УДК 531.31

© 2004 г. В. Клим, А. П. Сейранян

НЕРАВЕНСТВО МЕТЕЛИЦЫНА И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Изучаются критерии асимптотической устойчивости линейных механических систем. Показывается, что неравенство, впервые выведенное Метелицыным, является достаточным, но не необходимым условием асимптотической устойчивости. Анализируются теоремы Метелицына, а также критические комментарии к ним в литературе. Выводятся конструктивные достаточные условия устойчивости в виде неравенств, ограничивающих экстремальные собственные значения матриц системы. Аналогичные условия получены для роторных систем в комплексном представлении. В качестве механических примеров рассмотрены три задачи об устойчивости вращения валов.

1. Введение. Удивительно, но критерий устойчивости Метелицына, полученный 50 лет назад, и теоремы устойчивости линейных неконсервативных систем [1, 2] до сих пор являются источниками дискуссий и путаницы. Подобные условия устойчивости были позднее получены Фриком [3] и Хусейном [4]. Отметим также последние работы на эту тему [5–8].

Предмет исследования – устойчивость линейных систем, представленных в форме

$$A\ddot{q} + (B+G)\dot{q} + (C+N)q = 0 \tag{1.1}$$

которые являются общими неконсервативными моделями в механике. Здесь A, B, G, C и N – действительные матрицы размерности $m \times m$. Предполагается, что матрица масс A симметрична и положительна определена, $A^T = A > 0$. Демпфирование характеризуется симметричной матрицей B, гироскопическая матрица G является кососимметричной, $G = -G^T$. Потенциальные силы описываются симметричной матрицей C, а неконсервативные позиционные силы – кососимметричной матрицей N. Вектор q представляет собой вектор обобщенных координат системы.

В предположении, что решение уравнения (1.1) имеет вид $q = he^{\lambda t}$, проблема устойчивости системы сводится к алгебраической задаче на собственные значения

$$L(\lambda)h = 0, \quad h \neq 0; \quad L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda(B+G) + C + N \tag{1.2}$$

Собственные значения λ являются корнями характеристического полинома $\det L(\lambda)$ степени $2m$. Система (1.1) асимптотически устойчива, если все собственные значения имеют отрицательные действительные части. Исследование действительных частей собственных чисел при помощи критерия Рауса–Гурвица при $m > 4$ очень громоздкое; кроме того, при таком подходе свойства матриц, имеющие физический смысл, не играют никакой роли. Поэтому при исследовании устойчивости Метелицын и другие авторы следовали альтернативными путями.

Будучи не вполне согласными с последними публикациями [7, 8] относительно метода и теорем Метелицына, авторы статьи ставят следующие цели.

1. Привести краткий альтернативный вывод неравенства Метелицына.

2. Сформулировать причины, по которым неравенство Метелицына является достаточным, но не необходимым условием асимптотической устойчивости.

3. Объяснить, почему условие устойчивости Метелицына мало применимо в прикладных задачах, и прокомментировать его семь теорем устойчивости.

4. Показать, как неравенство Метелицына приводит к конструктивному условию устойчивости, выраженному через экстремальные собственные значения матриц системы и поэтому применимому при решении практических задач.

5. Показать, что аналогичные условия для систем с симметричными комплексными матрицами имеют некоторые преимущества, и дать вывод достаточных условий устойчивости роторных систем.

6. Привести механические примеры, показывающие, что из полученных условий следуют качественно верные, но не всегда точные границы областей устойчивости.

2. Вывод неравенства Метелицына. Помножив уравнение (1.2) слева на транспонированный комплексно-сопряженный собственный вектор h^*, Метелицын получил уравнение

$$T\lambda^2 + (D + i\Gamma)\lambda + V + iE = 0 \tag{2.1}$$

(для каждого собственного значения λ – свое уравнение), где обозначено

$$T = h^*Ah, \quad D = h^*Bh, \quad i\Gamma = h^*Gh, \quad V = h^*Ch, \quad iE = h^*Nh \tag{2.2}$$

Здесь T, D, Γ, V и E – действительные величины. Также предполагается нормированность собственных векторов, $h^*h = 1$.

