УДК 531.36

© 2004 г. А. А. Зевин

# НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Основным элементом предлагаемого подхода к построению теории устойчивости канонических систем служит определенная ниже индексная функция, которая содержит всю необходимую информацию о системе. Основные результаты существующей теории, в частности, необходимое и достаточное условие сильной устойчивости, выражены в новых терминах. Соответствующие доказательства используют лишь простые математические средства; кроме того, они намного короче известных доказательств. Установлен ряд новых утверждений, в частности, получено простое достаточное условие сильной устойчивости, существенно обобщена известная теорема Якубовича [1] о направленной широте областей устойчивости, найдено необходимое и достаточное условие их направленной выпуклости. С их помощью установлены некоторые нелокальные качественные результаты об областях устойчивости параметрических колебаний канонических систем (позволяющие, в частности, обосновать существующую практику построения областей устойчивости по их границам) и найдены условия высокочастотной параметрической стабилизации неустойчивых систем.

Теория устойчивости линейных канонических систем с периодическими коэффициентами, ведущая начало от работ Ляпунова [2] и Пуанкаре [3], находит многочисленные приложения в механике, теории автоматического регулирования, задачах динамической устойчивости упругих систем и других областях науки и техники. В основе современной теории лежат введенное Крейном деление мультипликаторов на роды [4] и теорема Гельфанда – Лидского о структуре областей устойчивости [5]. К сожалению, доказательства многих теорем весьма трудоемки и используют достаточно сложный математический аппарат, что делает ее труднодоступной для исследователей-прикладников. В результате при анализе конкретных систем обычно используются лишь конструктивные (численные либо асимптотические) методы, а замечательные качественные результаты теории остаются невостребованными. Между тем именно качественные результаты обеспечивают наиболее глубокое понимание проблемы; зачастую они позволяют делать содержательные выводы об устойчивости системы даже в тех случаях, когда ее параметры известны лишь приближенно (и когда конструктивные методы практически бессильны).

**1. Основные понятия и определения.** Рассматривается система $2n$ линейных дифференциальных уравнений вида

$$J\dot{\mathbf{x}} = H(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in R^{2n}$$
$$H(t) = H(t+T) = \|h_{ik}(t)\|_{i,k=1}^{2n}, \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.1}$$

где $I_n$ – единичная матрица порядка $n$, $H(t)$ – симметрическая действительная кусочно-непрерывная $T$-периодическая матрица.

Прежде чем перейти к изложению результатов, напомним некоторые основные понятия и определения, относящиеся к уравнению (1.1).

Система (1.1) называется устойчивой, если все ее решения ограничены при $t \to \infty$. Для приложений представляют интерес сильно устойчивые системы, сохраняющие устойчивость при малых возмущениях гамильтониана $H(t)$. В математической формулировке это означает, что в сильно устойчивой системе существует такое $\varepsilon > 0$, что уравнение (1.1) с любой симметрической матрицей $H_1(t)$ также сильно устойчиво, коль скоро $|H_1(t) - H(t)| < \varepsilon$, где $|A|$ – норма матрицы $A$.

Пусть $X(t)$ – матрица, столбцами которой служат $2n$ линейно независимых решений уравнения (1.1). Собственные значения $\rho_k (k = 1, \ldots, 2n)$ матрицы $X(T)$ называются мультипликаторами системы. Каждому простому мультипликатору $\rho_k$ отвечает решение вида

$$\mathbf{x}_k(t) = \exp(\alpha_k t)\mathbf{f}_k(t); \quad \alpha_k = (\ln\rho_k)/T, \quad \mathbf{f}_k(t+T) = \mathbf{f}_k(t) \tag{1.2}$$

где $\alpha_k$ – характеристические показатели системы.

Если все мультипликаторы простые, то система (1.1) имеет $2n$ линейно независимых решений вида (1.2). То же самое имеет место и в случае кратных мультипликаторов, если элементарные делители матрицы $X(T)$ простые (т.е. число собственных векторов матрицы $X(T)$, отвечающих каждому мультипликатору $\rho_k$, равно его кратности $r_k$ как корня характеристического уравнения $\det\|X(T) - \rho I_{2n}\| = 0$). В случае кратного мультипликатора $\rho_k$ с непростыми элементарными делителями наряду с решением вида (1.2) существуют решения вида

$$\mathbf{x}_k(t) = \exp(\alpha_k t)\mathbf{P}_k(t) \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{P}_k(t)$ – полиномы с $T$-периодическими коэффициентами.

Так как уравнение (1.1) действительно, то наряду с комплексным мультипликатором $\rho_i$ имеется сопряженный мультипликатор $\rho_i^*$. Если $|\rho_i| \neq 1$, то имеется также мультипликатор $1/\rho_i$ (теорема Ляпунова – Пуанкаре). Из выражений (1.2), (1.3) и теоремы Ляпунова – Пуанкаре следует, что все решения ограничены при $t \to \infty$ (т.е. система устойчива), если только все мультипликаторы лежат на единичной окружности и все элементарные делители матрицы $X(T)$ простые.

Для любых решений $\mathbf{x}_i(t)$ и $\mathbf{x}_k(t)$ уравнения (1.1) имеет место тождество

$$(\mathbf{x}_i(t), J\mathbf{x}_k(t)) \equiv c_{ik} = \text{const} \tag{1.4}$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

В силу выражений (1.2) и (1.3) левая часть тождества (1.4) содержит множитель $\exp[(\alpha_i + \alpha_k^*)t]$, поэтому оно возможно, если только

$$(\mathbf{x}_i(t), J\mathbf{x}_k(t)) = 0 \text{ при } \alpha_i + \alpha_k^* \neq 0 \tag{1.5}$$

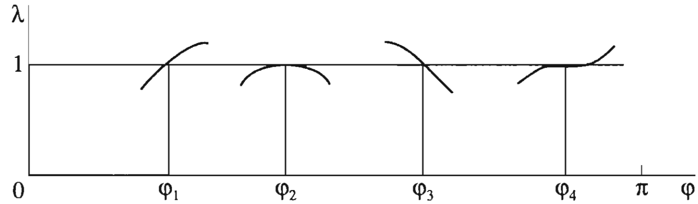
Как следует из тождества (1.4), любая матрица решений канонического уравнения удовлетворяет соотношению

$$X(t)'JX(t) = C = \|c_{ik}\|_{i,k=1}^{2n} \tag{1.6}$$

где штрих означает транспонирование.

