$) имеем систему третьего порядка, зависящую от h^*. Далее построим периодическую систему второго порядка и применим теорему из [5]. Тогда, с учетом того, что интеграл (7.1) приводит к определенным соотношениям между коэффициентами нормальной формы, имеем формулы (2.5) для "семейства циклов".

1°. *Резонанс третьего порядка.* В соответствии с интегралом (7.1) в системе (3.1) имеем $2a_1 = a_2$, $2b_1 = b_2$. Тогда система периодических уравнений, содержащая цикл, имеет вид

$$\frac{dr_1}{d\theta_2} = \frac{1}{\Phi_2}[4\varepsilon(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)r_1^{3/2} + o(\varepsilon)] \tag{7.2}$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_2} = \frac{1}{\Phi_2}\{\varepsilon[\kappa + 5r_1^{1/2}(-a_1\sin\theta + b_1\cos\theta)] + o(\varepsilon)\}$$

$$\Phi_2 = -\omega_2 + 2\varepsilon(-a_1\sin\theta + b_1\cos\theta)] + o(\varepsilon)$$

Система амплитудных уравнений всегда имеет простые корни

$$5r_1^{0^{1/2}} = -\kappa b_1/(\chi_1\cos\theta^0), \quad \operatorname{tg}\theta^0 = -a_1/b_1, \quad \chi_1 = a_1^2 + b_1^2 \tag{7.3}$$

что доказывает существование цикла, который имеется при любом знаке κ. Характеристическое уравнение для цикла (7.3) приобретает вид

$$\det\begin{Vmatrix} -\rho & -4\varepsilon\chi_1 r_1^{0^{3/2}}\cos\theta^0/(b_1\omega_2) \\ -5\varepsilon b_1/(2r_1^{1/2}\chi_1\omega_1\cos\theta^0) & -\rho \end{Vmatrix} = 0$$

и всегда имеет пару действительных корней противоположного знака; цикл всегда неустойчив.

Теорема 6. В системе Ляпунова, близкой к резонансной с соотношением $\lambda_1 + 2\lambda_2 = \kappa\varepsilon$, на каждом уровне энергии $h = o(\varepsilon)$ всегда существует единственный цикл. Цикл рождается в ε – окрестности нуля, неустойчив и имеет гиперболический характер.

Следствие. В системе Гамильтона, близкой к резонансной с соотношением $\lambda_1 + 2\lambda_2 = \kappa\varepsilon$, на каждом уровне энергии $h = o(\varepsilon)$ всегда существует единственный цикл

$$r_1 = r_1^0 + O(\varepsilon), \quad r_2 = 2r_1^0 + O(\varepsilon), \quad \theta_1 = -2\theta_2 + O(\varepsilon) + \theta_1^0$$

$$\theta_2 = -(\omega_2 + O(\varepsilon))t + \theta_2^0, \quad r_1^0 = (|\kappa b_1|/5\chi_1)^2, \quad \sin\theta^0 = 0, \quad \kappa\chi_1\cos\theta^0 < 0$$

$$\theta^0 = \theta_1^0 + 2\theta_2^0, \quad \omega_2 = |\lambda_2|, \quad \theta_2^0 = \text{const}$$

который неустойчив и имеет гиперболический характер.

Замечание. В гамильтоновой системе имеем $a_1 = a_2 = 0$ [9].

2°. *Резонанс четвертого порядка.* В случае системы Ляпунова в соотношениях (5.1) имеем

$$A_{11} + 3A_{12} = A_{21} + 3A_{22}, \quad 3a_1 = a_2, \quad 3b_1 = b_2$$

и периодическая система из двух уравнений примет вид

$$\frac{dr_1}{d\theta_2} = \frac{1}{\Phi_2}\{6\varepsilon[A_{11} + 3A_{12} + 3\sqrt{3}(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)]r_1^2 + o(\varepsilon)\}$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_2} = \frac{1}{\Phi_2}\{\varepsilon[\kappa + B_1 + 3B_2 + 12\sqrt{3}(-a_1\sin\theta + b_1\cos\theta)r_1] + o(\varepsilon)\}$$

$$\Phi_2 = -\omega_2 + \varepsilon[B_{21} + 3B_{22} + 3\sqrt{3}(-a_1\sin\theta + b_1\cos\theta)]r_1 + o(\varepsilon)$$

Видно, что при выполнении условия

$$|A_{11} + 3A_{12}| \le 3\sqrt{3(a_1^2 + b_1^2)} \tag{7.4}$$

первое из амплитудных уравнений имеет решение

$$\cos(\theta - \psi) = (A_{11} + 3A_{12})/\sqrt{27(a_1^2 + b_1^2)}, \quad \operatorname{tg}\psi = b_1/a_1 \tag{7.5}$$

Тогда значение r_1^0 однозначно определяется из второго уравнения

$$r_1^{0^2} = -\kappa/c > 0, \quad c = [B_1 + 3B_2 + 12\sqrt{3(a_1^2 + b_1^2)}\cos(\theta^0 + \psi)] \neq 0$$

если знаменатель c отличен от нуля. Тем самым доказывается существование цикла.