Известное неравенство Метелицына можно получить, потребовав, чтобы оба корня квадратного относительно λ уравнения (2.1) имели отрицательные действительные части. Вместо утомительного вычисления и отделения действительных частей этих корней воспользуемся теоремой Бильхарца и Шура [9], согласно которой оба корня полинома (2.1) с комплексными коэффициентами имеют отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения:

$$\begin{vmatrix} T & \Gamma \\ 0 & D \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} T & \Gamma & -V & 0 \\ 0 & D & E & 0 \\ 0 & T & \Gamma & -V \\ 0 & 0 & D & E \end{vmatrix} > 0 \tag{2.3}$$

Так как матрица $A > 0$, коэффициент $T > 0$, и поэтому соотношения (2.3) эквивалентны двум условиям:

$$D > 0 \tag{2.4}$$

$$TE^2 - \Gamma DE < D^2 V \tag{2.5}$$

Метелицын [1, 2] был первым, кто вывел неравенство (2.5) при условии (2.4) в качестве критерия (асимптотической) устойчивости неконсервативных систем (1.1).

3. Неравенство Метелицына: достаточное, но не необходимое условие асимптотической устойчивости. Следует отметить, что один из корней уравнения (2.1) есть собственное значение λ задачи (1.2), второй же корень не всегда является собственным значением. На этот важный факт было указано в [5], а затем в [8]. Однако это не было отмечено ни самим Метелицыным [1, 2], ни в работах [4, 7]. В действительности же случай, когда оба корня являются собственными значениями, скорее исключение, чем правило. Покажем это, следуя частному сообщению К. Поммера.

Рассмотрим собственное значение системы (1.2) λ_r, которому соответствует собственный вектор h_r и которое, конечно, является корнем полинома (2.1). Пусть уравнение (2.1) имеет два различных корня: λ_r и λ_s. В этом случае λ_s будет также собственным значением, если ему соответствует левый собственный вектор $\bar{h}_r$, т.е. $h_r^* L(\lambda_s) = 0$. Примером такой ситуации может служить слабо демпфированная система с матрицами $G \equiv 0$, $N \equiv 0$ при выборе $\lambda_s = \bar{\lambda}_r$.

Ошибка Метелицына, затем повторенная Хусейном [4], заключалась в том, что он считал оба корня уравнения (2.1) собственными значениями задачи (1.2). Эта ошибка привела к неверному выводу, что неравенство (2.5) – необходимое и достаточное условие устойчивости. Однако очевидно, что неравенства (2.4) и (2.5) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости, но не необходимыми, что может быть проиллюстрировано примером Д.Р. Меркина [7].

Пусть система (1.1) задается уравнением

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \ddot{q} + \left(\begin{Vmatrix} 5.8186 & 0 \\ 0 & 0.1814 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 3.6667 \\ -3.6667 & 0 \end{Vmatrix} \right) \dot{q} +$$

$$+ \left(\begin{Vmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 2.25 \\ -2.25 & 0 \end{Vmatrix} \right) q = 0 \tag{3.1}$$

Система (3.1) асимптотически устойчива, так как собственные значения системы $\lambda_{1,2} = -1 \pm 0.5\,i$ и $\lambda_{3,4} = -2 \pm 0.5\,i$ имеют отрицательные действительные части. Вычисляя соответствующие собственные векторы h, можно определить коэффициенты (2.2) квадратного уравнения (2.1). Корнями этого уравнения (одно уравнение для каждого собственного значения), конечно же, являются собственные значения $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_{3,4}$, но также и числа $0.0625 \pm 0.875\,i$ и $0.1786 \pm 0.2857\,i$, действительные части которых положительны. Таким образом, система (3.1) асимптотически устойчива, но неравенство Метелицына (2.5) не выполняется, потому что требует отрицательности действительных частей обоих корней уравнения (2.1).