Для действительной неособой матрицы $X(t)$ справедливо обратное утверждение [5]: если матрица $X(t)$ удовлетворяет соотношению (1.6), то она является решением некоторой канонической системы (1.1) с гамильтонианом

$$A(t) = J\dot{X}(t)X^{-1}(t) \tag{1.7}$$




Фиг. 1

Покажем, что этот вывод справедлив и для матрицы $X(t)$, содержащей также попарно сопряженные комплексные столбцы $\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}^*_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + i\boldsymbol{\upsilon}_k(t)$. На самом деле, составив матрицу $X_1(t)$ из действительных столбцов $\mathbf{x}_i(t)$ и функций $\mathbf{u}_k(t)$ и $\boldsymbol{\upsilon}_k(t)$, найдем, что она удовлетворяет соотношению (1.6) и является поэтому решением канонического уравнения с гамильтонианом $A_1(t) = J\dot{X}_1(t)X_1^{-1}(t)$. Но матрица $X(t)$, будучи линейной комбинацией столбцов $X_1(t)$, также служит решением этого уравнения, поэтому $A_1(t) = J\dot{X}(t)X^{-1}(t)$.

**2. Предварительные результаты.** Установим сначала несколько вспомогательных результатов. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &J\dot{\mathbf{x}} + 2\pi m T^{-1}\mathbf{x} = \lambda R(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(T) = \exp(i\varphi)\mathbf{x}(0) \\ &R(t) = H(t) + 2\pi m T^{-1} I_{2n} \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $m$ – целое число, такое, что $R(t) > 0$ при $t \in [0, T]$. Очевидно, что это неравенство выполняется, если $m > -h(t)T/(2\pi)$, где $h(t)$ – наименьшее собственное значение матрицы $H(t)$. Если $H(t) > 0$, то $h(t) > 0$, поэтому можно принять $m = 0$, тогда $R(t) = H(t)$.

Так как матрица $R(t)$ симметрическая, то задача (2.1) самосопряженная; в силу $R(t) > 0$ ее собственные значения $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots)$ действительны, а соответствующие собственные функции удовлетворяют соотношению [1]

$$\int_0^T (R(t)\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_k(t))dt = 0 \text{ при } \lambda_i \neq \lambda_k \tag{2.2}$$

Краевое условие (2.1) аналитически зависит от $\varphi$, поэтому $\lambda_i(\varphi)$ и собственные функции $\mathbf{x}_i(t, \varphi)$ аналитичны по $\varphi$.

При $\lambda = 1$ уравнение (2.1) совпадает с (1.1). Поэтому, если $\lambda_i(\varphi_k) = 1$ при некоторых $i$ и $\varphi_k$, то уравнение (1.1) имеет мультипликатор $\rho = \exp(i\varphi_k)$ (который может быть и кратным, даже если собственное значение $\lambda_i(\varphi_k)$ простое). Таким образом, точки, в которых графики функций $\lambda_i(\varphi)$ пересекают или касаются прямой $\lambda = 1$, указывают положение мультипликаторов уравнения (1.1) на единичной окружности. Так, в ситуации, представленной на фиг. 1, на верхней полуокружности лежат четыре мультипликатора (как следует из дальнейших результатов, мультипликаторы в точках $\varphi_1$ и $\varphi_3$ простые, в точках $\varphi_2$ и $\varphi_4$ – кратные).

Пусть $\rho_k = \exp(i\varphi_k)$ – мультипликатор кратности $r \geq 1$ с простыми элементарными делителями, тогда краевая задача (2.1) при $\varphi = \varphi_k$ имеет $r$-кратное собственное значение $\lambda = 1$. Пусть $\lambda_p(\varphi)$ $(p = 1, \ldots, r)$ – соответствующие аналитические функции $(\lambda_p(\varphi_k) = 1)$; обозначим $\lambda_{p\varphi}(\varphi_k) = d\lambda_p(\varphi)/d\varphi|_{\varphi = \varphi_k}$.

*Лемма* 1. Справедливо неравенство

$$\lambda_{p\varphi}(\varphi_k) \neq 0, \quad p = 1, \ldots, r \tag{2.3}$$

*Доказательство.* Собственному значению $\lambda_p(\varphi)$ ($p = 1, \ldots, r$) отвечает собственная функция $\mathbf{x}_p(t, \varphi) = \exp(i\varphi t/T)\mathbf{f}_p(t, \varphi)$, где $\mathbf{f}_p(t, \varphi) = \mathbf{f}_p(t + T, \varphi)$. Подставив $\mathbf{x}_p(t, \varphi)$ в уравнение (2.1), получим

$$J\dot{\mathbf{f}}_p + 2\pi m T^{-1}\mathbf{f}_p = \lambda_p R\mathbf{f}_p - i\varphi T^{-1}J\mathbf{f}_p \tag{2.4}$$

Дифференцируя соотношение (2.4) по $\varphi$ и учитывая равенство $\lambda_p(\varphi_k) = 1$, найдем, что $\mathbf{f}_{p\varphi}(t) = \partial\mathbf{f}_p(t, \varphi)/\partial\varphi|_{\varphi = \varphi_k}$ удовлетворяет уравнению

$$J\dot{\mathbf{f}}_{p\varphi} + 2\pi m T^{-1}\mathbf{f}_{p\varphi} = R\mathbf{f}_{p\varphi} - i\varphi_k T^{-1}J\mathbf{f}_{p\varphi} + \mathbf{p}(t) \tag{2.5}$$

где

$$\mathbf{p}(t) = -iT^{-1}J\mathbf{f}_p(t, \varphi_k) + \lambda_{p\varphi}R(t)\mathbf{f}_p(t, \varphi_k)$$

Неоднородное уравнение (2.5) имеет $T$-периодическое решение, если только

$$\int_0^T (\mathbf{p}(t), \mathbf{z}_p(t))dt = 0, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

где $\mathbf{z}_p(t)$ – $T$-периодические решения однородного сопряженного уравнения

$$\dot{\mathbf{z}} = -H(t)J\mathbf{z} - i\varphi_k T^{-1}\mathbf{z} \tag{2.7}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что уравнение (2.7) имеет решения $\mathbf{z}_p = J\mathbf{f}_p(t)$ ($p = 1, \ldots, r$), поэтому из условия (2.6) с учетом равенства $(\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_p) = \text{const}$, найдем

$$\lambda_{p\varphi} = (\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_p)\left(\int_0^T (R\mathbf{f}_p, \mathbf{f}_p)dt\right)^{-1} \tag{2.8}$$

Заметим, что $(\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_p)$ – действительное число, так как

$$(\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_p)^* = (iJ\mathbf{f}_p, \mathbf{f}_p) = (\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_p)$$

Так как функции $\mathbf{x}_p(t, \varphi)$ непрерывны по $\varphi$, то равенство (2.2) сохраняется и при $\lambda_i(\varphi) = \lambda_k(\varphi)$. Поэтому из соотношения (2.8) аналогично получим

$$(\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_k) = 0, \quad k \neq p, \quad p = 1, \ldots, r \tag{2.9}$$

Как следует из условия (1.5), $(\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_k) = 0$ при $\alpha_p + \alpha_k^* \neq 0$, поэтому равенство (2.9) справедливо при всех $p \neq k$. Так как функция $\mathbf{f}_p$ не может быть ортогональной $2n$ линейно независимым функциям $J\mathbf{f}_k$, то $(\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_p) \neq 0$; следовательно, $\lambda_{p\varphi} \neq 0$.