Составим характеристическое уравнение системы в вариациях в окрестности цикла

$$\det\begin{Vmatrix} -\rho & -18\varepsilon r_1^{0^2}\sqrt{3(a_1^2 + b_1^2)}\cos(\theta^0 + \psi)/\omega_2 \\ -\varepsilon\kappa/(\omega_2 r_1^0) & -\rho \end{Vmatrix} = 0$$

Отсюда следует, что устойчивость зависит от знака выражения

$$k = -c\cos(\theta^0 + \psi) \tag{7.6}$$

При $k > 0$ цикл имеет гиперболический характер, а при $k < 0$ цикл устойчив.

Теорема 7. При выполнении (7.4) цикл в системе Ляпунова в ситуации, близкой к резонансной ($\lambda_1 + 3\lambda_2 = \varepsilon\kappa$), рождается в $\sqrt{\varepsilon}$ – окрестности нуля, определяется формулами (7.5), (7.6), имеет гиперболический характер при $k > 0$, при $k < 0$ – линейно устойчив.

Замечание. В гамильтоновой системе имеем $A_{11} = A_{12} = a_1 = 0$ [9].

3°. *Кратные корни*. Обратимся теперь к ситуации, когда в системе Ляпунова $\lambda_1 + \lambda_2 = \kappa\varepsilon$. Тогда в соответствии с интегралом (7.1) в системе (6.1) получим

$$A_{1j} = A_{2j}, \quad a_{1j} = a_{2j}, \quad b_{1j} = b_{2j}, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad (j = 1, 2)$$

При этих условиях выпишем периодическую систему

$$\frac{dr_1}{d\theta_2} = \frac{2\varepsilon}{\Phi_2}[(A + a_*\cos\theta + b_*\sin\theta + \alpha_1\cos 2\theta + \beta_1\sin 2\theta)r_1^2 + o(\varepsilon)]$$
$$\frac{d\theta}{d\theta_2} = \frac{\varepsilon}{\Phi_2}\{\kappa + [B + 2(-a_*\sin\theta + b_*\cos\theta - \alpha_1\sin 2\theta + \beta_1\cos 2\theta)r_1] + o(\varepsilon)\} \quad (7.7)$$

$$\Phi_2 = -\omega_2 + \varepsilon[B_2 - a_2\sin\theta + b_2\cos\theta - \alpha_2\sin 2\theta + \beta_2\cos 2\theta]r_1 + o(\varepsilon)$$

$$A = A_{11} + A_{12}, \quad a_* = a_{11} + a_{12}, \quad b_* = b_{11} + b_{12}, \quad B = \sum_{s, j = 1}^{2} B_{sj}$$

$$B_2 = B_{21} + B_{22}, \quad a_2 = a_{21} + a_{22}, \quad b_2 = b_{21} + b_{22}$$

Система амплитудных уравнений

$$R(\theta)r_1^2 = 0, \quad \kappa + F(\theta)r_1 = 0$$

$$R = A + \mathrm{Re}(c_* e^{-i\theta}) + \mathrm{Re}(\gamma e^{-2i\theta})$$

$$F = B + 2[\mathrm{Im}(c_* e^{-i\theta}) + \mathrm{Im}(\gamma e^{-2i\theta})]$$

$$c_* = a_* + ib_*, \quad \gamma = \alpha_1 + i\beta_1$$

имеет решение (r_1^0, θ^0), $r_1^0 > 0$, если $R(\theta^0) = 0$, $F(\theta^0) \neq 0$. Значит, цикл существует, если $R(\theta) = 0$ при некотором θ.

Отметим, что задача нахождения корней тригонометрического выражения при заданных коэффициентах A, a_*, b_*, α_1, β_1 не представляет трудностей.

Теперь обратимся к задаче устойчивости построенного цикла и составим уравнения в вариациях для решения (r_1^0, θ^0). Далее запишем характеристическое уравнение и вычислим корни

$$\rho^2 = -\varepsilon^2 cR'(\theta^0)/(r_1^0\omega_2^2)$$

$$c = B + R'(\theta^0), \quad R'(\theta^0) = -a_*\sin\theta^0 + b_*\cos\theta^0 - 2\alpha_1\sin 2\theta^0 + 2\beta_1\cos 2\theta^0$$

Отсюда следует устойчивость $cR'(\theta^0) > 0$ и неустойчивость $cR'(\theta^0) < 0$.

Теорема 8. В системе Ляпунова, близкой к резонансной с соотношением $\lambda_1 + \lambda_2 = \varepsilon\kappa$, в $\sqrt{\varepsilon}$ – окрестности нуля рождается цикл, если уравнение $R(\theta) = 0$ имеет корень θ^0, при котором $F(\theta^0) \neq 0$. Цикл линейно устойчив, когда $cR'(\theta) > 0$, и носит гиперболический характер при $cR'(\theta^0) < 0$.

Замечание. В гамильтоновой системе имеем $A = a_* = \alpha_1 = 0$ [9].

