УДК 531.36

© 2004 г. Н. Б. Григорьева

ОБ ОСЛАБЛЕНИИ УСЛОВИЯ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

Рассматриваются вопросы анализа неустойчивости и асимптотической устойчивости нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной. Предполагается, что правые части системы сходятся при неограниченном возрастании времени равномерно к некоторым функциям фазовых переменных. Доказываются предложения, аналогичные утверждениям второго метода Ляпунова [1–7] для стационарных систем, но с ослаблением условия знакоопределенности производной функции Ляпунова. Это условие заменено условием знакопостоянства производной совместно с некоторым алгебраическим условием, которому должна удовлетворять функция Ляпунова и которое всегда может быть проверено непосредственно.

1. Об условии, которому должны удовлетворять точки ω-предельных множеств. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \upsilon_i(t, x), \quad 0 \le t < \infty, \quad x \in B_{\varepsilon_0} \in \mathbf{R}^n; \quad \upsilon_i(t, x) \in C_{tx}^{0,1}(\mathbf{R}_{\{t\}}^{+} \times B_{\varepsilon_0}) \tag{1.1}$$

где B_{ε_0} – некоторый открытый шар в $\mathbf{R}^n$ с центром в точке $x_0 = 0$ и радиусом ε_0.

Пусть функции $\upsilon_i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (1.1) сходятся при $t \to \infty$ равномерно в области $\bar{B}_{\varepsilon_0}$ к функциям $\upsilon_i^*(x)$:

$$\upsilon_i(t, x) \underset{t \to \infty}{\overset{}{\rightrightarrows}}_{B_{\varepsilon_0}} \upsilon_i^*(x), \quad \upsilon_i^*(x) \in C^m(B_{\varepsilon_0}), \quad m \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.2}$$

Будем говорить, что такие системы (1.1) принадлежат классу $\mathcal{K}$. Для каждой системы (1.1) класса $\mathcal{K}$ в области $(t, x) \subset \mathbf{R}_{\{t\}}^{+} \times B_{\varepsilon_0}$ выполнены [3] условия существования, единственности решений и их непрерывной зависимости от времени t (это свойство далее потребуется неоднократно) и начальных условий.

Лемма 1. Пусть для некоторой траектории $x(t; \hat{t}, \hat{x})$, $0 < \hat{t}$, $\hat{x} \in B_{\varepsilon_0}$ системы (1.1) класса $\mathcal{K}$ определено непустое ω – предельное множество, $\pi(\hat{t}, \hat{x}) \subset B_{\varepsilon_0}$, целиком принадлежащее некоторому множеству уровня некоторой функции $F(x) \in C^1(B_{\varepsilon_0})$.

Тогда

$$\pi(\hat{t}, \hat{x}) \subset \left\{ x\colon \lim_{t \to \infty} \mathcal{D}[F]\upsilon(t, x) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}_*^{(1)}[F](x) = 0 \right\}$$

Доказательство. В силу сходимости (1.2) и условия $F(x) \in C^1(B_{\varepsilon_0})$ функция

$$\lim_{t \to \infty} dF(x)/dt|_{(t, x)} = \mathcal{D}_*^{(1)}F(x)$$

определена в области B_{ε_0} корректно.

Покажем, что при условиях леммы 1 множество $\pi(\hat{t}, \hat{x})$ принадлежит нулевому уровню этой функции.

Поскольку предельное множество всегда замкнуто, а шар B_{ε_0} – открытое множество, то для каждого числа ε_0 найдется число $\tilde{\varepsilon}_0 < \varepsilon_0$, такое, что

$$\pi(\hat{t}, \hat{x}) \subset B_{\tilde{\varepsilon}_0} \subset \bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0} \subset B_{\varepsilon_0}$$

Существует число $M > 0$, такое, что

$$|v_i(t, x)| < M, \quad \forall (t, x)\colon t \ge 0, \quad x \in B_{\tilde{\varepsilon}_0}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.3}$$

Действительно, допустим обратное, т.е.

$$\exists i^*\colon \exists t_n \ge 0, \quad \exists x_n \in B_{\tilde{\varepsilon}_0}\colon |v_{i^*}(t_n, x_n)| > N, \forall N \tag{1.4}$$

Из последовательности $\{x_n\}$ в компакте $\bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0}$ всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, так что без ограничения общности можно считать $\{x_n\} \to x^{(0)}$, $x^{(0)} \in \bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0}$.

Для последовательности $\{t_n\}$ возможны два варианта:

1) последовательность $\{t_n\}$ ограничена сверху числом $T > 0$: $t_n < T$, $\forall n$;

2) из последовательности $\{t_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\tilde{t}_m\} \to \infty$, $\tilde{t}_{k+1} > \tilde{t}_k$.

В первом случае предположение (1.4) противоречит тому, что функция $v_{i^*}(t, x)$, будучи по условию непрерывной в компакте $\{t, x\colon 0 \le t \le T, x \in \bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0}\}$, является в нем равномерно ограниченной. Следовательно, предположение (1.4) может иметь место только в случае, если реализуется второй вариант.

Поскольку $x^{(0)} \in \bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0}$, из условия равномерной сходимости $v_{i^*}(t, x) \underset{t \to \infty}{\rightrightarrows} v_{i^*}^*(x)$ в области B_{ε_0} имеем

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon\ \exists \tau(\varepsilon, x^{(0)}), \delta(\varepsilon, x^{(0)})\colon \\ |v_{i^*}(t, x) - v_{i^*}^*(x^{(0)})| < \varepsilon\ \forall x : |x - x^{(0)}| < \delta,\ t > \tau(\varepsilon, x^{(0)}) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Зададим некоторое $\varepsilon = \hat{\varepsilon} > 0$.

Из условия сходимости $\{x_n\}_{n \to \infty} \to x^{(0)}$ в случае, когда имеет место второй вариант, получим

$$\exists N_0\colon \forall m > N_0\colon |\tilde{x}_m - x^{(0)}| < \delta(\hat{\varepsilon}, x^{(0)}), \quad \tilde{t}_m > \tau(\hat{\varepsilon}, x^{(0)}) \tag{1.6}$$

где $\{\tilde{x}_m\}$ – подпоследовательность $\{x_n\}$, соответствующая подпоследовательности $\{\tilde{t}_m\}$ последовательности $\{t_n\}$. Тогда из условия (1.5) с $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ при учете условия (1.6) и ограниченности в компакте $\bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0}$ функции $v_{i^*}^* \in C(B_{\varepsilon_0})$ получаем противоречие с предположением (1.4), доказывающее справедливость оценки (1.3).

Допустим теперь, что лемма 1 неверна:

$$\exists x^* \in \pi(\hat{t}, \hat{x}); \quad |x^*| < \tilde{\varepsilon}_0\colon \mathcal{D}_*^{(1)} F(x^*) \ne 0 \tag{1.7}$$

Пусть $\mathcal{D}_*^{(1)} F(x^*) = 2\alpha$; без ограничения общности считаем $\alpha > 0$.

Из условия принадлежности системы (1.1) классу $\mathcal{K}$ при учете непрерывности функции $F(x)$ в области B_{ε_0} непосредственно следует, что сходимость функции

$$\dot{F}(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x_k} v_k(t, x)$$

при $t \to +\infty$ к функции $\mathcal{D}_*^{(1)}[F(x)](x)$ является равномерной в области $B_{\tilde{\varepsilon}_0}$. Поэтому

$$\begin{gathered}\exists T_0 = T_0(x^*, \alpha) > 0, \quad \delta_0 = \delta_0(x^*, \alpha), \quad |x^*| + \delta_0 < \tilde{\varepsilon}_0: \\ \left|\dot{F}(t, x) - \mathcal{D}_*^{(1)} F(x^*)\right| < \alpha \ \forall x : |x - x^*| < \delta_0, \quad \forall t > T_0\end{gathered} \tag{1.8}$$

Отсюда имеем

$$F(t, x) > \alpha \ \forall x: |x - x^*| < \delta_0, \quad \forall t > T_0 \tag{1.9}$$

По условию x^* – предельная точка для траектории $x(t;\ \hat{t},\ \hat{x})$, поэтому существует возрастающая последовательность $\{t_n\} \to \infty : \{x(t_n;\ \hat{t},\ \hat{x})\} \to x^*$. Таким образом, для чисел δ_0 и T_0 из соотношения (1.9) получаем, что

$$\exists N_1 = N_1(\delta_0, T_0): \left|x^* - x(t_n; \hat{t}, \hat{x})\right| < \delta_0/2; \quad t_n > T_0, \quad \forall n > N_1 \tag{1.10}$$

Далее предположим, что для некоторого числа $n_0 > N_1$

$$\left|x^* - x(t_{n_0} + t; \hat{t}, \hat{x})\right| < (3/4)\delta_0, \quad \forall t > 0 \tag{1.11}$$

Тогда вдоль траектории $x(t;\ \hat{t},\ \hat{x})$ (траектория по условию определена на всем промежутке $\mathbf{R}^+_{\{t\}}$), начиная с момента t_{n_0}, справедлива оценка (1.9). Поэтому имеем

$$F(x)\big|_{x = x(t_{n_0} + t;\, \hat{t},\, \hat{x})} > F(x)\big|_{x = x(t_{n_0} + t;\, \hat{t},\, \hat{x})} + \alpha t, \quad \forall t > 0$$