Из доказанной леммы следует, например, что мультипликаторам в точках $\varphi_2$ и $\varphi_4$ (фиг. 1) отвечают непростые элементарные делители (соответствующие производные $\lambda_{i\varphi}(\varphi_i) = 0$).

*Замечание.* Как отмечалось выше, в основе существующей теории канонических систем лежит введенное Крейном деление мультипликаторов на роды [4]. Если при условии (2.9) $(\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_p) > 0$ ($(\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_p) < 0$) для всех $p = 1, \ldots, r$, то данный $r$-кратный мультипликатор называется мультипликатором первого (второго) рода [5]. Как видно из выражения (2.8), при этом все производные функций $\lambda_p(\varphi)$ ($p = 1, \ldots, r$, $\lambda_p(\varphi_k) = 1$) в точке $\varphi_k$ соответственно положительны либо отрицательны ($R(t) > 0$). Таким образом, лемма 1 придает делению мультипликаторов на роды наглядный геометрический смысл. Ниже, однако, указанная классификация мультипликаторов не используется, так как все результаты выражены с помощью функций $\lambda_p(\varphi)$.

Следующая лемма обобщает лемму 1 на случай, когда простому собственному значению $\lambda_i(\varphi_k) = 1$ отвечает мультипликатор $\rho_k = \exp(i\varphi_k)$ любой кратности $r$. Так как она не используется в дальнейшем при анализе устойчивости, приведем ее без доказательства.

*Лемма* 2. Справедливы соотношения

$$\lambda_{i\varphi}^p(\varphi_k) = \frac{d^p}{d\varphi^p}\lambda_i(\varphi)|_{\varphi=\varphi_k} = 0, \quad p = 1, \ldots, r-1, \quad \lambda_{i\varphi}^r(\varphi_k) \neq 0 \tag{2.10}$$

Таким образом, производные функции $\lambda_i(\varphi)$ характеризуют кратность соответствующего мультипликатора (именно, кратность равна порядку низшей не равной нулю производной).

Из леммы 2, в частности, следует, что в точках $\varphi_1$ и $\varphi_3$ (фиг. 1) лежат простые мультипликаторы (первые производные функций $\lambda_i(\varphi)$ в этих точках не равны нулю). В точках $\varphi_2$ и $\varphi_4$ равны нулю соответственно первая и вторая производные; если следующие производные не равны нулю, то в точке $\varphi_2$ лежат два, в точке $\varphi_4$ – три мультипликатора.

Предположим, что гамильтониан $H = H(t, \varepsilon)$ аналитически зависит от параметра $\varepsilon$, тогда при фиксированном $\varphi$ собственные значения задачи (2.1) $\lambda_p = \lambda_p(\varepsilon)$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Полагая в (2.1) $H = H(t, \varepsilon)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p(t, \varepsilon)$, $\lambda = \lambda_p(\varepsilon)$ и дифференцируя по $\varepsilon$, найдем

$$J\dot{\mathbf{x}}_{p\varepsilon} + 2\pi mT^{-1}\mathbf{x}_{p\varepsilon} = \lambda_p R\mathbf{x}_{p\varepsilon} + \lambda_{p\varepsilon}R\mathbf{x}_p + \lambda_p H_\varepsilon \mathbf{x}_p \tag{2.11}$$

где

$$H_\varepsilon = \partial H(t, \varepsilon)/\partial\varepsilon, \quad \lambda_{p\varepsilon} = d\lambda_p(\varepsilon)/d\varepsilon, \quad \mathbf{x}_{p\varepsilon} = d\mathbf{x}_p(t, \varepsilon)/d\varepsilon$$

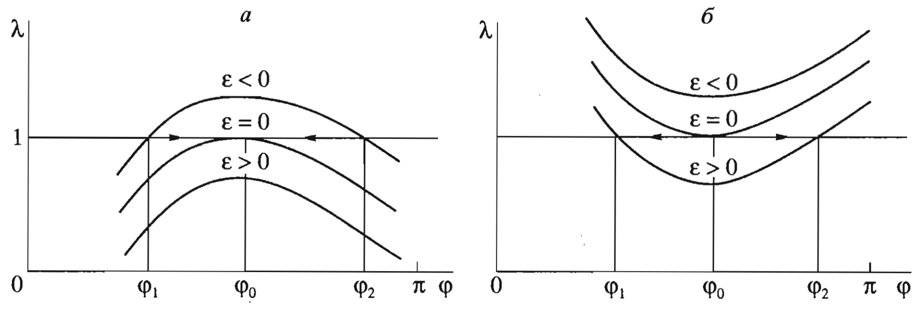
Отсюда аналогично выводу формулы (2.8) получим

$$\lambda_{p\varepsilon} = -\lambda_p\int_0^T (H_\varepsilon \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_p)dt\left(\int_0^T (R\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_p)dt\right)^{-1} \tag{2.12}$$

Предположим, что гамильтониан возрастает по $\varepsilon$, тогда $H_\varepsilon(t, \varepsilon) > 0$; в силу выражения (2.12) положительные собственные значения $\lambda_p(\varphi, \varepsilon)$ убывают по $\varepsilon$. Пусть $\lambda_p(\varphi_k, \varepsilon) = 1$, тогда очевидно, что если производная $\lambda_{p\varphi}(\varphi_k, \varepsilon) > 0$, то $\varphi_k(\varepsilon)$ возрастает при возрастании $\varepsilon$ (т.е. мультипликатор $\rho = \exp(i\varphi_k(\varepsilon))$ движется против часовой стрелки); напротив, если $\lambda_{p\varphi}(\varphi_k, \varepsilon) < 0$, то $\varphi_k(\varepsilon)$ убывает.

Пусть мультипликаторы $\rho_1 = \exp(i\varphi_1)$ и $\rho_2 = \exp(i\varphi_2)$ отвечают последовательным корням уравнения $\lambda_p(\varphi, \varepsilon) = 1$, причем $\lambda_p(\varphi, \varepsilon) > 1$ при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ (фиг. 2, *а*). Тогда при возрастании $\varepsilon$ эти мультипликаторы движутся по единичной окружности навстречу друг другу; если при некотором $\varepsilon = \varepsilon_0$ они встречаются в некоторой точке $\varphi_0$, то соответствующему двукратному мультипликатору $\rho_0$ отвечают непростые элементарные делители (собственное значение $\lambda_p(\varphi_0, \varepsilon_0) = 1$ простое, поэтому собственному значению $\rho_0$ матрицы $X(T)$ отвечает один собственный вектор). Очевидно, что при дальнейшем увеличении $\varepsilon$ в достаточно малой окрестности точки $\varphi_0$ уравнение $\lambda_p(\varphi, \varepsilon) = 1$ не имеет корней, т.е. рассматриваемые мультипликаторы сходят с окружности.