8. Действие периодических возмущений. Предположим, что в окрестности нуля на автономную систему действуют малые периодические возмущения порядка μ. Тогда в общем случае следует ожидать вынужденных колебаний амплитуды $O(\mu^\sigma)$, $\sigma > 0$. Выясним, как влияют нелинейности на эту амплитуду. Этот вопрос вместе с проблемой существования колебаний решается применением общей теоремы из [5].

В периодической системе резонансная ситуация возникает [1], когда система имеет даже одну частоту, близкую к частоте возмущения. Поэтому здесь для выяснения существа дела можно ограничиться анализом только системы второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + X(x, y) + \mu X_1(\mu, x, y, t) \\ \dot{y} &= \omega x + Y(x, y) + \mu Y_1(\mu, x, y, t), \quad \omega = p + \kappa\varepsilon, \quad p \in \mathbf{N} \end{aligned} \tag{8.1}$$

(X, Y – нелинейные члены, X_1, Y_1 – 2π-периодические функции t; $\kappa = \text{const}$).

Выполним масштабирование: $(x, y) \to (\varepsilon_1 x, \varepsilon_1 y)$. Тогда в общем случае имеем

$$X(\varepsilon_1 x, \varepsilon_1 y) = \varepsilon_1^3 X_0(\varepsilon_1, x, y), \quad Y(\varepsilon_1 x, \varepsilon_1 y) = \varepsilon_1^3 Y_0(\varepsilon_1, x, y), \quad \varepsilon = \varepsilon_1^k (k \geq 2)$$

Положим $\varepsilon_1 = \mu^{1/3}$ и запишем систему (8.1) в полярных координатах r, θ ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$). Получим систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon_1^2[(X_0 + X_1)\cos\theta + (Y_0 + Y_1)\sin\theta] \\ \dot{\theta} &= p + \varepsilon_1^2 r^{-1}[-(X_0 + X_1)\sin\theta + (Y_0 + Y_1)\cos\theta + \kappa r \varepsilon_1^{k-2}], \quad p \in \mathbf{N} \end{aligned} \tag{8.2}$$

в которой

$$X_0(0, r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + Y_0(0, r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta = Ar^3 \ (A = \text{const})$$

$$-X_0(0, r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta + Y_0(0, r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta = Br^3 \ (B = \text{const})$$

Система (8.2) содержит параметр ε_1. При $\varepsilon_1 = 0$ система (8.2) допускает $2\pi/p$-периодическое движение ($p \in \mathbf{N}$)

$$r = r^0 \ (r^0 = \text{const}), \quad \theta = \theta_*(t) = pt + \theta^0, \quad \theta^0 = \text{const}$$

При $\varepsilon_1 \neq 0$ вопрос о существовании периодических движений решается простыми корнями системы амплитудных уравнений

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [Ar^{0^3} + X_*(t)\cos\theta_*(t) + Y_*(t)\sin\theta_*(t)]dt = 0 \\ &\int_0^{2\pi} [Br^{0^3} - X_*(t)\sin\theta_*(t) + Y_*(t)\cos\theta_*(t) + \kappa^* r^0]dt = 0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$X_*(t) = X_1(0, 0, 0, t) = a_0/2 + a_1\cos t + b_1\sin t + a_2\cos t + b_2\sin t + \ldots$$

$$Y_*(t) = Y_1(0, 0, 0, t) = a_0^*/2 + a_1^*\cos t + b_1^*\sin t + a_2^*\cos t + b_2^*\sin t + \ldots$$

($\kappa^* = \kappa$ при $k = 2$ и $\kappa^* = 0$ при $k > 2$).

Выпишем уравнения (8.3) в явной форме

$$Ar^{0^3} + (a_p + b_p^*)\cos\theta^0 + (a_p^* - b_p)\sin\theta^0 = 0$$

$$Br^{0^3} + \kappa^* r^0 + (a_p - b_p^*)\cos\theta^0 - (a_p^* + b_p)\sin\theta^0 = 0$$

В комплексном виде эту систему можно записать в виде уравнения

$$(A + iB)r^{0^3} + \kappa^* r^0 + Ce^{-i\theta^0} = 0, \quad C = (a_p + b_p^*) + i(a_p^* - b_p)$$

Отсюда при $\kappa^* = 0$ найдем единственный корень

$$r^{0^3} = |C/(A + iB)|, \quad \theta^0 = \arg(C/(A + iB)) \tag{8.4}$$

В общем случае для положительного корня $r^0 > 0$ имеем

$$\begin{gathered} r^{0^3} + \frac{A\kappa^*}{A^2 + B^2} r^0 + \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta^0) = 0 \\ \kappa^* r^0 + |C|\sqrt{A^2 + B^2} \sin(\theta_1 + \theta_2 - \theta^0) = 0, \quad \theta_1 = \arg C, \quad \theta_2 = \arg(A - iB) \end{gathered} \tag{8.5}$$

Далее из второго равенства найдем r^0 и, подставляя в первое уравнение, найдем

$$r^{0^3} = -\sqrt{\frac{A^2 + C^2}{A^2 + B^2}} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta^0), \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{A}{|C|}$$

Таким образом, невырожденная система ($C \neq 0$) амплитудных уравнений всегда имеет простой корень. Это означает, что система (8.1) имеет 2π-периодическое движение.