Но это совместно с предположением (1.11), а также условием $|x^*| + \delta_0 < \tilde{\varepsilon}_0$ в предложении (1.8) противоречит факту ограниченности в компакте $\bar{B}_{\varepsilon_0}$ функции $F(x)$, непрерывной в $\bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0} \subset \bar{B}_{\varepsilon_0}$. Поэтому предположение (1.11) неверно. Таким образом, при всех $n > N_1$ существует конечное значение $\tau_n > 0$, такое, что траектория $x(t;\ \hat{t},\ \hat{x})$, выходя в момент $t = t_n$ из точки $x(t_n;\ \hat{t},\ \hat{x})$, пересекает в момент $t_n + \tau_n$ сферу $|x - x^*| =$ $= (3/4)\delta_0$ первый раз:

$$\begin{gathered}\exists \tau_n < \infty \ \left|x(t_n + \tau_n; \hat{t}, \hat{x}) - x^*\right| = (3/4)\delta_0, \quad \forall n > N_1; \\ \left|x(t_n + t; \hat{t}, \hat{x}) - x^*\right| < (3/4)\delta_0: \ 0 \le t < \tau_n\end{gathered} \tag{1.12}$$

Далее при учете включения $\{x: |x - x^*| \le (3/4)\delta_0\} \subset B_{\tilde{\varepsilon}_0}$ (см. соответствующее условие в предложении (1.8)) в силу оценки (1.3) получаем, что для любой точки x сферы $|x - x^*| = \delta_0/2$ и любого времени $t > 0$, за которое траектория системы (1.1), выходящая в момент t из точки x, сможет достичь сферы $|x - x^*| = (3/4)\delta_0$, не менее некоторой величины $\tau_0(x^*) = (1/4)\delta_0 M\sqrt{n} > 0$.

В силу условий (1.10) и (1.12) отсюда следует

$$\tau_n \ge \tau_0, \quad \forall n > N_1 \tag{1.13}$$

Далее из условия $x^* \in \pi(\hat{t},\ \hat{x}) \subset B_{\tilde{\varepsilon}_0}$, непрерывности функции $F(x)$ в области $B_{\tilde{\varepsilon}_0}$ и сходимости $\{x(t_n;\ \hat{t},\ \hat{x})\}_{n \to \infty} \to x^*$ вытекает, что

$$\exists N_2: \left|F(x(t_n; \hat{t}, \hat{x})) - F(x^*)\right| < \alpha\tau_0/2, \quad \forall n > N_2 \tag{1.14}$$

Числа α и τ_0 определены выше.

В результате, исходя из условий (1.10), (1.2), (1.9), (1.13) и (1.14), получаем

$$F(x(t_n+\tau_n;\hat{t},\hat{x})) = F(x(t_n;\hat{t},\hat{x}))+\int\limits_{t_n}^{t_n+\tau_n}\dot{F}(\tau,x(\tau;\hat{t},\hat{x}))d\tau >$$
$$> F(x(t_n;\hat{t},\hat{x}))+\alpha\tau_0 > F(x^*)+\alpha\tau_0/2,\quad \forall n>N_0 = \max\{N_1,N_2\} \tag{1.15}$$

С другой стороны, поскольку последовательность $\{t_n\}\to\infty$, а для любого $n>N_0$ число $\tau_n>\tau_0>0$ конечно, из последовательности $\{t_n+\tau_n\}$ можно выбрать монотонно возрастающую подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности:

$$\exists n(m)\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}\colon \tilde{t}_m = t_{n(m)}+\tau_{n(m)}\colon \tilde{t}_{k+1}>\tilde{t}_k;\quad \{\tilde{t}_m\}\to\infty$$

В свою очередь все точки $x(t_{n(m)}+\tau_{n(m)};\hat{t},\hat{x}) = x(\tilde{t}_m;\hat{t},\hat{x})$ по построению лежат на сфере $|x-x^*| = (3/4)\delta_0$, поэтому из последовательности $\{x(\tilde{t}_m;\hat{t},\hat{x})\}$ может быть выбрана подпоследовательность $\{x(\tilde{\tilde{t}}_s;\hat{t},\hat{x})\}$, сходящаяся к некоторой точке $x^{**}: |x^*-x^{**}| = (3/4)\delta_0$. Поскольку для каждого s $\{x(\tilde{\tilde{t}}_s;\hat{t},\hat{x})\}$ – точка траектории $\{x(t;\hat{t},\hat{x})\}$ и при учете того, что последовательность $\{\tilde{\tilde{t}}_s\}\to\infty$ как подпоследовательность последовательности $\{\tilde{t}_m\}$ стремится к $+\infty$, имеем

$$x^{**}\in\pi(\hat{t},\hat{x})$$

В силу условия леммы 1 заключаем поэтому, что

$$F(x^*) = F(x^{**}) \tag{1.16}$$

В то же время в силу непрерывности функции F в области $B_{\tilde{\varepsilon}_0}$, условия $|x^*|+\delta_0<\tilde{\varepsilon}_0$ в соотношении (1.8), первого условия (1.12) и оценки (1.15) заключаем, что для точки x^{**} как частичного предела последовательности $\{x(t_n+\tau_n;\hat{t},\hat{x})\}$ справедлива оценка

$$F(x^{**})\ge F(x^*)+\alpha\tau_0/2,\quad \alpha\tau_0/2>0$$

Однако это противоречит равенству (1.16).

Таким образом, предположение (1.7) неверно, что и доказывает лемму 1.

Пусть теперь при условиях леммы 1 $F(x)$ – функция класса C^2 в области B_{ε_0}. Тогда, если $m\ge 1$, то $\mathcal{D}_*^{(1)}[F](x)\in C^1(B_{\varepsilon_0})$. Таким образом, лемму 1 в этом случае можно использовать последовательно два раза: применительно к функции $F(x)$ и применительно к функции $\mathcal{D}_*^{(1)}[F](x)$.

В случае системы (1.1) класса $\mathcal{K}$ и функции $F(x)\in C^{m+1}(B_{\varepsilon_0})$ лемма 1, очевидно, может быть последовательно использована $(m+1)$ раз. Это непосредственно вытекает из формулировки леммы 1 и того, что в этом случае из условия

$$\Phi(x)\in C^p(B_{\varepsilon_0}),\quad \forall p: 2\le p\le m+1$$

следует

$$\mathcal{D}_*^{(1)}[\Phi](x)\in C^{p-1}(B_{\varepsilon_0})$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть при условиях леммы 1 $F(x)$ – функция класса $C^{m+1}(B_{\varepsilon_0})$. Тогда

$$\pi(\hat{t}, \hat{x}) \subset \{x : \mathcal{D}_*^{(1)}[F](x) = 0, \mathcal{D}_*^{(2)}[F](x) = 0, \ldots, \mathcal{D}_*^{(m+1)}[F](x) = 0\}$$

где

$$\mathcal{D}_*^{(p+1)}[F](x) = \mathcal{D}_*^{(1)}[\mathcal{D}_*^{(p)}[F]](x)$$

а функция $\mathcal{D}_*^{(1)}[F](x)$ определена в формулировке леммы 1.

Заметим теперь, что любая динамическая система $\dot{x} = \omega(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ с автономным полем скоростей класса $C^m(B_{\varepsilon_0})$ заведомо является системой класса $\mathcal{K}$. Поэтому, очевидно, все изложенное выше автоматически переносится на автономный случай. Следствие 1 леммы 1 переходит в

Следствие 2. Пусть для некоторой траектории $g^t(\hat{x})$ автономной системы (1.1), задаваемой полем класса $C^m(B_{\varepsilon_0})$, существует ω-предельное множество $\pi(\hat{x})$, все точки которого принадлежат открытому шару B_{ε_0} и некоторому множеству уровня функции $F(x) \in C^{m+1}(B_{\varepsilon_0})$. Тогда

$$\pi(\hat{x}) \subset \{x\colon \mathcal{D}^k F(x) = 0,\ k = 1, \ldots, m+1\}$$

где $\mathcal{D}^p F(x)$ – p-я производная Ли от функции $F(x)$ в силу уравнений рассматриваемой системы (1.1). Этот элементарный факт может быть обоснован, очевидно, и без использования леммы 1.

Лемма 2. Пусть J – инвариантное множество системы (1.1), причем $\bar{J} \in \mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0}$, целиком принадлежащее некоторому множеству уровня функции $F(t, x) \in C^{m+1}(\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0})$. Тогда множество $\bar{J}$ целиком принадлежит совместному нулевому множеству уровня функций $\mathcal{D}^k F(t, x)$ $(k = 1, \ldots, m+1)$, $J \in \{(t, x)\colon \mathcal{D}^k F(t, x) = 0, k = 1, 2, \ldots, m+1\}$, где $\mathcal{D}^p F(t, x)$ – полная p-я производная от функции $F(t, x)$ в силу уравнений (1.1).