На фиг. 2, *б* функция $\lambda_p(\varphi, \varepsilon)$ выпукла вниз по $\varphi$. При $\varepsilon = \varepsilon_0$ она касается прямой $\lambda = 1$ в точке $\varphi_0$; это означает, что некоторые мультипликаторы попадают на окружность (в силу леммы 3 число таких мультипликаторов $r$ равно порядку низшей ненулевой производной функции $\lambda_p(\varphi, \varepsilon_0)$ при $\varphi = \varphi_0$; в случае общего положения $r = 2$). При дальнейшем возрастании $\varepsilon$ кривая $\lambda_p(\varphi, \varepsilon)$ пересекает прямую $\lambda = 1$ в двух точках, причем соответствующие производные не равны нулю. Поэтому в соответствии с




Фиг. 2

леммой 3 в этих точках лежат простые мультипликаторы, т.е. $r - 2$ из совпавших мультипликаторов вновь сходят с окружности.

Ясно, что если собственное значение $\lambda(\varphi_0, \varepsilon_0) = 1$ кратное, то поведение мультипликаторов в окрестности $\varphi_0$ определяется каждой из соответствующих функций $\lambda_p(\varphi, \varepsilon)$ в отдельности.

Заметим, что приведенные результаты полностью согласуются с результатами о движении мультипликаторов при возрастании гамильтониана, полученными Крейном и Любарским с помощью других рассуждений [6].

**3. Индекс и индексная функция системы.** Пусть $N(\varphi)$ – число собственных значений задачи (2.1) на интервале (0, 1). Следующие понятия [7, 8] играют ключевую роль в развиваемой теории.

*Определение.* Функцию

$$q(\varphi) = N(\varphi) - 2mn \tag{3.1}$$

назовем индексной функцией (ИФ), а число $q = q(0) = N(0) - 2mn$ – индексом гамильтониана $H(t)$.

Прежде всего отметим, что индекс не зависит от $m$, коль скоро неравенство $R(t) = H(t) + 2\pi m T^{-1} I_{2n} > 0$ выполнено. Дело в том [7, 8], что при увеличении $m$ на единицу число $N(\varphi)$ увеличивается на $2n$, поэтому величина $q$ не изменяется.

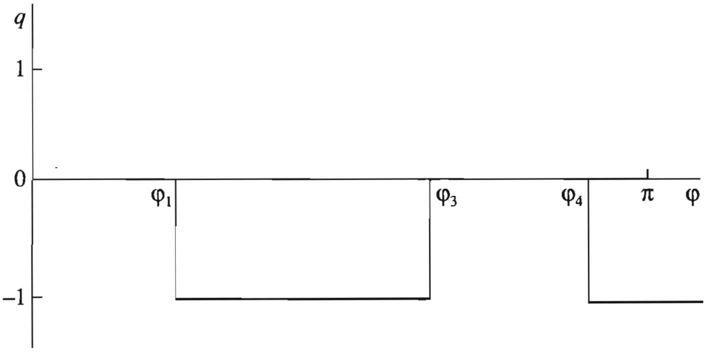
При $\lambda = \lambda_p(\varphi)$ соответствующее решение $\mathbf{x}_p(t, \varphi)$ удовлетворяет краевому условию (2.1), поэтому уравнение (2.1) имеет мультипликатор $\rho = \exp(i\varphi)$. Так как при этом имеется также сопряженный мультипликатор $\rho^* = \exp(-i\varphi)$, то $\lambda_p(\varphi) = \lambda_p(-\varphi)$. Следовательно, $q(\varphi) = q(-\varphi)$, т.е. $q(\varphi)$ – четная функция, поэтому достаточно рассматривать ее только на отрезке $[0, \pi]$.

Очевидно, что функция $q(\varphi)$ кусочно-постоянна, причем разрывы могут происходить только в тех точках $\varphi_k$, в которых некоторое собственное значение $\lambda_p(\varphi_k) = 1$ или $\lambda_p(\varphi_k) = 0$. При $\lambda = 0$ все мультипликаторы уравнения (2.1) равны единице, поэтому $\lambda_p(\varphi) \neq 0$ при $\varphi \in (0, \pi)$, т.е. здесь разрывы могут происходить только в тех точках $\varphi_k$, в которых имеется мультипликатор $\rho_k = \exp(i\varphi_k)$ $(\lambda_p(\varphi_k) = 1)$.

Пусть собственное значение $\lambda(\varphi_k) = 1$ имеет кратность $r$, причем $p$ функций $\lambda_p(\varphi)$ в этой точке убывают, $r - p$ возрастают. Очевидно, что приращение ИФ в этой точке

$$\Delta q(\varphi_k) = q(\varphi_k + 0) - q(\varphi_k - 0) = p - r \tag{3.2}$$

При $\varphi \to 0$ $n$ положительных собственных значений $\lambda_i(\varphi) \to 0$, поэтому функция $N(\varphi)$ разрывна в точке $\varphi = 0$, даже если $\lambda_p(0) \neq 1$. Здесь $N(+0) - N(0) = n$ и, следовательно, индекс $q = q(+0) - n$.




Фиг. 3

На фиг. 3 в качестве примера приведен график ИФ, отвечающий функциям $\lambda_i(\varphi)$, представленным на фиг. 1; при этом предполагалось, что $q = -n$, поэтому $q(+0) = 0$.

Как известно, решение уравнения (2.1) при начальном условии $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ можно представить в виде $\mathbf{x}(t) = W(t, \lambda)\mathbf{x}_0$, где $W(t, \lambda)$ – матрица решений, удовлетворяющая условию $W(0, \lambda) = I_{2n}$ (матрицант). Поэтому собственные значения $\lambda_i(\varphi)$ ($i = 1, 2, \ldots$) задачи (2.1) служат корнями уравнения $\det\|W(T, \lambda) - \exp(i\varphi)I_{2n}\| = 0$. Можно показать, что если $H(t) > 0$, то число $N(\varphi)$ равно числу нулей $t_i \in (0, T)$ (с учетом их кратности) уравнения $\det\|W(t, 1) - \exp(i\varphi)I_{2n}\| = 0$. Этот результат существенно упрощает вычисление ИФ.

Следующий результат будет часто использоваться в дальнейшем.

*Лемма* 3. При возрастании гамильтониана ИФ $q(\varphi)$ возрастает (не убывает).

Действительно, в силу (2.12) при возрастании гамильтониана положительные собственные значения задачи (2.1) убывают, поэтому число $N(\varphi)$ собственных значений на интервале (0, 1), а вместе с ним и ИФ могут только возрастать.