Теорема 9. Невырожденная система (8.1) ($C \neq 0$) при достаточно малом $|\mu| \neq 0$ допускает единственное 2π-периодическое решение вида

$$x = \mu^{1/3} r^0 \cos(pt + \theta^0) + o(\mu^{1/3}), \quad y = \mu^{1/3} r^0 \sin(pt + \theta^0) + o(\mu^{1/3})$$

9. Вынужденные колебания при резонансе третьего порядка. Предположим, что линеаризованная в окрестности нуля система имеет две частоты. Тогда при отсутствии между частотами "внутреннего" резонанса колебания амплитуды $O(\mu^{1/3})$ происходят по той паре переменных, которая отвечает частоте, близкой к частоте возмущающего воздействия: другая пара имеет амплитуду $O(\mu)$. Ситуация меняется при "внутреннем" резонансе, когда в системе есть соотношение вида (2.1). Здесь уже две пары переменных колеблются с амплитудой $O(\mu^\sigma)$ ($\sigma = 1/2$ для резонанса третьего порядка и $\sigma = 1/3$ для резонансов второго и четвертого порядков).

При рассмотрении этих резонансов ограничимся системой четвертого порядка, отвечающей указанным частотам.

При "внутреннем" резонансе третьего порядка нормализованная до членов второго порядка включительно система в комплексно-сопряженных переменных $\mathbf{z}$, $\bar{\mathbf{z}}$ имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{z}_s = i(3 - 2s)\omega_s z_s + (a_s + ib_s)\bar{z}_1^{s-1}\bar{z}_2^{3-s} + Z_{s0}(z, \bar{z}) + \mu Z_{s1}(\mu, z, \bar{z}, t) \\ \omega_1 = 2\omega_2 + \kappa\varepsilon, \quad s = 1, 2 \end{gathered} \tag{9.1}$$

(a_s, b_s – действительные постоянные, $Z_{s0} = O(\|\mathbf{z}\|^3)$).

Изменим в системе (9.1) масштаб: $(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \to (\varepsilon_1\mathbf{z}, \varepsilon_1\bar{\mathbf{z}})$, $\varepsilon_1^2 = \mu$. Теперь воспользуемся полярными координатами r_s, θ_s. В результате получим

$$\begin{aligned}
\dot{r}_s &= 2\varepsilon_1 R_s(\theta)\sqrt{r_1}r_2 + \varepsilon_1 r_s^{1/2}(Z_s^* e^{-i\theta_s} + \bar{Z}_s^* e^{i\theta_s}), \quad s = 1, 2 \\
\dot{\theta}_s &= (3-2s)\omega_s + \varepsilon_1 Q_s(\theta) r_1^{s/2-1} r_2^{(3-s)/2} + \frac{\varepsilon_1}{2ir_s^{1/2}}(Z_s^* e^{-i\theta_s} - \bar{Z}_s^* e^{i\theta_s})
\end{aligned} \tag{9.2}$$

$$Z_s^* = \varepsilon_1 Z_{s0}^* + Z_{s1}^*, \quad Z_{s0}^* = \varepsilon_1^{-3} Z_{s0}(\varepsilon_1\sqrt{\mathbf{r}}e^{i\theta}, \varepsilon_1\sqrt{\mathbf{r}}e^{-i\theta})$$

$$Z_{s1}^* = Z_{s1}(\mu, \varepsilon_1\sqrt{\mathbf{r}}e^{i\theta}, \varepsilon_1\sqrt{\mathbf{r}}e^{-i\theta}, t), \quad s = 1, 2; \quad \theta = \theta_1 + 2\theta_2$$

(функции $R_s(\theta)$, $Q_s(\theta)$ определены в системе (4.1)).

Вычислим функции

$$Z_{s1}^{**} = Z_{s1}(0, 0, 0, t) = X_{s1}^*(t) + iY_{s1}^*(t)$$

$$X_{s1}^* \equiv a_{0s}/2 + b_{1s}\sin t + a_{2s}\sin 2t + b_{2s}\cos 2t + \ldots$$

$$Y_{s1}^* \equiv a_{0s}^*/2 + b_{1s}^*\sin t + a_{2s}^*\sin 2t + b_{2s}^*\cos 2t + \ldots$$

и рассмотрим резонансный случай, когда

$$\omega_1 = p + \kappa_1\varepsilon, \quad \omega_2 = p/2 - \kappa_2\varepsilon, \quad p \in \mathbf{N} \quad (\kappa_{1,2} = \text{const}, \ \varepsilon = \mu^k, \ k \ge 1/2)$$

Видно, что при $\varepsilon_1 = 0$ система (9.2) имеет $4\pi/p$-периодическое решение

$$r_s = r_s^0, \quad s = 1, 2; \quad \theta_1^* = pt + \theta_1^0, \quad \theta_2^* = -pt/2 + \theta_2^0 \tag{9.3}$$

зависящее от четырех произвольных постоянных r_s^0, θ_s^0, причем при $p = 2q$, $q \in \mathbf{N}$, решение будет $2\pi/q$-периодическим.