Доказательство. В силу условия $\bar{J} \in \mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0}$ имеем

$$\exists \tilde{\varepsilon}_0 < \varepsilon_0\colon \bar{J} \subset (\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\tilde{\varepsilon}_0}) \subset (\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times \bar{B}_{\varepsilon_0}) \subset (\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0})$$

В силу условий

$$\omega_i \in C^m(\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0}), \quad F(t, x) \in C^{m+1}(\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0})$$

все функции $\mathcal{D}^p F(t, x)$ $(p = 1, \ldots, m+1)$ в области $\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0}$ определены корректно. Покажем, что множество $\bar{J}$ принадлежит их совместному нулевому уровню.

Пусть $(\hat{t}, \hat{x})$ – произвольная точка множества J. Рассмотрим траекторию $x(t; \hat{t}, \hat{x})$ системы (1.17) и последовательность $\{t_k\}_{k \to \infty} \to \hat{t}\colon \forall k\ \hat{t} < t_{k+1} < t_k$.

По условию точка $(t, x(t; \hat{t}, \hat{x}))$, $\forall t > \hat{t}$ принадлежит множеству J, поэтому

$$F(t_k, x(t_k; \hat{t}, \hat{x})) = F(\hat{t}, \hat{x}), \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда при учете соотношения

$$F(t_k, x(t_k; \hat{t}, \hat{x})) = F(\hat{t}, \hat{x}) + \int\limits_{\hat{t}}^{t_k} \dot{F}(\tau, x(\tau; \hat{t}, \hat{x}))d\tau$$

и того, что вследствие условия $\bar{J} \subset (\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0})$ вся полутраектория $(\tau, x(\tau, \hat{t}, \hat{x}))$, $\tau \geq \hat{t}$ лежит в области непрерывности функции $\dot{F}(t, x)$, получаем

$$\exists t_k^{(1)}: \hat{t} < t_k^{(1)} < t_k: \dot{F}(t, x)\big|_{t = (t_k^{(1)};\ x = x(t_k^{(1)};\ \hat{t}, \hat{x}))} = 0$$

Далее для непрерывных в области $\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0}$ функций $\upsilon_i(t, x)$ заключаем, что в компакте $\{(t, x): \hat{t} \leq t \leq t_1, x \in \bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0}\}$ они ограничены:

$$\exists M_0: |\upsilon_i(t, x)| < M_0, \quad \forall t, \quad \hat{t} \leq t \leq t_1, \quad \forall x \in \bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Отсюда при учете условий

$$\hat{t} < t_k^{(1)} < t_k \leq t_1 \quad \text{и} \quad (t_k^{(1)}, x(t_k^{(1)}; \hat{t}, \hat{x})) \in J \in \bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0} \times \bar{\mathbf{R}}^+_{\{t\}}$$

получаем

$$\left|\hat{x} - x(t_k^{(1)}; \hat{t}, \hat{x})\right| < \sqrt{n} M_0 (t_k^{(1)} - \hat{t})$$

Последнее неравенство совместно с условием $\hat{t} < t_{(k)}^{(1)} < t_k$ и условием $\{t_k\} \to \hat{t}$, влечет сходимость $\{t_m^{(1)}\} \to \hat{t}$ и $x(t_m^{(1)}; \hat{t}, \hat{x}) \to \hat{x}$. Поэтому при учете вида функции $\dot{F}$ в точке $(\hat{t}, \hat{x}) \in \bar{B}_{\tilde{\varepsilon}_0}$ получаем

$$(\dot{F}(\hat{t}, \hat{x}) = 0) \Rightarrow \dot{F}(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \bar{J}$$

Точно так же (дословным повторением предыдущих рассуждений с заменой $F(t, x) \to \dot{F}(t, x)$) заключаем, что $\mathcal{D}^{(2)}F(t, x) = 0$, $\forall (t, x) \in \bar{J}$, и.т.д., всего $(m + 1)$ раз. Лемма доказана.

Очевидно, условия леммы 2 можно ослабить, но здесь это несущественно.

В автономном случае любое ω-предельное множество автоматически инвариантно. В этом случае из леммы 2 сразу вытекает предложение, сформулированное в следствии 2.

В неавтономном случае, в отличие от автономного, предельное множество уже не является, вообще говоря, инвариантным. Поэтому здесь из леммы 2 не следует каких-либо утверждений, касающихся предельного множества.

Последнее верно также и в случае систем (1.1) класса $\mathcal{K}$: лемма 2 не находится ни в какой причинно-следственной связи с леммой 1. Однако случай систем класса $\mathcal{K}$ выделяется из общего случая тем, что здесь тем не менее оказывается возможным, как это показано выше, определить аналитически уравнения, которым должны удовлетворять точки соответствующих предельных множеств. Отметим, что функции $\mathcal{D}^{(k)}[F](x)$ в лемме 1 (и следствии 1) – не что иное, как k-е производные Ли от функции $F(x)$ в силу уравнений автономной системы $\dot{x}_i = \upsilon_i^*(x)$, где $\upsilon_i^*(x)$ – те функции, к которым сходятся при $t \to \infty$ функции $\upsilon_i(t, x)$, определяющие рассматриваемую в лемме 1 неавтономную систему (1.1).

В связи с этим можно сделать следующее замечание. Пусть $C_{tx}^{0,1}$ – функции $\upsilon_i(t, x)$, задающие систему (1.1), имеющую единственное положение равновесия $x_0 = 0$, сходятся при $t \to +\infty$ равномерно в $\mathbf{R}^n$ к некоторым аналитическим в $\mathbf{R}^n$ функциям $\upsilon_i^*(x)$. Если при этом у системы $\dot{x}_i = \upsilon_i^*(x)$ не существует отличных от $x_0 = 0$ инвариантных множеств, лежащих целиком на уровнях некоторой аналитической функции $F(x)$, то у системы (1.1) не существует ни одной траектории, ω-предельное множество для которой было бы отлично от $x_0 = 0$ и принадлежало бы некоторому множеству уровня функции $F(x)$.

Действительно, предположив обратное, с помощью формулы Ли при учете следствия 1 придем к противоречию.

Заметим также, что все предложения разд.1 сохраняют силу также и в случае, когда предельное (или инвариантное) множество состоит только из одной точки.

2. Об ослаблении условия знакоопределенности производной в первой теореме о неустойчивости и в теореме об асимптотической устойчивости Ляпунова, а также в теоремах, аналогичных теоремам Н.Н. Красовского и Е.А. Барбашина. С помощью леммы 1 можно ослабить условие знакоопределенности производной функции V в некоторых теоремах второго метода Ляпунова.

Везде далее будут рассматриваться (или использоваться) свойства устойчивости, неустойчивости, равномерной устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости, понимаемые в обычном смысле, т.е. в соответствии с определениями Ляпунова [1]. Напомним кратко эти определения.

Нулевое положение равновесия $x_0 = 0$ системы (1.1) называется устойчивым, если для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ и для каждого момента $t_0 \ge 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, такое, что, если $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$, то $|x(t; t_0, \tilde{x}_0)| < \varepsilon$, $\forall t \ge t_0$. В случае, когда число δ не зависит от момента t_0, а зависит только от значения ε: $\delta = \delta(\varepsilon)$, нулевое равновесие системы (1.1) называется равномерно устойчивым, а в случае, когда дополнительно к этому существует некоторая окрестность нуля $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$, такая, что

$$\lim_{t \to +\infty} \left|x(t;\, t_0, x^0)\right| \to 0, \ \forall x^{(0)} \in \mathcal{D}, \quad \forall t_0 > 0$$

решение $x_0 = 0$ называется равномерно асимптотически устойчивым.

В свою очередь, если для системы (1.1) с нулевым положением равновесия $x_0 = 0$ найдется пара чисел $\varepsilon > 0$, $t_0 \ge 0$, такая, что для каждого $\delta > 0$ найдется точка $x^{(0)}$: $|x^{(0)}| < \delta$, и число $t > t_0$, такие, что $|x(t, t_0, x^{(0)})| > \varepsilon$, то равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво.

2.1. Об ослаблении условия знакоопределенности производной в первой теореме о неустойчивости Ляпунова.

Предложение 1. Пусть $x_0 = 0$ – положение равновесия системы (1.1), правые части которой удовлетворяют условиям

$$\upsilon_i(t, x) \in C_{tx}^{0,1}(\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times \bar{B}_{\varepsilon_0}), \quad \upsilon_i(t, x) \underset{t \to +\infty \ \bar{B}_{\varepsilon_0}}{\rightrightarrows} \upsilon_i^*(x), \quad \upsilon_i^*(x) \in C^m(\bar{B}_{\varepsilon_0}), \quad m \ge 0$$

Пусть для системы (1.1) существуют число $t_0 > 0$ и функция $V(t, x)$

$$V(t, x) \in C_{tx}^{1,1}(\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0}), \quad V(t, 0) = 0, \quad \forall t$$

$$V(t, x) \underset{t \to +\infty \ B_{\varepsilon_0}}{\rightrightarrows} V^*(x), \quad V^*(x) \in C^{m+1}(B_{\varepsilon_0})$$

такие, что

1) $\dot{V}(t, x) \ge 0$, $\forall t \ge t_0$, $x \in B_{\varepsilon_0}$;

2) $\forall \delta\, \exists x_{(\delta)}$, $|x_{(\delta)}| < \delta$: $V(t_0, x_{(\delta)}) > 0$

3) алгебраическая система

$$\{V^*(x) \in c, \mathcal{D}_*^{(p)}[V^*](x) = 0, p = 1, 2, \ldots, m+1\} \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{D}_*^{(k+1)}[\cdot] = \mathcal{D}_*^{(1)}[\mathcal{D}_*^{k}[\cdot]]$$

не имеет в некоторой окрестности нуля в $\mathbf{R}^n$ решений ни при каком $c > 0$.