Из леммы 3, например, следует, что при возрастании гамильтониана точка $\varphi_3$ ИФ (фиг. 3) движется в отрицательном направлении, точки $\varphi_1$ и $\varphi_4$ – в положительном.

**4. Необходимое и достаточное условие сильной устойчивости.** Пусть устойчивая система (1.1) не является сильно устойчивой, тогда, по определению, существует непрерывный по $\varepsilon$ гамильтониан $H(t, \varepsilon)$ ($H(t, 0) = H(t)$), такой, что при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ система неустойчива, т.е. некоторый мультипликатор $\rho_i(\varepsilon)$ не лежит на единичной окружности. Так как при этом существует мультипликатор $\rho_q(\varepsilon) = 1/\rho_i^*(\varepsilon)$, то $\lim \rho_q(\varepsilon) = \lim \rho_i(\varepsilon) = \rho_i(0)$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, указанная ситуация возможна, если только мультипликатор $\rho_i(0)$ кратный. Следовательно, устойчивая система (1.1) сильно устойчива, если все мультипликаторы простые.

Как показал Крейн [4], указанное достаточное условие в общем случае не является необходимым. Необходимые и достаточные условия сильной устойчивости устанавливаются теоремой Крейна – Гельфанда – Лидского [1]. Ниже эта теорема доказана в терминах, отличных от классических.

Предположим, что уравнение (1.1) устойчиво. Пусть $\varphi_k$ ($k = 1, \ldots, l \le n$) – аргументы мультипликаторов на верхней полуокружности ($l = n$, если все мультипликаторы простые).

*Теорема* 1. Для сильной устойчивости уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$K = \sum_{k=1}^{l} |\Delta q(\varphi_k)| = n, \quad 0 < \varphi_k < \pi \tag{4.1}$$

*Доказательство*. Равенство (4.1), очевидно, означает, что на верхней (и, следовательно, на нижней) полуокружности лежат $n$ мультипликаторов, причем кратным мультипликаторам отвечают простые элементарные делители (как указано выше, эти условия гарантируют устойчивость). При условии (4.1) функции $\lambda_i(\varphi)$ $n$ раз пересекают прямую $\lambda = 1$ на $(0, \pi)$, причем если $\lambda_i(\varphi_k) = \ldots = \lambda_{i+r-1}(\varphi_k) = 1$ в некоторой точке $\varphi_k$, то все производные $\lambda_{p\varphi}(\varphi_k)$ $(p = i, \ldots, i + r - 1)$ имеют одинаковые знаки (иначе $|\Delta q(\varphi_k)| < r$ и условие (4.1) не выполняется). Отсюда при учете непрерывности гамильтониана $H(t, \varepsilon)$ и, следовательно, функций $\lambda_i(\varphi, \varepsilon)$ по $\varepsilon$ следует, что при достаточно малых $\varepsilon$ число пересечений остается равным $n$, т.е. устойчивость сохраняется. Таким образом, достаточность условия (4.1) доказана. Покажем, что оно необходимо.

Пусть в устойчивой системе условие (4.1) не выполнено ($K < n$). Это означает, что в некоторой точке $\varphi_k$ есть производные $\lambda_{i\varphi}(\varphi_k)$ с разными знаками либо $\lambda_p(0) = 1$ или $\lambda_p(\pi) = 1$ (т.е. имеется мультипликатор $\rho = 1$ или $\rho = -1$). В последних случаях в точке $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ также имеются производные $\lambda_{i\varphi}$ разных знаков ($q(\varphi) = q(-\varphi)$ и $q(\varphi) = q(2\pi - \varphi)$). Покажем, что при наличии таких производных система (1.1) не сильно устойчива.

Решения устойчивой системы можно представить в виде

$$\mathbf{x}_k(t) = \exp(i\varphi_k t/T)\mathbf{f}_k(t), \quad \mathbf{f}_k(t+T) = \mathbf{f}_k(t), \quad k = 1, \ldots, 2n \tag{4.2}$$

причем $\mathbf{x}_k(t)$ является собственной функцией задачи (2.1) при $\varphi = \varphi_k$, отвечающей собственному значению $\lambda = 1$. Без ограничения общности полагаем, что $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ отвечают собственным функциям $\lambda_1(\varphi)$ и $\lambda_2(\varphi)$, причем $\lambda_1(\varphi_1) = \lambda_2(\varphi_1) = 1$, $\lambda_{1\varphi}(\varphi_1) > 0$, $\lambda_{2\varphi}(\varphi_1) < 0$. Тогда в силу соотношения (2.8) можно принять

$$(\mathbf{x}_1, iJ\mathbf{x}_1) = (\mathbf{f}_1, iJ\mathbf{f}_1) = 1 \quad (\mathbf{x}_2, iJ\mathbf{x}_2) = (\mathbf{f}_2, iJ\mathbf{f}_2) = -1 \tag{4.3}$$

Пусть $X(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_{2n}(t)]$ – матрица решений уравнения (1.1), причем $\mathbf{x}_{k+n}(t) = \mathbf{x}_k^*(t)$. Положим $U(t, \varepsilon) = [\mathbf{u}_1(t, \varepsilon), \ldots, \mathbf{u}_{2n}(t, \varepsilon)]$, где

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{n+1}^* = \exp(\varepsilon t)[\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)], \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{n+2}^* = \exp(-\varepsilon t)[\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)] \tag{4.4}$$

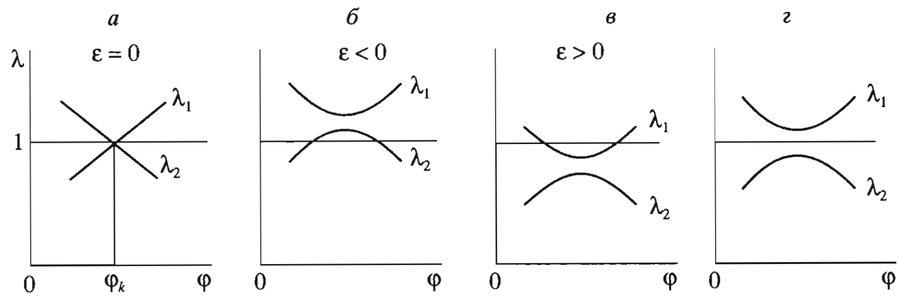
а остальные функции $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i(t)$.