Для решения вопроса о существовании в системе (9.1) периодического решения при достаточно малом $|\mu| \ne 0$ составим систему амплитудных уравнений [5]

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left\{R_s(\theta^*)\sqrt{r_1^0}r_2^0 + \sqrt{r_s^0}[X_{s1}^*(t)\cos\theta_s^* + Y_{s1}^*(t)\sin\theta_s^*]\right\}dt = 0 \\
&\int_0^{2\pi}\left\{\kappa^*\kappa_s + Q_s(\theta^*)r_s^{0^{-1/2}} r_2^0 + [-X_{s1}^*(t)\sin\theta_s^* + Y_{s1}^*(t)\cos\theta_s^*]\right\}dt = 0
\end{aligned} \tag{9.4}$$

($\kappa^* = 1$ при $k = 1/2$ и $\kappa^* = 0$ при $k > 1/2$). Составим уравнения (9.4) в явной форме в каждом из случаев

1) $p = 2q, \quad q \in \mathbf{N}$

$$F \equiv 2(a_1\cos\theta^0 + b_1\sin\theta^0)r_2^0 + (a_{p1} + b_{p1}^*)\cos\theta_1^0 + (a_{p1}^* - b_{p1})\sin\theta_1^0 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Phi \equiv 2\kappa^*\kappa_1\sqrt{r_1^0} + (-a_1\sin\theta^0 + b_1\cos\theta^0)r_2^0 - \\
&-[(a_{p1}^* - b_{p1})\cos\theta_1^0 - (a_{p1} + b_{p1}^*)\sin\theta_1^0] = 0
\end{aligned} \tag{9.5}$$

$$2(a_2\cos\theta^0 + b_2\sin\theta^0)\sqrt{r_1^0 r_2^0} + (a_{q2} - b_{q2}^*)\cos\theta_2^0 + (a_{q2}^* + b_{q2})\sin\theta_2^0 = 0$$

$$2\kappa^*\kappa_2\sqrt{r_2^0} + (-a_2\sin\theta^0 + b_2\cos\theta^0)\sqrt{r_1^0 r_2^0} +$$
$$+ (a_{q2}^* + b_{q2})\cos\theta^0 - (a_{q2} - b_{q2}^*)\sin\theta_2^0 = 0$$

2) $p = 2q - 1, \quad q \in \mathbf{N}$

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad a_2\cos\theta^0 + b_2\sin\theta^0 = 0 \tag{9.6}$$

$$2\kappa^*\kappa_2 + (-a_2\sin\theta^0 + b_2\cos\theta^0)\sqrt{r_2^0} = 0$$

$(\theta^0 = \theta_1^0 + 2\theta_2^0)$.

Теорема 10. Каждому простому корню любой из систем амплитудных уравнений (9.5), (9.6) отвечает периодическое движение

$$z_s = \mu^{1/2}\sqrt{r_s^0}\exp\{i((3-2s)pt + \theta_s^0) + O(\mu^{1/2})\} + o(\mu^{1/2}), \ s = 1, 2 \tag{9.7}$$

системы (9.1). При $p = 2q$, $q \in \mathbf{N}$ период равен 2π, а при $p = 2q - 1$, $q \in \mathbf{N}$ период равен 4π.

Проанализируем условия теоремы 10. Сначала обратимся к системе (9.6). Видно, что подсистема, состоящая из третьего и четвертого уравнений, не имеет решения при $r_2^0 \neq 0$, если $\kappa^* = 0$. Это значит, что 2π-периодические движения могут существовать, если расстройка резонанса $\varepsilon = \mu^k$, $k > 1/2$. В этом случае $\operatorname{tg}\theta^0 = -a_2/b_2$, а r_2^0 определяется из четвертого уравнения (9.6).

При $a_1/b_1 = -\operatorname{tg}\theta^0$ из уравнения $F = 0$ получим

$$\operatorname{tg}\theta_1^0 = -(a_{p1} + b_{p1}^*)/(a_{p1}^* - b_{p1})$$

а r_1^0 однозначно определим из условия $\Phi = 0$.

В общем случае, когда $a_1/b_1 \neq -\operatorname{tg}\theta^0$, первые два уравнения системы (9.6) запишем в виде одного комплексного уравнения

$$\begin{aligned} &2i\kappa^*\kappa_1\sqrt{r_1^0} + 2c_1 e^{-i\theta^0} r_2^0 + c_1^* e^{-i\theta_1^0} = 0 \\ &c_1 = a_1 + ib_1, \quad c_1^* = (a_{p1} + b_{p1}^*) + i(a_{p1}^* - b_{p1}) \end{aligned} \tag{9.8}$$

Теперь из последнего уравнения системы (9.6) определим $r_2^0(\theta^0)$ и подставим его в уравнение (9.8). Тогда радиус r_1^0 вычисляется однозначно из (9.8).

Во всех рассмотренных случаях система (9.6) допускает простые корни и существует 4π-периодическое движение вида (9.7).