Тогда равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что система (2.1) при любом $c > 0$ не имеет решений в области B_{ε_0}.

Допустим, что равновесие $x_0 = 0$ устойчиво. Тогда, во-первых, существует $\delta > 0$ такое, что каждая из траекторий $x(t;\, t_0,\, \hat{x})$, $\hat{x} \in B_{\tilde{\delta}}(0)$ определена на всей оси времени $\mathbf{R}^+_{\{t\}}$, и во-вторых,

$$\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon, t_0) < \tilde{\delta} : \Rightarrow |x(t;\, t_0, \hat{x})| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \tilde{x} \in B_\delta \tag{2.2}$$

Зафиксируем теперь некоторое число $\hat{\delta} > 0$, $\hat{\delta} < \delta(\varepsilon_0/2, t_0)$, ($\delta(\varepsilon_0/2, t_0) < \tilde{\delta}$). Пусть $x_{(\hat{\delta})}$ – точка из условия 2, соответствующая этому числу $\hat{\delta}$.

Тогда траектория системы (1.1) $x(t;\, t_0,\, x_{(\hat{\delta})})$ может быть продолжена на всю ось времени $\mathbf{R}^+_{\{t\}}$ и

$$x(t;\, t_0, x_{(\hat{\delta})}) \in B_{\varepsilon_0/2}, \quad \forall t \geq t_0 \tag{2.3}$$

Следовательно, для этой траектории определено непустое предельное множество

$$\pi(t_0;\, x_{(\hat{\delta})}) \neq \varnothing, \quad \pi(t_0;\, x_{(\hat{\delta})}) \subset \bar{B}_{\varepsilon_0/2} \subset B_{\varepsilon_0} \tag{2.4}$$

Возможны два варианта: множество (2.4) состоит из одной точки $x = x_1$ (вариант 1) и более чем из одной точки (вариант 2).

Рассмотрим вариант 2.

Пусть

$$x_1 \in \pi(t_0;\, x_{(\hat{\delta})}), \quad x_2 \in \pi(t_0;\, x_{(\hat{\delta})}), \quad x_1 \neq x_2$$

Имеем

$$\exists \{t_k^{(l)}\} \underset{k \to \infty}{\to} \infty, \quad \{x(t_k^{(l)};\, t_0, x_{(\hat{\delta})})\} \underset{k \to \infty}{\to} x_l; \quad l = 1, 2 \tag{2.5}$$

Допустим теперь, что

$$V^*(x_1) \neq V^*(x_2), \quad V^*(x_1) > V^*(x_2) \tag{2.6}$$

Из условия равномерной сходимости $V(t, x) \underset{t \to \infty}{\rightrightarrows} V^*(x)$ в области B_{ε_0} и условия

$$x_1 \in \pi(t_0;\, x_{(\hat{\delta})}) \subset B_{\varepsilon_0}, \quad x_2 \in \pi(t_0;\, x_{(\hat{\delta})}) \subset B_{\varepsilon_0}$$

при учете сходимости (2.5) имеем

$$\{V(t_k^{(l)};\, x(t_k^{(l)};\, t_0, x_{(\hat{\delta})})\} \underset{k \to \infty}{\to} V^*(x_l), \quad l = 1, 2 \tag{2.7}$$

Из условия 1 при учете условия (2.3) следует, что, начиная с момента $t = t_0$, функция $V(t, x)$ вдоль траектории $x(t;\, t_0,\, x_{(\hat{\delta})})$ – неубывающая:

$$V(\tau_2, x(\tau_2;\, t_0, x_{(\hat{\delta})})) \ge V(\tau_1, x(\tau_1;\, t_0, x_{(\hat{\delta})})) \ge V(t_0, x_{(\hat{\delta})}), \quad \forall \tau_2, \tau_1 : \tau_2 \ge \tau_1 \ge t_0 \tag{2.8}$$

В то же время из последовательностей $\{ t_k^{(l)} \} \to \infty$ всегда можно выбрать подпоследовательности $\{ \tilde{t}_m^{(l)} \} \to \infty$ $(l = 1, 2)$ такие, что

$$t_0^m < \tilde{t}_p^{(1)} < \tilde{t}_p^{(2)} < \tilde{t}_{p+1}^{(1)}, \quad \forall p = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

Отсюда и исходя из неравенства (2.8) имеем

$$V(\tilde{t}_p^{(2)};\, x(\tilde{t}_p^{(2)};\, t_0, x_{(\hat{\delta})})) \ge V(\tilde{t}_p^{(1)};\, x(\tilde{t}_p^{(1)};\, t_0, x_{(\hat{\delta})})), \quad \forall p = 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

При учете сходимостей (2.7) получаем

$$\left\{ V(\tilde{t}_p^{(l)});\, x(\tilde{t}_p^{(l)};\, t_0, x_{(\hat{\delta})}) \right\}_{p \to \infty} \to V^*(x_l), \quad l = 1, 2 \tag{2.11}$$

Таким образом, из условий (2.10) и (2.11) вытекает неравенство $V^*(x_2) \ge V^*(x_1)$, что противоречит допущению (2.6). Аналогичным образом, очевидно, придем к противоречию, допустив $V^*(x_1) > V^*(x_2)$.

В результате получаем

$$V^*(x_1) = V^*(x_2), \quad \forall x_1 \in \pi(t_0, x_{(\hat{\delta})}), \quad \forall x_2 \in \pi(t_0, x_{(\hat{\delta})}) \tag{2.12}$$

Имеем далее при учете неравенства (2.8), что

$$V(t;\, x(t;\, t_0, x_{(\hat{\delta})})) \ge V(t_0, x_{(\hat{\delta})}) \overset{\text{def}}{=} C_{(t_0, x_{(\hat{\delta})})}, \quad \forall t > t_0$$

причем в силу условия 2 число $C_{(t_0, x_{(\hat{\delta})})}$ положительно. Поэтому вследствие сходимостей (2.5) и (2.7) получим

$$V^*(x_1) = V^*(x_2) = C_{(t_0, x_{(\hat{\delta})})} \ge C_{(t_0, x_{(\hat{\delta})})} > 0, \quad \forall x_1 \in \pi(t_0, x_{(\hat{\delta})}), \quad \forall x_2 \in \pi(t_0, x_{(\hat{\delta})}) \tag{2.13}$$

В свою очередь в случае варианта 1, условие (2.12) также всегда выполняется (автоматически), а при учете неравенства (2.8), условия 2 и сходимости

$$V(t_k;\, x(t_k;\, t_0, x_{(\hat{\delta})}))\underset{k \to \infty}{\to} V^*(x_1)$$

получаем

$$V^*(x_1) = C^*_{(t_0, x_{(\hat{\delta})})} \ge C_{(t_0, x_{(\hat{\delta})})} > 0$$

Таким образом, условие (2.13), или включение

$$\pi(t_k, x_{(\hat{\delta})}) \subset \{x\colon V^*(x) = C^*_{(t_0, x_{(\hat{\delta})})} > 0\}$$

выполнено для множества (2.4) независимо от того, какой из двух возможных вариантов – 1 или 2 – имеет место. Но тогда для траектории $x(t;\, t_0,\, x_{(\hat{\delta})})$ и ее ω-предельного множества (2.13) выполнены все условия следствия 1 леммы 1 для значений $\hat{t} = t_0$,

$\hat{x} = x_{(\hat{\delta})}$, $F(x) = V^*(x)$. Следовательно, все точки множества $\pi(t_0, x_{(\hat{\delta})})$ удовлетворяют алгебраической системе (2.1) со значением $C = C^*_{(t_0, x_{(\hat{\delta})})} > 0$. Однако $\pi(t_0, x_{(\hat{\delta})}) \subset B_{\varepsilon_0}$ и $\pi(t_0, x_{(\hat{\delta})}) \neq \varnothing$, и поэтому вследствие условия 3 такое множество не может удовлетворять этой системе. Таким образом, предположение (2.2) неверно и равновесие x_0 неустойчиво, что и требовалось доказать.

Предложение 1 соответствует первой теореме Ляпунова о неустойчивости. В классе $\mathcal{K}$ систем (1.1) оно является некоторым дополнением к этой теореме.

Однако теорема Ляпунова носит универсальный характер и применима в общем случае произвольных систем (1.1). В отношении предложения 1 это, конечно, уже не так, в том смысле, что в общем случае произвольных систем (1.1) предложение, аналогичное предложению 1, сформулировано быть не может.