4. Почему неравенство Метелицына непрактично и комментарии к его теоремам. При исследовании асимптотической устойчивости конкретной системы путем проверки выполнения неравенств (2.4) и (2.5) как достаточных условий возникает следующая проблема. При формулировании теорем устойчивости Метелицын потребовал выполнения условия (2.5). Однако собственные векторы h, которые используются для вычисления коэффициентов (2.2) в неравенствах (2.4) и (2.5), неизвестны; это отмечалось ранее (см., например, [3, 7]). Для их определения необходимо решить задачу на собственные значения (1.2), чем и завершается анализ устойчивости. Поэтому авторы не согласны с недавними высказываниями [8] и утверждают, что неравенство Метелицына (2.5) не может быть проверено в данном им виде без вычисления собственных векторов (а следовательно, и собственных значений) задачи (1.2).

Тем не менее, как было показано в [5], неравенство Метелицына (2.5) приводит к третьей теореме Томсона–Тета–Четаева: консервативная статически устойчивая система ($C > 0$, следовательно, и $V > 0$) становится асимптотически устойчивой при добавлении произвольных гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией ($D > 0$) [10]. Действительно, в случае $N = 0$ (т.е. $E = 0$) неравенство (2.5) принимает вид $D^2V > 0$, что обеспечивает асимптотическую устойчивость системы.

В общем случае, основываясь на неравенствах (2.4) и (2.5), Метелицын [1, 2] сформулировал семь теорем (см. также [7]). Две из них были также приведены Магнусом [11]. Ниже приводится краткий комментарий к этим теоремам.

Теоремы 1 и 2 для систем с позиционными силами (при отсутствии диссипативных и гироскопических сил) не могут быть выведены из неравенства (2.5), так как при отсутствии диссипации ($D = 0$) условие (2.4) нарушается, и для таких систем асимптотическая устойчивость не может быть достигнута.

Контрпримерами теорем 3 и 4 являются системы с нечетным числом степеней свободы, которые невозможно стабилизировать введением диссипативных и гироскопических сил, поскольку свободный член в характеристическом уравнении для систем с только неконсервативными позиционными силами ($C = 0$) и статически неустойчивых систем (при $C < 0$) является неположительным, из-за чего не выполняется критерий Рауса–Гурвица. На этот факт было указано Д.Р. Меркиным [7, 10]. Следовательно, для таких систем выполнение неравенства (2.5) невозможно. Пусть, например, в уравнении (1.1) матрицы C и N имеют вид

$$C = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}, \quad N = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{Vmatrix}$$

Тогда свободный член характеристического уравнения системы

$$\det[C + N] = abc + b\beta^2 + a\gamma^2 + c\alpha^2$$

равен нулю в случае $a = b = c = 0$ ($C = 0$) и отрицателен при $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$ ($C < 0$) и произвольных α, β, γ.

Теоремы 5 и 6 не связаны с неравенствами (2.4) и (2.5) [8]. Был представлен [7] контрпример, убедительно показывающий несправедливость теоремы 7.

Поэтому авторы не согласны с некоторыми комментариями [8] относительно практического использования неравенства (2.5) и обоснованности семи теорем Метелицына. Метелицыну не удалось использовать неравенства (2.4) и (2.5) для формулирования качественных условий устойчивости системы (1.1). Однако далее будет показано, что неравенство Метелицына (2.5) приводит к конструктивному достаточному условию устойчивости, применимому на практике.

5. Конструктивное достаточное условие устойчивости. Множеством значений действительных или комплексных матриц M размерности $m \times m$ является множество комплексных чисел x^*Mx, где x пробегает все комплексные нормированные векторы размерности m, $x^*x = 1$. Величины, определенные равенствами (2.2), принадлежат множеству значений соответствующих матриц. Эрмитовы матрицы A, B и C (действительные и симметричные в рассматриваемом случае) имеют только действительные собственные значения. Множество их значений будет также действительным и ограниченным минимальными и максимальными собственными значениями соответствующих матриц, см. например [12]. Следовательно, для любого вектора h ($h^*h = 1$) величины T, D и V, определенные равенствами (2.2) и известные как отношения Релея, также будут ограничены минимальными и максимальными собственными значениями матриц A, B и C соответственно. Следует отметить, что эти ограничения зависят только от собственных чисел матриц системы