В случае 2π-периодического движения два первых уравнения системы (9.5) записываются в форме (9.8). Остальные два уравнения также удобно представить в комплексной форме

$$\begin{aligned} &2i\kappa^*\kappa_2\sqrt{r_2^0} + 2c_2 e^{-i\theta^0}\sqrt{r_1^0 r_2^0} + c_2^* e^{-i\theta_2^0} = 0 \\ &c_2 = a_2 + ib_2, \quad c_2^* = (a_{q2} - b_{q2}^*) + i(a_{q2}^* + b_{q2}) \end{aligned} \tag{9.9}$$

При $\kappa^* = 0$ система (9.8), (9.9) легко анализируется. Значит, вопрос о периодических движениях в общей ситуации, когда расстройка резонанса мала ($\varepsilon = \mu^k$, $k > 1/2$), в том числе и при точечном резонансе, решается.

При $\kappa^* = 1$ анализ системы (9.8), (9.9) проводится путем нахождения $\overset{0}{r_2}$ из (9.8) и решения уравнения (9.9), содержащего теперь только $\overset{0}{r_1}$. Различные частные случаи равенства нулю одного из коэффициентов (9.8) или (9.9) просматриваются.

10. Вынужденные колебания при резонансе четвертого порядка. Предположим, что система при $\mu = 0$ приведена к нормальной форме до членов третьего порядка включительно

$$\begin{aligned}&\dot{z}_s = i(3-2s)\omega_s z_s + [C_{s1}|z_1|^2 + C_{s2}|z_2|^2]z_s + C_s^* \bar{z}_1^{s-1}\bar{z}_2^{4-s} + Z_{s0}(z,\bar{z}) + \mu Z_{s1}(\mu, z, \bar{z}, t)\\ &C_{sj} = A_{sj} + iB_{sj}, \quad C_s^* = a_s + ib_s, \quad s, j = 1, 2; \quad \omega_1 = 3\omega_2 + \kappa\varepsilon\end{aligned} \tag{10.1}$$

(A_{sj}, B_{sj}, a_s, b_s – действительные коэффициенты, $Z_s = O(\|\mathbf{z}\|^2)$). Как и при рассмотрении резонанса третьего порядка изменим в системе (10.1) масштаб, выбрав $\varepsilon_1 = \mu^{1/3}$. Тогда в полярных координатах r_s, θ_s имеем

$$\begin{aligned}\dot{r}_s &= 2\varepsilon_1^2[(A_{s1}r_1 + A_{s2}r_2)r_s + R_s(\theta)r_1^{1/2}r_2^{3/2}] + \varepsilon_1^2 r_s^{1/2}(Z_s^* e^{-i\theta_s} + \bar{Z}_s^* e^{i\theta_s})\\ \dot{\theta}_s &= (3-2s)\omega_s + \varepsilon_1^2[B_{s1}r_1 + B_{s2}r_2 + Q_s(\theta)r_1^{s-3/2}r_2^{5/2-s}] + \frac{\varepsilon_1}{2ir_s^{1/2}}(Z_s^* e^{-i\theta_s} - \bar{Z}_s^* e^{i\theta_s})\\ R_s &= a_s\cos\theta + b_s\sin\theta, \quad Q_s = -a_s\sin\theta + b_s\cos\theta, \quad \theta = \theta_1 + 3\theta_2; \quad s = 1, 2\end{aligned} \tag{10.2}$$

(функции Z_s^* имеют такой же смысл, как и в системе (9.2)). Рассмотрим резонансный случай, когда

$$\omega_1 = p + \kappa_1\varepsilon, \quad \omega_2 = p/3 - \kappa_2\varepsilon, \quad p \in \mathbf{N} \quad (\kappa_{1,2} = \text{const}, \varepsilon = \mu^k, \kappa \geq 2/3)$$

Здесь при $\varepsilon_1 = 0$ система (10.2) имеет $6\pi/p$-периодическое решение

$$r_s = \overset{0}{r_s}, \quad s = 1, 2; \quad \theta_1 = pt + \overset{0}{\theta_1}, \quad \theta_2 = -\frac{pt}{3} + \overset{0}{\theta_2}$$

($\overset{0}{r_s}$, $\overset{0}{\theta_s}$ -постоянные), причем при $p = 3q$, $q \in \mathbf{N}$, решение будет $2\pi/q$-периодическим.