Примеры. 1°. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_3 + f_1(x, t)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 - 2x_1 + f_2(x, t)$$

$$\dot{x}_3 = -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + f_3(x, t)$$

где функции $f_i(x, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ сходятся равномерно при $t \to +\infty$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ к функциям $f_i^*(x) \in C^1(0)$, и функцию $V = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)/2$.

Имеем

$$\dot{V} = (x_1 + 2x_3 - x_2)^2 + x_1 f_1 + x_2 f_2 - x_3 f_3$$

Если

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 - x_3 f_3 = (x_1 + 2x_3 - x_2)^2 g(x, t), \quad g(0, t) = 0, \quad g(x, t) \in \mathrm{C}(R_{\{t\}} \times O)$$

то $\dot{V} \geq 0$. Условие 3 предложения 1 в этом случае также выполнено, поскольку якобиан преобразования $x \to v^*(x)$ определен в рассматриваемой окрестности точки $x = 0$ и отличен от нуля. Поэтому равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво.

2°. Рассмотрим систему, относящуюся к "критическим" случаям:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_3 + f_1(x, t)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + (x_1 - x_2)^2 f_2(x, t)$$

$$\dot{x}_3 = 2x_2 + (x_1 - x_2)^2$$

Здесь

$$f_i(0, t) = 0, \quad f_i(x, t) \underset{0}{\rightrightarrows} f_i^*(x), \quad f_i^*(x) \in C^1(O), \quad i = 1, 2$$

$$f_1(x, t) = o(x^2), \quad f_2(x, t) \in C(R_{\{t\}} \times o)$$

Для функции $V = x_2 + x_3$ имеем $\dot{V} = (x_1 - x_2)^2[1 + f_2(x, t)]$, поэтому в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$ получим $\dot{V} \geq 0$. Условие 3 здесь также выполнено, так что из предложения 1 вытекает, что равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво.

Заметим, что требования дифференцируемости функций $f^*(x)$, равно как и равномерной непрерывности в точке $x = 0$ функций $g(x, t)$ и $f_2(x, t)$, в первом и втором из приведенных выше примеров соответственно являются существенными.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Автономный случай. В автономном случае предложение 1 принимает следующий вид.

Предложение 1а. Пусть $x_0 = 0$ – положение равновесия системы

$$\dot{x} = \omega_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad \omega_i(x) \in C^m(B_{\varepsilon_0}) \tag{2.14}$$

где $B_{\varepsilon_0} \subset \mathbf{R}^n$ – открытый шар с центром в $x_0 = 0$ и радиусом ε_0. Пусть для системы (2.14) существует функция $V(x) \in C^{m+1}(B_{\varepsilon_0})$, $m \geq 0$, $V(0) = 0$ такая, что

1) $\dot{V}(x) \geq 0, \forall x \in B_{\varepsilon_0}$;

2) $\forall\delta\exists x_{(\delta)}, |x_{(\delta)}| < \delta$: $V(x_{(\delta)}) > 0$;

3) алгебраическая система

$$\{V(x) = c, \mathfrak{D}^{(p)}(V)(x) = 0, p = 1, 2, \ldots, m+1\} \tag{2.15}$$

где $\mathfrak{D}^k(V)(x)$ – k-я производная Ли от функции V в силу уравнений системы (2.14), не имеет в некоторой окрестности нуля в $\mathbf{R}^n$ решений ни при каком $c > 0$.

Тогда равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво.

Предложение 1а, являясь формальным следствием предложения 1, может, естественно, быть доказано и непосредственно, без ссылки на последнее, так же как следствие 2 леммы 1 может быть доказано непосредственно, без использования этой леммы (см. разд.1).

Действительно, предположение об устойчивости влечет вывод о существовании ω-предельных множеств $\pi(x_{(\delta)}) \neq \varnothing$, $\pi(x_{(\delta)}) \subset B_{\varepsilon_0}$ (где $x_{(\delta)}$ – точки из условия 2), которые вследствие условия 1 целиком принадлежат некоторым множествам уровня $\{V(x) = c > 0\}$ функции V. Но тогда с помощью следствия 2 леммы 1 (см. разд.1) получаем противоречие с условием 3.

Вопрос об ослаблении условия знакоопределенности производной в первой теореме о неустойчивости и в теореме об асимптотической устойчивости А.М. Ляпунова был для автономного и периодического случаев изучен ранее Н.Н. Красовским [5]. Предложение 1а – следствие предложения, аналогичного теореме Н.Н. Красовского [5, 7] о неустойчивости, и леммы 2 и является, таким образом, некоторым развитием этой теоремы Н.Н. Красовского.

Заметим также, что предложение 1а отличается от формулировки первой теоремы Ляпунова о неустойчивости для автономного случая тем, что в нем условие

$$\dot{V}(x) > 0, \quad \forall x \in B_{\varepsilon_0} \tag{2.16}$$

этой теоремы Ляпунова заменено на совокупность условия (2.16) и условия отсутствия в области B_{ε_0} решений алгебраической системы (2.15) при каждом значении $c > 0$. Это последнее условие, однако, в каждом конкретном случае всегда может быть проверено непосредственно (исходя из анализа заданных функций $\omega_i(x)$ и функции V) в явном аналитическом виде. Более того, если $m \geq n - 1$, оно выполняется почти всегда.

Вырожденный случай. Рассмотрим вырожденный случай, когда функция $V^*(x)$, фигурирующая в условии предложения 1, является тождественным нулем. Тогда условие 3 удовлетворяется автоматически, условие сходимости $\upsilon_i(t, x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \upsilon_i^*(x)$ при $t \to \infty$ становится лишним и предложение 1 переходит в следующее предложение.

Пусть система $\dot{x}_i = \upsilon_i(t, x)$, $(i = 1, \ldots, n)$, имеющая положение равновесия $x_0 = 0$, такова, что для некоторой C^1-функции $V(t, x)$, $V(t, 0) = 0$ и некоторого числа $t_0 > 0$ выполнены условия

1) $\dot{V} \geq 0, \forall t \geq t_0, \forall x \in B_{\varepsilon_0}$,

2) $\forall \delta \exists x_{(\delta)}, |x_{(\delta)}| < \delta : V(t_0, x_{(\delta)}) > 0$, причем C-функция $V(t, x)$ сходится при $t \to \infty$ равномерно в области B_{ε_0} к нулю.

Тогда равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво.

Это предложение аналогично сформулированному ранее К.П. Персидским [4].

2.2. Об ослаблении условия знакоопределенности в теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости и дополнении к теореме Н.Н. Красовского. Пусть для некоторой системы (1.1) класса $\mathcal{K}$ существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая всем условиям предложения 1. В этом случае каждая из траекторий $x(t;\, t_0, x_{(\delta)})$, $\delta < \varepsilon_0/2$, где $x_{(\delta)}$ – точки из условия 2 предложения 1, пересекает в некоторый момент $t_{(\delta)} > t_0$ сферу $|x| = \varepsilon_0/2$ (см. выше).

Если это так для любой точки $x \neq 0$ области $B_{\varepsilon_0/2}$ и любого t_0 и если решения системы (1.1) могут быть продолжены на всю отрицательную ось времени, то, исходя из доказательства предложения 1, заключаем, что в этом случае движение в системе (1.1) обратно движению в системе с равномерно асимптотически устойчивым положением равновесия $x_0 = 0$. (Этот случай является, естественно, частным по отношению к общему случаю движения с неустойчивым x_0, применительно к которому сформулировано предложение 1.)

Иными словами, если в предложении 1 функция $V(t, x)$ положительно определена, то, сделав в условии 1 замену $\geq 0 \to \leq 0$, получим

Предложение 2. Пусть для системы (1.1) класса $\mathcal{K}$ существуют число $t_0 > 0$ и $C^{1,1}_{tx}$-функция $V(t, x) : (\mathbf{R}_{[t]} \times B_{\varepsilon_0}) \to \mathbf{R}$; $V(t, 0) = 0, \forall t$, сходящаяся при $t \to 0$ равномерно в области B_{ε_0} к функции $V^*(x) \in C^{m+1}(B_{\varepsilon_0})$ и такая, что

1) $\dot{V}(t, x) \leq 0\ \forall t \geq t_0, \forall x \in B_{\varepsilon_0}$;

2) $V(t, x) \geq W(x) > 0\ \forall t \geq 0, \forall x \in B_{\varepsilon_0}, x \neq x_0 = 0, W(x_0) = 0$;

3) алгебраическая система (2.1) не имеет в некоторой окрестности $x_0 = 0$ в $\mathbf{R}^n$ решений ни при каком $c > 0$.

Тогда равновесие $x_0 = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Метод доказательства здесь тот же, что и использованный для доказательства предложения 1.

Так же как и в доказательстве предложения 1, без ограничения общности считаем, что область, фигурирующая в условии 3, включает область B_{ε_0}.