В силу соотношений (4.3) и (4.4)

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, iJ\mathbf{u}_1) &= \exp(2\varepsilon t)[(\mathbf{f}_1, iJ\mathbf{f}_1) + (\mathbf{f}_2, iJ\mathbf{f}_2) = 0 \\ (\mathbf{u}_2, iJ\mathbf{u}_2) &= \exp(-2\varepsilon t)[(\mathbf{f}_1, iJ\mathbf{f}_1) + (\mathbf{f}_2, iJ\mathbf{f}_2) = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Остальные выражения $(\mathbf{u}_p, iJ\mathbf{u}_q)$ совпадают с $(\mathbf{x}_p, iJ\mathbf{x}_q)$ либо равны нулю, так как содержат равные нулю множители $(\mathbf{f}_p, iJ\mathbf{f}_q)$, где $p \neq q$. Таким образом, матрица $U(t, \varepsilon)$ удовлетворяет соотношению (1.6). Поэтому система (1.1) с гамильтонианом $H(t, \varepsilon) = J\dot{U}(t, \varepsilon)U(t, \varepsilon)^{-1}$ является канонической. Очевидно, гамильтониан $H(t, \varepsilon)$ непрерывен по $\varepsilon$ и при $\varepsilon = 0$ совпадает с $H(t, 0)$ (функции $\mathbf{u}_i(t, 0)$ являются линейными комбинациями $\mathbf{x}_i(t)$). Так как при любом $\varepsilon > 0$ решение $\mathbf{u}_1(t, \varepsilon)$ не ограничено при $t \to \infty$, то система неустойчива. Теорема доказана.

Пусть, например, кратность мультипликатора $\rho = \exp(i\varphi_k)$, фигурирующего в доказательстве теоремы, равна двум, тогда функции $\lambda_1(\varphi)$ и $\lambda_2(\varphi)$ имеют вид, представленный на фиг. 4, *а*. Положим $H(t, \varepsilon) = H(t) + \varepsilon Q(t)$, где $Q(t) > 0$. Так как $H(t, \varepsilon)$ возрастает по $\varepsilon$, то собственные значения $\lambda_p(\varepsilon)$ убывают, поэтому при $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon > 0$ графики $\lambda_1(\varphi, \varepsilon)$ и $\lambda_2(\varphi, \varepsilon)$ имеют вид, представленный соответственно на фиг. 4, *б* и 4, *в* (в случае общего положения при малом возмущении двукратное собственное значение $\lambda_k$ распадается на два простых). В обоих случаях число корней уравнения $\lambda_p(\varphi, \varepsilon) = 1$




Фиг. 4

в окрестности $\varphi_k$ равно двум, следовательно, при указанном возмущении система остается устойчивой.

Предположим теперь, что возмущение $\varepsilon Q(t)$ таково, что собственное значение $\lambda_1(\varphi_k, \varepsilon)$ возрастает, $\lambda_2(\varphi_k, \varepsilon)$ убывает по $\varepsilon$ (это возможно, когда матрица $Q(t)$ не знакоопределенная). Тогда при малых $\varepsilon$ ни одна из кривых $\lambda_1(\varphi, \varepsilon)$ и $\lambda_2(\varphi, \varepsilon)$ не пересекает прямую $\lambda = 1$ (фиг. 4, *г*), т.е. рассматриваемые мультипликаторы сходят с единичной окружности (построенное в теореме возмущение $H(t, \varepsilon)$ как раз принадлежит к данному типу).

Пусть $\varphi_i (i = 1, 2, \ldots)$, $\varphi_{i+1} > \varphi_i$ – произвольный набор точек на $(0, \pi]$, в которых индексная функция $q(\varphi)$ уравнения (1.1) непрерывна. Положим

$$S = \sum_i |q(\varphi_{i+1}) - q(\varphi_i)| \tag{4.6}$$

*Следствие* 1. Если

$$S = n \tag{4.7}$$

то уравнение (1.1) сильно устойчиво.

Справедливость этого утверждения следует из того очевидного факта, что $S \le K \le n$, поэтому равенство (4.7) гарантирует выполнение условия устойчивости (4.1).

Заметим, что если точки $\varphi_i (i = 1, 2, \ldots)$ отвечают последовательным экстремумам функции $q(\varphi)$, то $S = K$; это утверждение будет использоваться в дальнейшем.

В частности, полагая в (4.6) $\varphi_1 = +0$, $\varphi_2 = \pi$, получим следующее достаточное условие устойчивости.

*Следствие* 2. Если

$$|q(+0) - q(\pi)| = n \tag{4.8}$$

то уравнение (1.1) сильно устойчиво.

Очевидно, что при этом условии ИФ монотонно убывает либо возрастает на $(0, \pi)$.

Учитывая, что

$$q(+0) = N(0) + n - 2mn, \quad q(\pi) = N(\pi) - 2mn$$

запишем условие (4.8) в виде

$$|N(0) + n - N(\pi)| = n \tag{4.9}$$

Заметим, что если для некоторой области устойчивости выполняется условие (4.8), то при непрерывном изменении гамильтониана оно нарушается только тогда, когда появляется $T$-периодическое или $T$-антипериодическое решение; при этом сильная устойчивость также нарушается. Таким образом, для этой области условие (4.8) является не только достаточным, но и необходимым.

**5. Анализ областей сильной устойчивости.** Сильно устойчивые гамильтонианы $H_1(t)$ и $H_2(t)$ принадлежат одной области устойчивости, если существует кусочно-непрерывная по $t$ и непрерывная по $s$ симметрическая матрица $H(t, s) = H(t + T, s)$, такая, что $H(t, 0) = H_1(t)$, $H(t, 1) = H_2(t)$ и при $H = H(t, s)$ уравнение (1.1) сильно устойчиво для любого $s \in [0, 1]$ [1].

Необходимое и достаточное условие принадлежности $H_1(t)$ и $H_2(t)$ одной области устойчивости установлены И.М. Гельфандом и В.Б. Лидским [5]; соответствующая теорема – один из основных результатов данной теории. Вместе с тем необходимо отметить, что доказательство теоремы весьма трудоемко и использует достаточно сложный математический аппарат. К данной проблеме примыкают важные результаты В.А. Якубовича о направленной широте и выпуклости областей устойчивости [1, 9], доказательства которых также весьма трудоемки.

Ниже указанный круг задач решается на основе введенных ранее понятий и полученных результатов. Это позволило, используя минимальные математические средства, намного компактней изложить известную теорию и получить ряд новых результатов.

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_{p+1}$ $(q_1 = q(+0), q_{p+1} = q(\pi), p \le n)$ – последовательные экстремумы ИФ на $(0, \pi]$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p+1} \in (0, \pi]$ – соответствующие интервалы ($q(\varphi) = q_i$ при $\varphi \in \Gamma_i$). Набор целых чисел $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$, где $\mu_i = q_{i+1} - q_i$, назовем мультипликаторным типом уравнения (1.1). Из результатов разд. 3 ясно, что $\mu_i$ равно числу собственных значений $\lambda_i(\varphi) = 1$ на $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$, причем все производные $\lambda_{i\varphi}(\varphi)$ одного знака (отрицательны при $\mu_i > 0$ и положительны при $\mu_i < 0$). Например, для ИФ, представленной на фиг. 3, имеем $q_1 = 0$, $q_2 = -1$, $q_3 = 0$, $q_4 = -1$, поэтому $\mu = (-1, 1, -1)$.