Составим системы амплитудных уравнений в каждом из возможных случаев

1) $p = 3q, \quad q \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}&F \equiv 2(A_{11}\overset{0}{r_1} + A_{12}\overset{0}{r_2})\sqrt{\overset{0}{r_1}} + R_1(\overset{0}{\theta})\overset{0}{r_2}{}^{3/2} + (a_{p1} + b_{p1}^*)\cos\overset{0}{\theta_1} + (a_{p1}^* - b_{p1})\sin\overset{0}{\theta_1} = 0\\ &\Phi = 2(B_{11}\overset{0}{r_1} + B_{12}\overset{0}{r_2})\sqrt{\overset{0}{r_1}} + Q_1(\overset{0}{\theta})\overset{0}{r_2}{}^{3/2} + (a_{p1}^* - b_{p1})\cos\overset{0}{\theta_1} -\\ &-(a_{p1} + b_{p1}^*)\sin\overset{0}{\theta_1} + 2\kappa^*\kappa_1\overset{0}{r_1}{}^{1/2}\end{aligned} \tag{10.3}$$

$$\begin{aligned}&2(A_{21}\overset{0}{r_1} + A_{22}\overset{0}{r_2})\sqrt{\overset{0}{r_2}} + R_2(\theta)\overset{0}{r_1}{}^{1/2}\overset{0}{r_2} + (a_{q2} - b_{q2}^*)\cos\overset{0}{\theta_2} + (a_{q2}^* + b_{q2})\sin\overset{0}{\theta_2} = 0\\ &2(B_{21}\overset{0}{r_1} + B_{22}\overset{0}{r_2})\sqrt{\overset{0}{r_2}} + Q_2(\theta)\overset{0}{r_1}{}^{1/2}\overset{0}{r_2} + (a_{q2}^* + b_{q2})\cos\overset{0}{\theta_2} -\\ &-(a_{q2} - b_{q2}^*)\sin\overset{0}{\theta_2} + 2\kappa^*\kappa_2\overset{0}{r_2}{}^{1/2} = 0\end{aligned}$$

2) $p \neq 3q, \quad q \in \mathbf{N}$

$$F \equiv 0, \quad 2(A_{21}r_1^0 + A_{22}r_2^0) + R_2(\theta^0)\sqrt{r_1^0 r_2^0} = 0 \tag{10.4}$$

$$\Phi \equiv 0, \quad 2(B_{21}r_1^0 + B_{22}r_2^0) + Q_2(\theta^0)\sqrt{r_1^0 r_2^0} + 2\kappa^*\kappa_2 r_2^{0^{1/2}} = 0$$

Теорема 11. Каждому простому корню любой из систем амплитудных уравнений отвечает периодическое решение

$$z_s = \mu^{1/3}\sqrt{r_s^0}\exp\{i((3-2s)pt + \theta_s^0) + O(\mu^{1/3})\} + o(\mu^{1/3}), \quad s = 1, 2 \tag{10.5}$$

системы (10.1). В случае (10.3) период равен 2π, а в случае (10.4) период равен 6π.

11. Вынужденные колебания при резонансе второго порядка. Выпишем систему в комплексно-сопряженных переменных $\mathbf{z}$, $\bar{\mathbf{z}}$

$$\begin{aligned}\dot{z}_s &= i(3-2s)\omega_s z_s + [C_{s1}|z_1|^2 + C_{s2}|z_2|^2]z_s + [C_{s1}^*|z_1|^2 + C_{s2}^*|z_2|^2]\bar{z}_{3-s} + \\ &+ C_1^{**}\bar{z}_1^s\bar{z}_2^{3-s} + Z_{s0}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + \mu Z_{s1}(\mu, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}, t), \quad s = 1, 2\end{aligned} \tag{11.1}$$

Здесь $Z_s = O(\|\mathbf{z}\|^3)$, C_{sj}, C_{sj}^*, C_s^{**} – комплексные коэффициенты ($s, j = 1, 2$) и

$$\omega_1 = p + \kappa_1\varepsilon, \quad \omega_2 = p - \kappa_2\varepsilon, \quad p \in \mathbf{N} \quad (\kappa_{1,2} = \text{const}, \varepsilon = \mu^k, k \geq 2/3)$$

При $\mu = 0$ система (11.1) уже приведена к нормальной форме до членов третьего порядка включительно.

Изменим масштаб: $(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \to (\varepsilon_1\mathbf{z}, \varepsilon_1\bar{\mathbf{z}})$, $\varepsilon_1 = \mu^{1/3}$. Далее перейдем к полярным координатам r_s, θ_s ($s = 1, 2$). При $\varepsilon_1 = 0$ полученная система допускает $2\pi/p$-периодическое решение

$$r_s = r_s^0, \quad s = 1, 2; \quad \theta_1 = pt + \theta_1^0, \quad \theta_2 = -pt + \theta_2^0$$

(r_s^0, θ_s^0 -постоянные). Для решения вопроса о периодических решениях при $\varepsilon_1 \neq 0$ необходимо составить систему амплитудных уравнений. Опуская промежуточные выкладки, запишем их в виде системы комплексных уравнений

$$\begin{aligned}&(C_{s1}r_1^0 + C_{s2}r_2^0)\sqrt{r_s^0} + (C_{s1}^*r_1^0 + C_{s2}^*r_2^0)e^{-i\theta^0}\sqrt{r_{3-s}^0} + C_s^{**}\sqrt{r_s^0 r_{3-s}^0}e^{-2i\theta^0} + \\ &+ D_s e^{-i\theta_s^0} + 2i\kappa^*\kappa_s\sqrt{r_s^0} = 0 \\ &D_1 = (a_{p1} + b_{p1}^*) + i(a_{p1}^* - b_{p1}), \quad D_2 = (a_{p2} - b_{p2}^*) + i(a_{p2} - b_{p2}^*) \\ &\theta^0 = \theta_1^0 + \theta_2^0\end{aligned} \tag{11.2}$$

Теорема 12. Каждому простому корню $(r_1^0, r_2^0, \theta_1^0, \theta_2^0)$, $r_s^0 > 0$ ($s = 1, 2$), системы (11.2) отвечает 2π-периодическое решение вида (10.5).