$$\begin{aligned} &a_1 = \lambda_{\min}(A) \le T \le \lambda_{\max}(A) = a_2, \quad b_1 = \lambda_{\min}(B) \le D \le \lambda_{\max}(B) = b_2 \\ &c_1 = \lambda_{\min}(C) \le V \le \lambda_{\max}(C) = c_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Эрмитовы кососимметричные матрицы G и N имеют только чисто мнимые собственные числа, и множество их значений будет также мнимым. В рассматриваемом случае матрицы G и N являются действительными кососимметричными, а матрицы iG и iN – эрмитовыми. Поэтому множества значений матриц G и N ограничены максимальными по модулю собственными значениями $-ig$ и ig, а также $-in$ и in соответственно, где $g = |\lambda(G)|_{\max}$, а $n = |\lambda(N)|_{\max}$. Отсюда имеем

$$-g \le \Gamma \le g, \quad -n \le E \le n \tag{5.2}$$

Далее, предполагая, что

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0 \tag{5.3}$$

и принимая во внимание соотношения (5.1) и (5.2), можно заметить, что неравенство (2.5), записанное в форме $D(DV + \Gamma E) - TE^2 > 0$, удовлетворяется для произвольного вектора h в случае, если

$$b_1(b_1c_1 - gn) - a_2n^2 > 0 \tag{5.4}$$

Берутся наименьшее значение первого и наибольшие значения второго и третьего слагаемых неравенства.

При выполнении условий (5.3) неравенство (5.4) является *конструктивным достаточным условием* асимптотической устойчивости системы (1.1), для проверки которого необходимо знать лишь экстремальные собственные значения матриц системы A, B, C, G, N. Подобные условия уже выводились в [3, 5, 6], однако эти простые, но важные соотношения отсутствуют как у Метелицына [1, 2], так и у других авторов [4, 7, 8].

Неравенство (5.4) было разрешено относительно b_1, что привело [3] к следующему утверждению: при выполнении условий (5.3) система (1.1) асимптотически устойчива при достаточно большом демпфировании

$$b_1 > n(g + \sqrt{g^2 + 4a_2c_1})/(2c_1) \tag{5.5}$$

Исходя из условий (5.4), можно также доказать следующее утверждение: система (1.1) при выполнении условия (5.3) может быть стабилизирована достаточно большими диссипативными и/или потенциальными силами. (Подразумевается, что достаточно большими должны быть минимальные собственные значения соответствующих матриц.) Справедливость этого утверждения следует из выполнения условия (5.4) при достаточно большом слагаемом $b_1^2c_1$ [5]. Из неравенства (5.4) также следует, что устойчивость статически устойчивой системы с полной диссипацией (при выполнении условий (5.3)) не может быть нарушена введением достаточно малых гироскопических и позиционных неконсервативных сил.

6. Устойчивость роторных систем. Свободные поперечные колебания широкого класса роторных систем и центрифуг, в которых вращающиеся элементы симметричны относительно оси ротора, а связи в опорах изотропны, могут быть описаны неконсервативными системами [6, 13, 14]

$$A_1\ddot{q} + (B_1 + G_1)\dot{q} + (C_1 + N_1)q = 0 \tag{6.1}$$

с блочными матрицами

$$A_1 = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}, \quad G_1 = \begin{Vmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{Vmatrix}, \quad C_1 = \begin{Vmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix}, \quad N_1 = \begin{Vmatrix} 0 & N \\ -N & 0 \end{Vmatrix}$$

Матрицы A, B, G, C и N симметричные. Кроме того, матрица A положительно определена, а B, G и N неотрицательно определены.