Очевидно, что условие сильной устойчивости (4.1) эквивалентно равенству

$$M = \sum_{k=1}^{p} |\mu_k| = n \tag{5.1}$$

Этому условию удовлетворяют $2^n$ различных мультипликаторных типов [1].

При непрерывном изменении гамильтониана мультипликаторный тип изменяется только тогда, когда некоторый интервал $\Gamma_i$ стягивается в точку ($\varphi_i = \varphi_{i+1}$). Очевидно, что при этом величина $M$ уменьшается, поэтому условие (5.1) нарушается. Следовательно, для того чтобы гамильтонианы $H_1(t)$ и $H_2(t)$ принадлежали одной области устойчивости, необходимо, чтобы их мультипликаторные типы $\mu^1$ и $\mu^2$ совпадали. Это условие не является достаточным; дополнительное условие устанавливается следующей теоремой Гельфанда – Лидского [5].

*Теорема* 2. Для того чтобы гамильтонианы $H_1(t)$ и $H_2(t)$ с одинаковым мультипликаторным типом принадлежали одной области устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы их индексы были равны.

В оригинальном доказательстве этой теоремы [5] использовалось другое определение индекса гамильтониана. С использованием данного индекса $q$ доказательство существенно упрощается (см. [7]). Отметим лишь, что необходимость условия $q_1 = q_2$ следует непосредственно из определения индекса. Действительно, если сильно устойчивая кривая $H(t, s)$ ($H(t, 0) = H_1(t)$, $H(t, 1) = H_2(t)$) существует, то мультипликаторы $\rho_i(s) \ne 1$; следовательно, при $\varphi = 0$ собственные значения задачи (2.1) $\lambda_i(s) \ne 1$, в результате число собственных значений на $(0, 1)$, а вместе с ним и индекс $q(s)$ остается постоянным при $s \in [0, 1]$.

Таким образом, области устойчивости определяются мультипликаторным типом и индексом; будем обозначать их $G_\mu^q$ [1].

Если в задаче (2.1) $\lambda_i(\varphi) = 1$ и $\lambda_{i\varphi}(\varphi) > 0$, то в силу четности ИФ $q(\varphi)$ существует собственное значение $\lambda_i(-\varphi) = 1$, причем $\lambda_{i\varphi}(-\varphi) < 0$. Поэтому если пара мультипликаторов проходит точку $\rho = 1$, двигаясь по единичной окружности, то число собственных значений $\lambda_i \in (0, 1)$ изменяется на два. Учитывая это, нетрудно показать, что индекс сильно устойчивого гамильтониана $q = 2k$, где $k$ – целое число (оно равно индексу Гельфанда – Лидского). Можно также показать, что для любого гамильтониана с индексом $q$ можно построить гамильтониан с тем же мультипликаторным типом и индексом $q_i = q + 2i$, где $i$ – произвольное целое число.

В приложениях зачастую гамильтониан $H(t)$ точно не известен; в частности, во многих случаях можно указать лишь его двусторонние границы, т.е.

$$H_-(t) \le H(t) \le H_+(t) \tag{5.2}$$

Пусть при $H = H_-(t)$ и $H = H_+(t)$ уравнение (1.1) принадлежит одной области устойчивости $G_\mu^q$. Теорема Якубовича о направленной широте областей устойчивости [1] утверждает, что если уравнение (1.1) с гамильтонианом

$$H(t, s) = H_-(t) + s(H_+(t) - H_-(t))$$

сильно устойчиво для всех $s \in [0, 1]$, то оно устойчиво для любого $H(t)$, удовлетворяющего условию (5.2).

Следующая теорема позволяет установить устойчивость системы (1.1), (5.2) непосредственно по ИФ $q_-(\varphi)$ и $q_+(\varphi)$ гамильтонианов $H_-(t)$ и $H_+(t)$ без каких-либо дополнительных вычислений.

Пусть $\Gamma_i^-$ и $\Gamma_i^+$ $(i = 1, \ldots, p + 1)$ – указанные выше интервалы, на которых функции $q_-(\varphi)$ и $q_+(\varphi)$ имеют локальные экстремумы. Так как, по условию, индексы и мультипликаторные типы рассматриваемых систем одинаковы, то $q_-(\Gamma_i^-) = q_+(\Gamma_i^+)$, однако $\Gamma_i^-$ и $\Gamma_i^+$ могут, вообще говоря, не иметь общих точек. Предположим для определенности, что $\mu_1 = q_2 - q_1 > 0$, тогда $\Gamma_1$, $\Gamma_3$, $\Gamma_5$ ... отвечают минимумам, $\Gamma_2$, $\Gamma_4$, $\Gamma_6$, ... – максимумам ИФ.

*Теорема* 3. Если $\Gamma_i^-$ и $\Gamma_i^+$ $(i = 1, 3, \ldots)$ имеют общие точки $\varphi_i$, то система (1.1), (5.2) сильно устойчива.

*Доказательство.* Пусть $\varphi_i$ $(i = 2, 4, \ldots)$ – любые точки из интервалов $\Gamma_i^-$. Так как $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ – последовательные экстремумы индексной функции $q_-(\varphi)$ сильно устойчивого гамильтониана $H_-(t)$, то

$$S_- = \sum_{i=1}^{p} |q_-(\varphi_{i+1}) - q_-(\varphi_i)| = n$$

Покажем, что равенство $q_-(\varphi_i) = q_+(\varphi_i)$ справедливо и для четных $i$. Действительно, $q_-(\varphi_i) \le q_+(\varphi_i)$ в силу $H_-(t) \le H_+(t)$; с другой стороны, если $q_-(\varphi_i) < q_+(\varphi_i)$ для некоторого четного $i$, то

$$S_+ = \sum_{i=1}^{p} |q_+(\varphi_{i+1}) - q_+(\varphi_i)| > n$$

что невозможно. Так как при условии (5.2) $q_-(\varphi) \le q(\varphi) \le q_+(\varphi)$, то для функции $q(\varphi)$ при тех же $\varphi_i$ имеем $S = n$, т.е. уравнение (1.1) сильно устойчиво. Теорема доказана.

*Замечание* 1. Как видно из доказательства, при указанном условии интервалы $\Gamma_i^-$ и $\Gamma_i^+$ $(i = 1, \ldots, p+1)$ имеют общие точки. Поэтому из неравенства $q_-(\varphi_i) \le q_+(\varphi_i)$ следует, что $\Gamma_i^+ \in \in \Gamma_i^-$ $(i = 1, 3, \ldots)$ и $\Gamma_i^- \in \Gamma_i^+$ $(i = 2, 4, \ldots)$.