12. О приложениях. Изложенная выше теория цикла находит применение при изучении периодических движений и их семейств в окрестности равновесия и стационарных движений в разнообразных механических системах: консервативных, системах Ляпунова, системах общего вида (тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, тяжелое твердое тело на абсолютно шероховатой плоскости, задача трех тел и т.д.).

Наметим постановки двух прикладных задач.

Геостационарный спутник-корабль за счет сообщения ему постоянного малого ускорения все время "висит" над одной и той же точкой земной поверхности на широте φ [12]. Корпус корабля покоится относительно орбитальной системы координат [13]. Эти стационарные режимы описываются уравнениями поступательно-вращательного движения – системой общего вида двенадцатого порядка. Результаты исследования линеаризованной в окрестности стационарного движения на разных широтах приведены ранее [13]. Оказывается, при $\varphi = 2°$ реализуются 19 резонансов третьего порядка, из них 7 двухчастотные резонансы. Большинство резонансов обусловлено взаимодействием поступательного и вращательного движений. Были приведены резонансные кривые и дана информация о поведении коэффициентов нормальной формы [13].

Тяжелое твердое тело на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости допускает однопараметрическое семейство перманентных вращений следующего вида: тело касается опорной плоскости одной и той же своей точкой и вращается вокруг вертикали, проходящей через эту точку, с постоянной угловой скоростью ω; при этом центр масс тела описывает окружность, параллельную опорной плоскости, с центром на оси вращения [14]. Тело описывается обратимой системой дифференциальных уравнений [15]. Система допускает два первых интеграла – энергии и геометрический [14].

Характеристическое уравнение, отвечающее вращениям [14], имеет два нулевых корня. Один из них обусловлен однопараметричностью ω-семейства перманентных вращений, а другой – наличием геометрического интеграла. Остальные корни определяются из уравнения

$$\kappa_0\mu^4 + \kappa_1\mu^3 + \kappa_2\mu^2 + \kappa_3\mu + \kappa_4 = 0$$

При $\omega = 0$ (равновесие) имеем $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$. При исследовании окрестности равновесия можно использовать обратимость системы.

В случае кельтского камня имеем ([14], с. 122) $\kappa_1 \neq 0$, $\kappa_3 \neq 0$. Однако для тела, в котором $a_1 = a_2$ или/и $\sigma = 0 \ (\mathrm{mod}\pi/2)$, получим $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$ (a_1 и a_2 – главные радиусы кривизны поверхности тела в точке контакта тела и плоскости, σ – угол между направлением главной кривизны, отвечающей радиусу a_1, и одной из главных осей инерции).

При исследовании перманентных вращений ($\omega \neq 0$) используем интегралы и получим систему четвертого порядка, зависящую от постоянной интеграла. Редуцированная система может быть обратимой, как для однородного эллипсоида [16], так и для системы общего вида. В этом случае при $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$ существование цикла устанавливается теоремами 2–5.

Указанные выше прикладные задачи важны и каждая из них требует отдельного рассмотрения.

Автор благодарит В.В. Румянцева и А.Л. Куницына за постоянную поддержку, а Ю.Д. Глухих и Н.В. Тхая за помощь при оформлении рукописи статьи. Автор также благодарен рецензенту за замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (3-01-00052), Минобразования России (ТО2-14.0-1804), программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2000.2003.1) и программы "Университеты России" (УР.04.01.055).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. *Devaney R.L.* Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 89–113.
3. *Тхай В.Н.* Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 46–58.
4. *Sevryuk M.B.* Reversible systems // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1986. V. 1211. 319 с.
5. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова–Пуанкаре в теории периодических движений // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 355–371.
6. *Sweet D.* Periodic solutions for dynamical systems possessing a first integral in the resonant case // Different. Equat. 1973. V. 14. № 1. P. 171–183.
7. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 132 с.
8. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
9. *Куницын А.Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техн. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139.
10. *Гольцер Я.М.* О сильной устойчивости резонансных систем при параметрических возмущениях // ПММ. 1977. Т. 41. № 2. С. 251–261.
11. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
12. *Нита М.М.* Орбитальная устойчивость стационарного спутника Земли на произвольной широте // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1970. № 5. С. 16–33.
13. *Куницын А.Л., Ташимов Л.Т.* Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. Алма-Ата: Гылым, 1990. 195 с.
14. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
15. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 131–146.
16. *Глухих Ю.Д., Тхай В.Н., Шевалье Д.* Об устойчивости перманентных вращений тяжелого однородного эллипсоида на абсолютно шероховатой плоскости. Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2000. Ч. 1. С. 87–104.

Москва
e-mail: tkhai@ccas.ru

Поступила в редакцию
20.I.2003