Для удобства запишем систему (6.1) в комплексном виде

$$A\ddot{z} + (B + iG)\dot{z} + (C + iN)z = 0; \quad z = q_1 - iq_2, \quad q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix} \tag{6.2}$$

Если λ – собственное значение системы (6.2), то λ и комплексно-сопряженное число $\bar{\lambda}$ будут собственными значениями действительной системы (6.1). Одно из преимуществ комплексной записи – уменьшение размерности матриц системы вдвое. Следует отметить, что в уравнении (6.2) матрицы $B + iG$ и $C + iN$ – комплексные симметричные и состоят из эрмитовых $B \geq 0$, $C > 0$ и эрмитово кососимметричных матриц iG и iN. Так как $G \geq 0$ и $N \geq 0$, еще одним преимуществом системы (6.2) является ограниченность входящих в неравенство Метелицына (2.5) величин Γ и E

$$0 \leq g_1 \leq \Gamma \leq g_2, \quad 0 \leq n_1 \leq E \leq n_2 \tag{6.3}$$

Здесь g_1, n_1 и g_2, n_2 – соответственно наименьшие и наибольшие собственные значения матриц G и N. Тогда вместо неравенства (5.4) получим улучшенную оценку

$$b_1(b_1c_1 + g_1n_1) - a_2n_2^2 > 0 \tag{6.4}$$

Демпфирование обычно состоит из внешнего демпфирования B_e и внутреннего B_i, $B = B_e + B_i$, а G и N – линейные матричные функции угловой скорости Ω роторной системы [13]

$$G = \Omega G_0, \quad N = \Omega B_i \tag{6.5}$$

Здесь $G_0 \geq 0$ – симметричная постоянная матрица, а приведенная выше структура матрицы N получается при выборе инерциальной системы отсчета с координатами q. При использовании системы координат, вращающейся со скоростью Ω, внешнее демпфирование B_e появится в выражении для матрицы N, а матрица C будет зависеть от Ω (см. ниже пример 1).

Пусть γ_1 – наименьшее собственное значение матрицы G_0, а d_1 и d_2 – соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы B_i. Используя выражения (6.5) и подставляя их в неравенство (6.4), получим оценку для Ω, обеспечивающую устойчивость

$$\Omega^2(a_2d_2^2 - d_1\gamma_1b_1) < c_1b_1^2 \tag{6.6}$$

Можно улучшить эту оценку. Неравенство Метелицына (2.5) в форме $E(TE - \Gamma D) < D^2V$ выполняется при условии

$$\Omega^2 d_2(a_2d_2 - \gamma_1b_1) < c_1b_1^2 \tag{6.7}$$

которое более удобно, чем (6.6). Напомним, что a_2 и d_2 – наибольшие собственные значения матриц A и B_i, а b_1, c_1 и γ_1 – наименьшие собственные значения матриц B, C, и G_0 соответственно. Вместе с условием $B > 0$ неравенство (6.7) представляет собой достаточное условие асимптотической устойчивости роторной системы (6.2) и позволяет оценить угловую скорость Ω, при которой система будет устойчивой (см. примеры 1 и 2).

Если $c_1 \geq 0$ и $a_2d_2 < \gamma_1b_1$, то неравенство (6.7) выполняется при всех значениях Ω (гироскопическая стабилизация). Однако условие (6.7) может также выполняться при $c_1 < 0$ (случай статической неустойчивости, когда матрица C не является положительно определенной) (см. пример 1).

7. Примеры.

Пример 1. Простейший ротор состоит из невесомого круглого стержня с коэффициентом жесткости $k > 0$, вращающегося с постоянной угловой скоростью Ω, и закрепленного на нем диска массы m. Коэффициенты внешнего и внутреннего трения обозначаются соответственно $d_e > 0$ и $d_i > 0$. Движение центра масс диска, совершаемое в плоскости, перпендикулярной оси стержня, в инерциальной системе координат описывается уравнением [15]

$$\begin{Vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{Vmatrix}\ddot{q} + \begin{Vmatrix} d_e+d_i & 0 \\ 0 & d_e+d_i \end{Vmatrix}\dot{q} + \left\{\begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & d\Omega \\ -d_i\Omega & 0 \end{Vmatrix}\right\}q = 0 \tag{7.1}$$