Из условия равномерной сходимости функции $V(t, x)$ при $t \to +\infty$ в области B_{ε_0} имеем

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon \exists T(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon)\ \forall x \colon |x| < \delta_1(\varepsilon), \quad \forall t > T(\varepsilon) \\ \left|V(t, x) - \lim_{t \to \infty} V(t, 0)\right| = |V(t, x)| < \varepsilon\end{gathered} \tag{2.17}$$

Из условия непрерывности функции $V(t, x)$ в области $0 \leq t, x \in B_{\varepsilon_0}$, вследствие которого эта функция равномерно по t непрерывна по x при $0 \leq t \leq T(\varepsilon)$, где $T(\varepsilon)$ – число из условия (2.17), имеем

$$\begin{gathered}\exists \delta_2(\varepsilon) = \delta_2(T(\varepsilon), \varepsilon) : \forall x : |x| < \delta_2(\varepsilon)\ \forall t : 0 \leq t \leq T(\varepsilon) \\ |V(t, x) - V(t, 0)| = |V(t, x)| < \varepsilon\end{gathered} \tag{2.18}$$

Из условий (2.17) и (2.18) получаем

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)) : \forall x : |x| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |V(t, x)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Таким образом, при выполнении условий предложения 2 функция $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел. Но тогда, при учете условий 1 и 2, из теоремы Ляпунова об устойчивости сразу же следует, что равновесие $x_0 = 0$ равномерно устойчиво. Иначе говоря, найдется число $\tilde{\eta}$, такое, что траектория $x(t;\ \tilde{t}, \tilde{x})\ \forall\tilde{x} \in B_{\tilde{\eta}}$ продолжима на всю ось времени $\mathbf{R}^+_{\{t\}}$ и

$$\forall\varepsilon\ \exists\eta(\varepsilon) < \tilde{\eta}, \quad \eta(\varepsilon) < \varepsilon : \forall\tilde{x} : |\tilde{x}| < \eta(\varepsilon), \quad \forall\tilde{t} \geq 0 \quad |x(t;\ \tilde{t}, \tilde{x})| < \varepsilon, \quad \forall t \geq \tilde{t} \tag{2.19}$$

Покажем теперь, что любая траектория системы (1.1), выходящая в некоторый момент из точки шара

$$B_{\eta(\varepsilon_0/2)} = \{x: |x| < \eta(\varepsilon_0/2)\}$$

стремится к точке $x_0 = 0$ при $t \to +\infty$ (здесь $\eta(\varepsilon)$ – функция из предложения (2.19), а $\varepsilon_0 > 0$ – число, фигурирующее в условии предложения 2).

Допустим обратное. Пусть найдутся точка $\hat{x}$ и момент $\hat{t} \geq 0$ такие, что

$$|\hat{x}| < \eta(\varepsilon_0/2) : \exists\hat{\delta} : \forall k > \tilde{t} \quad \exists t_{(k)} > k : |x(t_{(k)};\ \hat{t}, \hat{x})| > \hat{\delta} \tag{2.20}$$

Условия (2.19) и (2.20) совместно дают

$$\varepsilon_0/2 > |x(t_{(k)};\ \hat{t}, \hat{x})| > \hat{\delta}\ \ \forall k > \hat{t} \tag{2.21}$$

Поэтому последовательность точек $x(t_k;\ \hat{t}, \hat{x})$, $t_k > k > \hat{t}$ имеет частичный предел x_1:

$$\begin{gathered} \exists k(m) : \mathbf{N} \to \mathbf{N} : t_m^{(1)} = t_{k(m)},\ m = 1, \ldots; \quad (k(s) > \hat{t}\ \ \forall s) \\ x(t_m^{(1)};\ \hat{t}, \hat{x}) \underset{m \to \infty}{\to} x_1, \quad \varepsilon_0/2 \geq |x_1| \geq \hat{\delta} \end{gathered} \tag{2.22}$$

Поскольку последовательность $\{t_m^{(1)}\} \underset{m \to \infty}{\to} \infty$ как подпоследовательность последовательности $\{t_k\} \underset{k \to \infty}{\to} \infty$ и поскольку каждая из точек $x(t_m^{(1)};\ \hat{t}, \hat{x})$ является точкой полутраектории $x(t;\ \hat{t}, \hat{x})$, $t > \hat{t}$, условие (2.20) означает, что для траектории $x(t;\ \hat{t}, \hat{x})$ определено непустое ω-предельное множество

$$\pi(\hat{t}, \hat{x}) \subset \bar{B}_{\varepsilon_0/2} \subset B_{\varepsilon_0}, \quad x_1 \in \pi(\hat{t}, \hat{x}) \tag{2.23}$$

как это следует из условия (2.19) при учете условия $|\hat{x}| < \eta(\varepsilon_0/2)$ в (2.20).

Возможны два варианта: множество (2.23) состоит из одной точки x_1 (вариант 1) и более чем из одной точки (вариант 2).

Рассмотрим вариант 2.

Пусть $x = x_2$ – любая точка множества $\pi(\hat{t}, \hat{x})$, отличная от точки x_1.

Имеем

$$\exists\{t_m^{(2)}\} \underset{m \to \infty}{\to} \infty: \{x(t_m^{(2)};\ \hat{t}, \hat{x})\} \underset{m \to \infty}{\to} x_2 \tag{2.24}$$

Тогда из сходимостей (2.20), (2.24), условия равномерной сходимости $V(t, x) \underset{t \to \infty}{\to} V^*(x)$ в области B_{ε_0}, включения $\pi(\hat{t}, \hat{x}) \subset \bar{B}_{\varepsilon_0/2}$ (2.21), а также из условия 1 при учете условия $\forall t \geq \hat{t} x(t;\ \hat{t},\ \hat{x}) \in B_{\varepsilon_0/2} \subset B_{\varepsilon_0}$ получаем точно так же, как в доказательстве предложения 1, что

$$V^*(x_2) = V^*(x_1) \tag{2.25}$$

В случае, когда реализуется вариант 1, равенство (2.25) имеет место автоматически. Поэтому равенство (2.25) выполняется всегда независимо от того, какой из вариантов реализуется – 1 или 2.

Далее, из условия положительной определенности функции $W(x)$ в области $\bar{B}_{\varepsilon_0/2}$ и при учете условия $\varepsilon_0/2 > \hat{\delta}$ получаем

$$\exists \hat{c} > 0\colon c_0/2 > |x| > \hat{\delta} \Rightarrow W(x) > \hat{c}$$

где $\hat{\delta} > 0$ – число из предложения (2.20).

Отсюда при учете правого неравенства (2.21) и в силу условия 2 получаем

$$V(t_m^{(1)};\ x(t_m^{(1)};\ \hat{t},\ \hat{x})) \geq W(x(t_m^{(1)};\ \hat{t},\ \hat{x})) > \hat{c} \tag{2.26}$$

Из условия $V(t,x) \underset{t \to \infty}{\overset{B_{\varepsilon_0}}{\rightrightarrows}} V^*(x)$ при учете условий (2.22) и $\{t_m^{(1)}\} \underset{m \to \infty}{\to} \infty$ имеем

$$\{V(t_m^{(1)};\ x(t_m^{(1)};\ \hat{x},\ \hat{t}))\} \underset{m \to \infty}{\to} V^*(x_1)$$

где x_1 – точка из условия (2.22). Но тогда вследствие неравенства (2.26) имеем с необходимостью

$$V^*(x_1) = c^*_{(\hat{t},\ \hat{x})} \geq \hat{c} > 0 \tag{2.27}$$

В результате получаем, исходя из равенства (2.25) и включения (2.23), что для траектории $x(t;\ \hat{t},\ \hat{x})$, где $(\hat{t},\ \hat{x})$ – начальные условия из условия (2.20), и ее ω-предельного множества (2.23) выполнены все условия следствия 1 леммы 1. Следовательно, все точки множества (2.23) удовлетворяют алгебраической системе (2.1) со значением $c = c^*_{(\hat{t},\ \hat{x})}$, положительным вследствие условия (2.27).

Однако это противоречит условию 3, т.е. предположение (2.20) неверно. Поэтому

$$x(t;\ \hat{t},\ \hat{x}) \underset{t \to +\infty}{\to} x_0 = 0\ \forall \hat{x},\ |\hat{x}| < \eta(\varepsilon_0/2), \quad \forall \hat{t} \geq 0$$

что совместно с условием (2.19) и доказывает утверждение предложения 2.

В частном случае автономной системы предложение 2 переходит в предложение, получающееся из предложения 1а заменой его условия 1 на условие $\dot{V}(x) \leq 0,\ \forall x \in B_{\varepsilon_0}$, условия 2 – на условие $V \succ 0,\ \forall x \in B_{\varepsilon_0},\ x \neq 0$, а вывода о неустойчивости – на вывод об асимптотической устойчивости.

Полученное таким образом следствие предложения 2 для автономного случая соответствует теореме об асимптотической устойчивости Н.Н. Красовского [5, 7].

Примеры. 1°. Для системы

$$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_3 + f_1(x)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + 2x_1 + f_2(x)$$

$$\dot{x}_3 = x_3 - 2x_2 + f_3(x)$$

$$f_i(x) \in C^1(\mathbf{R}^3)$$

и функции $V = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2$ имеем

$$\dot{V} = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$$

Если

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 g(x), \quad g(x) \in C(\mathbf{R}^3)$$
$$g(0) = 0$$

то для этой системы заведомо выполнены все условия предложения 1а, а для обратной к ней системы – все условия предложения 2.