В комплексной записи (6.2) уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{z} + (d_e+d_i)\dot{z} + (k+id_i\Omega)z = 0 \tag{7.2}$$

Наименьшие и наибольшие собственные значения матриц системы совпадают:

$$a_1 = a_2 = m, \quad b_1 = b_2 = d_e+d_i, \quad c_1 = c_2 = k, \quad d_1 = d_2 = d_i$$

Тогда условие (5.4), записанное для системы (7.1), дает оценку критической скорости вращения

$$\Omega^2 < k(d_e+d_i)^2/(md_i^2) \tag{7.3}$$

Неравенство (6.7), примененное к комплексному уравнению (7.2), дает тот же результат (7.3), который точно определяет критическую скорость потери устойчивости системы [15].

Уравнение движения (7.1), записанное в относительной системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью Ω (совпадающей со скоростью ротора), имеет вид

$$\begin{Vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{Vmatrix}\ddot{q} + \left\{\begin{Vmatrix} d_e+d_i & 0 \\ 0 & d_e+d_i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 2m\Omega \\ -2m\Omega & 0 \end{Vmatrix}\right\}\dot{q} +$$

$$+\left\{\begin{Vmatrix} k-m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k-m\Omega^2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & d_e\Omega \\ -d_e\Omega & 0 \end{Vmatrix}\right\}q = 0 \tag{7.4}$$

или в комплексной записи

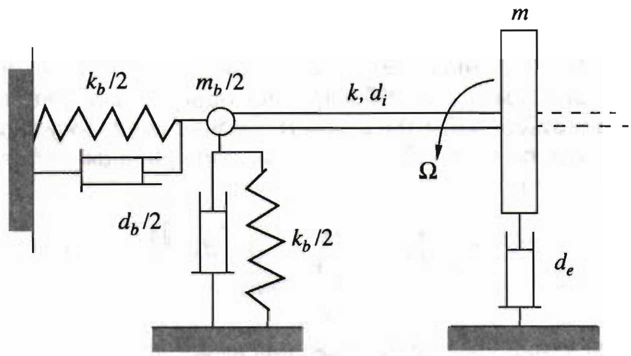
$$m\ddot{\varsigma} + (d_e+d_i+i2m\Omega)\dot{\varsigma} + (k-m\Omega^2+id_e\Omega)\varsigma = 0 \tag{7.5}$$

В уравнениях (7.4) и (7.5) присутствуют слагаемые, описывающие кориолисовы и центробежные силы. Неравенство (5.4) неприменимо к системе (7.4), так как C не всегда будет положительно определенной величиной (см. предположение (5.3)). Однако к уравнению (7.5) можно применить условие (6.7), которое принимает вид

$$\Omega^2 d_e(md_e - 2m(d_e+d_i)) < (k-m\Omega^2)(d_e+d_i)^2 \tag{7.6}$$

Из этого неравенства также можно получить критическую скорость потери устойчивости (7.3).

Пример 2. Известно, что несимметричный поток пара в турбинах приводит к возникновению несимметричных сил, приложенных к лопаткам ротора, и, таким обра-



зом, может стать причиной неустойчивости. Была рассмотрена простая модель такой ситуации [16]. В инерциальной системе отсчета уравнение движения в комплексной записи имеет вид

$$m\ddot{z} + (d_e + d_i)\dot{z} + (k + i(d_i\Omega + k_s))z = 0 \tag{7.7}$$

Здесь m, d_e, d_i и k – те же величины, что в примере 1, а коэффициент k_s характеризует поток пара. Так как неравенства (6.6) и (6.7) были выведены при предположении (6.5), эти неравенства неприменимы в данном случае. Поэтому воспользуемся неравенством (6.4) с коэффициентами

$$a_2 = m, \; b_1 = d_e + d_i, \; c_1 = k, \quad n_1 = n_2 = \Omega d_i + k_s$$

обеспечивающим устойчивость при

$$k_s < (d_e + d_i)\sqrt{k/m} - \Omega d_i \tag{7.8}$$

Условие (7.8) дает точный предел устойчивости, который был определен [16] с помощью вычисления собственных значений системы.