2°. Рассмотрим также систему, описывающую маятник Ван дер Поля

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 (1 - x_1)^2, \quad \mu > 0$$

Для функции $V = (x_1^2 + x_2^2)/2$ имеем $\dot{V} = \mu x_2^2 (1 - x_1^2)$, поэтому в некоторой окрестности нулевого положения равновесия $\dot{V} \ge 0$.

Система (2.15) может иметь решения лишь в точках с $x_2 = 0$, но в этом случае уравнение

$$\dot{V}|_{x_2 = 0} = 2\mu x_1^2 (1 - x_1^2) = 0$$

имеет (в достаточно малой окрестности точки $x_0 = 0$) единственное решение $x_1 = 0$. Поэтому $x_0 = 0$ – единственное решение системы (2.15), и равновесие x_0 неустойчиво.

Для обратной системы

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2 (1 - x_1)^2$$

и для функции $V = (x_1^2 + x_2^2)/2$ так же, как и в предыдущем примере, выполнены все условия предложения 2, и нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво.

2.3. О дополнении к теореме Е.А. Барбашина. Рассмотрим еще один частный случай, когда все условия предложения 2 для функций $\upsilon_i(t, x)$ и некоторой функции $V(t, x)$ выполнены во всем пространстве $\mathbf{R}^n$, причем функция $W(x)$ из условия 2 удовлетворяет условию $W(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$.

Тогда справедливо следующее замечание, дополняющее известный результат Е.А. Барбашина [7].

Пусть $x_0 = \mathbf{0}$ – положение равновесия системы (1.1), правые части которой – функции класса $C_{tx}^{0,1}(\mathbf{R}_{\{t\}}^+ \times \mathbf{R}^n)$, и пусть функции $\upsilon_i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ сходятся при $t \to +\infty$ равномерно в $\mathbf{R}^n$ к функциям $\upsilon_i^*(x) \in C^m(\mathbf{R}^n)$. Пусть, кроме того, существует функция $V(t, x) \in C_{tx}^{1,1}(\mathbf{R}_{\{t\}}^+ \times \mathbf{R}^n)$, сходящаяся при $t \to +\infty$ равномерно в $\mathbf{R}^n$ к функции $V^*(x) \in C^{m+1}(\mathbf{R}^n)$ и удовлетворяющая условиям

1) $\dot{V}(t, x) \le 0$, $\forall t \ge 0$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$;

2) $V(t, x) \ge W(x) > 0$, $\forall t \ge 0$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $x \ne x_0$; $W(x_0) = 0$; $W(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$.

3) алгебраическая система (2.1) не имеет решений в $\mathbf{R}^n$ ни при каком $c > 0$.

Тогда равновесие $x_0 = 0$ асимптотически устойчиво в целом [5, 7].

Напомним, что нулевое положение равновесия $x_0 = 0$ системы (1.1) называется асимптотически устойчивым в целом, если оно является асимптотически устойчивым и решение $x(t;\, t_0, x^{(0)})$ с любым начальным условием $(t_0, x^{(0)})$ из фазового пространства $\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times \mathbf{R}^n$ системы (1.1) стремится при $t \to +\infty$ к равновесию $x_0 = 0$.

Действительно, возьмем произвольную точку (t, x)-пространства $(\hat{t}, \hat{x})$, $\hat{x} \neq x_0$. В силу последнего условия 2

$$\exists \mathcal{R} = \mathcal{R}(V(\hat{t}, \hat{x})):\ W(x) > V(\hat{t}, \hat{x}), \quad \forall x\ |x| \geq \mathcal{R}(V(\hat{t}, \hat{x}))$$

Отсюда при учете условия 1 и первого условия 2 имеем

$$|x(t;\, \hat{t}, \hat{x})| < \mathcal{R}(V(\hat{t}, \hat{x})), \quad \forall t \geq \hat{t}$$

Таким образом, каждая полутраектория $x(t;\, \hat{t}, \hat{x})$ системы (1.1) не выходит из некоторого шара $B_{\mathcal{R}(V(\hat{t}, \hat{x}))}$ и поэтому имеет непустое ω-предельное множество $\pi(\hat{t}, \hat{x})$. Рассуждая далее точно так же, как в доказательстве предложения 2 (начиная с предположения (2.20) и до конца), получаем, что и требовалось.

Например, для системы, обратной к приведенной выше в примере 1, равновесие $x_0 = 0$ асимптотически устойчиво в целом, если

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 g(x); \quad g \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

$$g(0) = 0$$

3. Об ослаблении условия знакоопределенности производной в теоремах, аналогичных теоремам Н.Г. Четаева и К.П. Персидского. Заметим, что с помощью леммы 1 условие знакоопределенности функции $\dot{V}$ может быть ослаблено для класса $\mathcal{K}$ систем (1.1) не только в тех теоремах второго метода Ляпунова, в которых выполнение этого условия требуется для всех точек из некоторой окрестности $x_0 = 0$, но и для тех, где это условие должно быть выполнено в некоторой области ω, $x_0 \in \bar{\omega}$, не являющейся окрестностью нуля.

3.1. О дополнении к теореме Н.Г. Четаева.

Предложение 3.1. Пусть для системы (1.1) класса $\mathcal{K}$ существует число $t_0 > 0$ и C^1-функция $V(t, x)$: $\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0} \to \mathbf{R}$, $V(t, 0) = 0$, $\forall t$, сходящаяся при $t \to +\infty$ равномерно в области B_{ε_0} к функции $V^*(x) \in C^{m+1}(B_{\varepsilon_0})$, такая, что

1) $\forall \tilde{t} \geq t_0, \forall \tilde{x} \in B_{\varepsilon_0}, \tilde{x} \in \{x{:}V(\tilde{t}, x) > 0\} \Rightarrow \dot{V}(\tilde{t}, \tilde{x}) \geq 0$;

2) $\forall \delta\ \exists x_{(\delta)}, |x_{(\delta)}| < \delta;\ V(t_0, x_{(\delta)}) > 0$;

3) алгебраическая система (2.1) не имеет в некоторой окрестности нуля в $\mathbf{R}^n$ решений ни при каком $c > 0$.

Тогда равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво.

Доказательство. Предположим, что равновесие $x_0 = 0$ устойчиво. Тогда, исходя из условий предложения 3.1, очевидно, что все рассуждения, приведенные в доказательстве предложения 1 с самого начала вплоть до формулы (2.7) включительно, здесь остаются в силе.

Покажем теперь, что здесь так же, как и при условиях теоремы Четаева, функция $V(t, x)$ вдоль полутраектории $x(t;\, t_0, x_{(\delta)})$, $t \geq t_0$, определенной в доказательстве предложения 1, является неубывающей.

Имеем

$$V(t;\, x(t;\, t_0, x_{(\delta)})) = V(t_0, x_{(\delta)}) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau;\, x(\tau;\, t_0, x_{(\delta)}) d\tau, \ \forall t \geq t_0 \tag{3.1}$$

Из условия 2 при $t = t_0$ вытекает, что $V(t_0, x_{(\delta)}) > 0$. Допустим теперь, что в некоторой точке полутраектории $x(t; t_0, x_{(\hat{\delta})})$ это условие не выполняется:

$$\exists t > t_0 \colon V(t; x(t; t_0, x_{(\hat{\delta})})) \leq 0 \tag{3.2}$$

Но функция $V(t, x)$ непрерывна в области $\overline{\mathbf{R}}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0}$, и, поскольку вследствие условия (2.3) вся полутраектория $(t, x(t; t_0, x_{(\hat{\delta})}))$, $t \geq t_0$ принадлежит этой области, функция $V(t, x)$ непрерывна на кривой $x(t; t_0, x_{(\hat{\delta})})$, $t \geq t_0$ в $\mathbf{R}^n$. Отсюда, при учете условия $V(t_0, x_{(\delta)}) > 0$ и предположения (3.2) вытекает, что

$$\exists t^{(0)} > t_0 \colon V(t^{(0)}; x(t^{(0)}; t_0, x_{(\hat{\delta})})) = 0, \quad V(t; x(t; t_0, x_{(\hat{\delta})})) > 0, \quad \forall t : t_0 \leq t < t^{(0)} \tag{3.3}$$

Исходя из соотношения (3.1) при учете условия 2 и первого предложения (3.3), получаем, что внутри отрезка траектории $(t, x(t; t_0, x_{(\hat{\delta})}))$ при $t_0 \leq t \leq t^{(0)}$ найдется точка $(\tilde{t}, x(\tilde{t}; t_0, x_{(\delta)}))$, $t_0 < \tilde{t} < t^{(0)}$, в которой функция $\dot{V}(t, x)$ принимает отрицательное значение:

$$\exists \tilde{t} : t_0 < \tilde{t} < t^{(0)} : \dot{V}(\tilde{t}; x(\tilde{t}; t_0, x_{(\hat{\delta})})) < 0 \tag{3.4}$$

Однако в силу второго условия (3.3) имеем

$$V(\tilde{t}; x(\tilde{t}; t_0, x_{(\hat{\delta})})) > 0 \tag{3.5}$$

Но тогда, исходя из условия (2.3), (3.4) и (3.5), приходим к предложению, противоречащему условию 1.