Пример 3. Пусть на механическую систему из примера 1 наложены связи, определяемые массой m_b, демпфированием d_b и жесткостью в опоре k_b (фигура). Линейная модель описывается комплексной системой размерности 2×2 (или действительной системой 4×4) [6]

$$\begin{Vmatrix} m & 0 \\ 0 & m_b \end{Vmatrix} \ddot{z} + \begin{Vmatrix} d_e + d_i & -d_i \\ -d_i & d_b + d_i \end{Vmatrix} \dot{z} + \left\{ \begin{Vmatrix} k & -k \\ -k & k + k_b \end{Vmatrix} + i \begin{bmatrix} d_i\Omega & -d_i\Omega \\ -d_i\Omega & d_i\Omega \end{bmatrix} \right\} z = 0 \tag{7.9}$$

Опуская для простоты размерности всех величин, рассмотрим конкретный случай, когда

$$m = 1, \quad d_i = 1, \quad d_e = 5, \quad d_b = 10, \quad k = 100, \quad k_b = 400$$

а масса связей $m_b \le 1$. В этом случае

$$a_2 = 1, \quad d_2 = 2, \quad b_1 = 5.8, \quad c_1 = 76.4, \quad \gamma_1 = 0$$

и из неравенства (6.7) получим условие устойчивости $\Omega < 25.3$. Однако при $m_b = 1$ правильный предел устойчивости $\Omega_{\rm cr} = 110$, для $m_b = 0.5$ имеем $\Omega_{\rm cr} = 97.7$, а для $m_b = 0.1$

получаем $\Omega_{cr} = 92$. Из приведенного примера видно, что неравенство (6.7) дает довольно грубую оценку границы устойчивости. При увеличении размерности системы данный эффект может усилиться.

Из рассмотренных механических примеров видно, что неравенства (5.4), (6.4) и (6.7) для простых систем определяют правильные границы устойчивости, но для сложных систем большей размерности дают качественно верную, но грубую численную оценку устойчивости системы.

Авторы благодарят К. Поммера за дискуссии и с признательностью отмечают интерес А.Ю. Ишлинского к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Метелицын И.И.* Задача гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31–34.
2. *Метелицын И.И.* Избранные труды. Теория гироскопа. Теория устойчивости. М.: Наука, 1977. 131 с.
3. *Frik M.* Zur Stabilität nichtkonservativer linearer Systeme // ZAMM. 1972. Bd 52. H. 4. S. T47–T49.
4. *Huseyin K.* Vibrations and Stability of Multiple Parameter Systems. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1978. 216 p.
5. *Сейранян А.П.* О теоремах Метелицына // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 39–43.
6. *Kliem W., Pommer C., Stoustrup J.* Stability of rotor systems: A complex modelling approach // Z. angew. Math. Phys. 1998. Bd 49. H. 4. S. 644–655.
7. *Меркин Д.Р.* О методе и теоремах Метелицына // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 536–540.
8. *Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.* К вопросу о теоремах И.И. Метелицына // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 541–543.
9. *Schmeidler W.* Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik. Berlin: Akademie-Verlag, 1949. 155 S.
10. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
11. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin: Springer, 1971. 493 S = *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
12. *Lancaster P., Tismenetsky M.* The Theory of Matrices. San Diego: Acad. Press, 1985. 570 p.
13. *Mueller P.C.* Stabilität und Matrizen. Berlin: Springer, 1977. 220 S.
14. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Исследование устойчивости сложных механических систем. М.: Наука, 2002. 299 с.
15. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
16. *Gasch R.* Stabiler Lauf von Turbinenrotoren // Konstruktion. 1965. Bd 17. H. 11. S. 447–452.

Копенгаген, Москва
e-mail: w.kliem@mat.dtu.dk
seyran@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
16.VIII.2002