Таким образом, предположение (3.2) неверно. Поэтому

$$V(t; x(t; t_0, x_{(\hat{\delta})})) > 0, \quad \forall t \geq t_0$$

откуда при учете включения (2.3) из условия 1 вытекает, что

$$\dot{V}(t, x)|_{V(t;\, x(t;\, t_0,\, x_{(\hat{\delta})}))} \geq 0, \quad \forall t \geq t_0$$

Это и означает, что функция $V(t, x)$ вдоль полутраектории $x(t; t_0, x_{(\hat{\delta})})$, $t \geq t_0$ является неубывающей. Но тогда, как это легко видеть, исходя из условий предложения 3, все доказательство предложения 1, начиная с формулы (2.8) включительно вплоть до конца, здесь может быть дословно повторено.

Таким образом, предположение об устойчивости неверно и равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво, что и требовалось.

Замечание. В приведенном доказательстве неявно предполагается, что для каждого значения $t = \hat{t} \geq t_0$

$$\{x \colon V(\hat{t}, x) > 0, |x| < \varepsilon_0\} \neq \varnothing$$

Но это условие не оговорено в формулировке предложения 3.1. Однако этого и не нужно делать. Действительно, в противном случае, как это следует из очевидных рассуждений, аналогичных приведенным в доказательстве предложения 3.1, из условий следовало бы, что траектория $x(t; t_0, x_{(\hat{\delta})})$ для каждого $\hat{\delta} < \delta(\varepsilon_0/2, t_0)$ не может быть продолжена на всю ось времени $\mathbf{R}^+_{\{t\}}$. Но это означает неустойчивость равновесия $x_0 = 0$.

Предложение 3.1 является некоторым обобщением теоремы Четаева для систем класса $\mathcal{K}$.

Автономный случай. В автономном случае предложение 3 переходит в следующее

Предложение 3.1а. Пусть $x_0 = 0$ – положение равновесия системы. Пусть для системы (2.14) существует функция $V(x) \in C^{m+1}(B_{\varepsilon_0})$, $m \geq 0$, $V(0) = 0$ такая, что всюду в области $\{x\text{: } V(x) > 0, |x| < \varepsilon_0\}$ такой, что точка x_0 принадлежит границе этой области, функция $\dot{V}$ неотрицательна, а алгебраическая система (2.15) не имеет в некоторой окрестности нуля решений ни при каком значении $c > 0$. Тогда равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво.

Соотношение между предложением 3.1а и теоремой Четаева для автономного случая такое же, как соотношение между предложением 1.1а и первой теоремой Ляпунова о неустойчивости для автономного случая.

Например, для каждой системы вида

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad f_i(0) = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n, \quad f_n(x)|_{x_n \geq 0} \geq 0,$$

$$f_i(x) \in C^n(\mathbf{R}^n) \ \forall i = 1, \ldots, n$$

причем такой, что алгебраическая система $\{\mathcal{D}^1 f_n(x) = \ldots = \mathcal{D}^n f_n(x) = 0\}$ имеет единственное решение $x = 0$, выполнены все условия предложения 3.1 для функции $V = x_n$ и нулевые положения равновесия всех таких систем неустойчивы.

3.2. О дополнении к теореме К.П. Персидского. Ясно, что лемма 1 может быть использована для ослабления условия знакоопределенности производной $\dot{V}$ и в других теоремах второго метода.

В частности, это может быть сделано для тех теорем, в формулировках которых предполагается существование некоторого сектора ω (здесь и далее под сектором, как обычно, понимается область, определенная К.П. Персидским [6]). Например, имеет место следующее

Предложение 3.2. Пусть система (2.14) имеет положение равновесия $x_0 = 0$.

Пусть для системы (2.14) существует сектор ω [6], $x_0 \in \overline{\omega}$, определенный в области B_{ε_0}, и функция $V(x) \in C^{m+1}(B_{\varepsilon_0})$, $m \geq 0$, $V(0) = 0$, причем

1) $\dot{V}(x) \geq 0 \ \forall x \in \omega, x \in B_{\varepsilon_0}$;

2) $\forall \delta \ \exists x_{(\delta)}, |x_{(\delta)}| < \delta, x_{(\delta)} \in \omega\text{: } V(x_{(\delta)}) > 0$;

3) алгебраическая система (2.15) не имеет решений в области $\{x\text{:}|x| < \varepsilon_0, x \in \overline{\omega}\} \subset \mathbf{R}^n\}$ ни при каком $c > 0$.

Тогда равновесие $x_0 = 0$ неустойчиво.

Доказательство. Допустим обратное. Тогда найдется число $\delta_0 > 0$, такое, что

$$\forall x \in B_{\delta_0} \ |g^t(x)| < \varepsilon_0/2, \quad \forall t \geq 0$$

Здесь $g_t(x)$ – фазовый поток системы (2.14), ε_0 – число из условия предложения 3.2.

Отсюда для каждой точки $x_{(\delta)}$, фигурирующей в условии 2, при $\delta < \delta_0$ имеем

$$|g^t(x_{(\delta)})| < \varepsilon_0/2, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.6}$$

Зафиксируем теперь некоторое число $\delta = \hat{\delta} < \delta_0$ и рассмотрим траекторию $g^t(x_{(\hat{\delta})})$, $t \geq 0$. В силу условия (3.6) для траектории $g^t(x_{(\hat{\delta})})$ существует ω-предельное множество

$$\pi(x_{(\hat{\delta})}) \neq \varnothing, \quad \pi(x_{(\hat{\delta})}) \subset \bar{B}_{\varepsilon_0/2} \tag{3.7}$$

Исходя из определения сектора [4] ω, заключаем, что любая траектория, выходящая при $t = 0$ из внутренней точки области

$$\{x : x \in \omega, |x| < \varepsilon_0\}$$

может покинуть эту область только через границу $|x| = \varepsilon_0$. Но в силу условия (3.6) для траектории $g^t(x_{(\hat{\delta})})$ (см. условие 2) это невозможно. Поэтому имеем

$$g^t(x_{(\hat{\delta})}) \in \omega, \forall t \geq 0 \tag{3.8}$$

Из условий (3.6) и (3.8) в силу условия 1 предложения 3.2 получаем, что вдоль траектории $g^t(x_{(\hat{\delta})})$, $t \geq 0$, функция $V(x)$ является неубывающей. Но тогда из определения предельного множества, непрерывности функции $V(x)$ в области B_{ε_0} и условия (3.6) находим

$$\forall x_1 \in \pi(x_{(\hat{\delta})}), \quad x_2 \in \pi(x_{(\hat{\delta})}), \quad V(x_1) = V(x_2), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.9}$$

Поэтому в силу включения (3.7) и равенства (3.9) для предельного множества $\pi(x_{(\hat{\delta})})$ траектории $g^t(x_{(\hat{\delta})})$ системы (2.14) выполнены все условия следствия 2 леммы 1. Таким образом, все точки множества $\pi(x_{(\hat{\delta})})$ удовлетворяют системе (2.15) со значением $c \geq V(x_{(\hat{\delta})}) > 0$, а также в силу условий (3.7), (3.8) принадлежат области $\{x : x \in \bar{\omega}, |x| < \varepsilon_0\}$. Однако это противоречит условию 3, так что предположение неверно, и положение равновесия x_0 неустойчиво, что и требовалось.

Например, для системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_2 + a x_1^2$, $a > 0$ неустойчивость равновесия $x_0 = 0$ вытекает из предложения 3.2 для сектора $\omega = \{x_2 > 0\}$ и функции $V = x_1$.

Предложение 3.2 может быть обобщено и на неавтономный случай для класса $\mathcal{K}$ систем (1.1).

В заключение заметим, что “шар B_{ε_0}” во всех сформулированных выше предложениях можно, естественно, заменить на “некоторую окрестность нуля в $\mathbf{R}^n$” (это несущественно).

Условие $v_i(t, x) \in C^{0,1}_{tx}(\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0})$ также может быть заменено во всем тексте на условие

$$v_i(t, x) \in C(\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0}); \quad v_i(t, x) \in \mathrm{Lip}_x(L), \quad i = 1, \ldots, n$$

В предложениях 1, 3, 3.2 условие $V(t, x) \in C^{1,1}_{tx}(\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0})$ можно ослабить до условия $V(t, x) \in C(\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0})$ совместно с условием о том, что функция $\dot{V}(t, x)$ определена всюду в области $\mathbf{R}^+_{\{t\}} \times B_{\varepsilon_0}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работа по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во МГУ, ЧеРо, 1998. 480 с.
4. *Персидский К.П.* Ко второй методе Ляпунова // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех. 1956. № 4. С. 43–47.
5. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211с.
6. *Персидский К.П.* Ко второй методе Ляпунова // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех. 1947. № 1. С. 48–55.
7. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.XII.2002