*Замечание* 2. Условие теоремы является необходимым в том смысле, что если оно не выполняется, то существует неустойчивый гамильтониан $H(t)$, удовлетворяющий неравенству (5.2). Действительно, пусть $H(t, s)$ возрастает по $s$, $H(t, 0) = H_-(t)$, $H(t, 1) = H_+(t)$, $\Gamma_i(s)$ $(i = 1, 3, \ldots)$ – интервалы, отвечающие минимумам ИФ $q(\varphi, s)$. Так как $q(\varphi, s)$ не убывает по $s$, то $\Gamma_i(s) \in \Gamma_i^-$ при малых $s$. Отсутствие общих точек у $\Gamma_i^+$ и $\Gamma_i^-$ означает, что при некотором $s_* < 1$ интервал $\Gamma_i(s)$ стягивается в точку, поэтому соответствующее уравнение (1.1) не сильно устойчиво (тем не менее, как показано ниже, при $H = H_+(t)$ оно может вновь принадлежать той же области устойчивости).

Области устойчивости $G_\mu^q$, для которых при любых $H_-(t)$, $H_+(t) \in G_\mu^q$ из неравенства (5.2) следует $H(t) \in G_\mu^q$ называются направленно выпуклыми [1]. Достаточное условие направленной выпуклости получено В.А. Якубовичем [9]; в принятых в данной работе терминах оно означает, что соответствующий мультипликаторный тип $\mu$ содержит не более двух чисел (что, в частности, заведомо выполняется при $n = 1$ и $n = 2$).

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие направленной выпуклости областей устойчивости (заметим, что утверждение о направленной выпуклости всех областей устойчивости, сделанное в работе автора [7], неверно).

*Теорема* 4. Для направленной выпуклости области $G_\mu^q$ необходимо и достаточно, чтобы

$$|\mu_i| > |\mu_{i-1}| \text{ или } |\mu_i| > |\mu_{i+1}|, \quad i = 2, \ldots, p-1 \tag{5.3}$$

*Доказательство.* Условие (5.3) означает, что последовательность $|\mu_i|$, $(i = 1, \ldots, p)$ возрастает при $i = 1, \ldots, k$ и убывает при $i = k+1, \ldots, p$, где $k \in [1, \ldots, p]$.

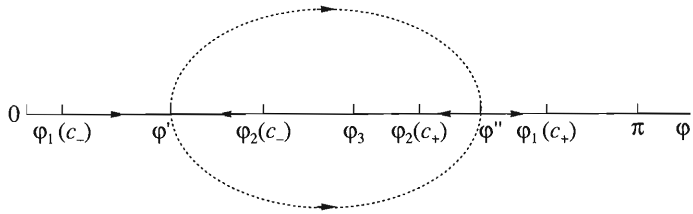
Пусть $H_-(t)$ и $H_+(t)$ принадлежат области $M_q^i$, удовлетворяющей условию (5.3). Предположим сначала, что $\mu_1 > 0$, $k$ нечетно либо $\mu_1 < 0$, $k$ четно, тогда

$$q_{k+1} = \sum_{r=1}^{k} \mu_r + q > q_i, \quad i \ne k+1$$

Функции $q_-(\varphi)$ и $q_+(\varphi)$ удовлетворяют неравенству $q_-(\varphi) \le q_+(\varphi)$ и имеют одинаковый максимум $q_k$; следовательно, найдется точка $\varphi_{k+1}$, в которой $q_-(\varphi_{k+1}) = q_+(\varphi_{k+1}) = = q_{k+1}$. При $\varphi < \varphi_{k+1}$ функции $q_-(\varphi)$ и $q_+(\varphi)$ имеют одинаковый минимум $q_k$, следовательно, $q_-(\varphi_k) = q_+(\varphi_k) = q_k$ при некотором $\varphi_k < \varphi_{k+1}$. Повторяя эти рассуждения, получим набор точек $\varphi_i (i = k, k-1, \ldots, 1$ и $i = k+1, \ldots, p+1)$, в которых все экстремумы функций $q_-(\varphi)$ и $q_+(\varphi)$ совпадают. Следовательно, выполняется условие теоремы 3, которое гарантирует сильную устойчивость гамильтониана $H(t)$ и тем самым доказывает достаточность условия (5.3).

Если $\mu_1 < 0$, $k$ нечетно либо $\mu_1 > 0$, $k$ четно, то доказательство совершенно аналогично (здесь $q_{k+1} < q_i$, $i \ne k+1$).

Докажем, что условие (5.3) необходимо. Если оно не выполняется, то хотя бы для одного $i$ справедливо неравенство $|\mu_{i-1}| \ge |\mu_i| \le |\mu_{i+1}|$. Покажем, что при этом можно построить неустойчивый гамильтониан $H(t)$, удовлетворяющий (5.2).




Фиг. 5

Положим $H_2(t, c) = H_2(t) + cI_{2n}$, где $H_2(t)$ – сильно устойчивый гамильтониан второго порядка с мультипликаторным типом $\mu = (-1, 1)$ (так что соответствующая индексная функция $q(\varphi)$ имеет минимум при $\varphi \in (\varphi_i, \varphi_2)$, где $\varphi_1$, $\varphi_2$ – координаты мультипликаторов на верхней полуокружности). Так как $H_2(t, c)$ и, следовательно, $q(\varphi, c)$ возрастают по $c$, то мультипликаторы $\rho_1(c)$ и $\rho_2(c)$ движутся навстречу друг другу (фиг. 5). Нетрудно подобрать $H_2(t, c)$ таким образом, что при $c = c'$ они встречаются в точке $\varphi'$, сходят с окружности и вновь встречаются в точке $\varphi'' \in (\varphi', \pi)$ при $c = c''$; в дальнейшем они продолжат движение по окружности в тех же направлениях. Таким образом, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем $\varphi_2(c'' + \varepsilon) > \varphi_2(c' - \varepsilon)$. Ясно, что уравнение (1.1) неустойчиво при $c \in (c', c'')$ и сильно устойчиво на некотором интервале $c \in \in (c'', c'' + \varepsilon)$, причем $\mu(c'' + \varepsilon) = (1, -1)$.

Добавим к рассматриваемой системе систему первого порядка с постоянным гамильтонианом

$$H_1(k) = \operatorname{diag}(k, k), \quad kT = \varphi_3 \in (\varphi_2(c_-), \varphi_2(c_+))$$

В результате в полученной системе третьего порядка с гамильтонианом $H(t, c)$ появится дополнительный мультипликатор $\rho_3 = \exp(i\varphi_3)$. Очевидно, что гамильтонианы $H_-(t) = = H(t, c_-)$ и $H_+(t) = H(t, c_+)$ имеют одинаковый мультипликаторный тип $\mu = (-1, 1, -1)$. Так как соответствующие индексы равны (при $c \in [0, c_+]$ ни один из мультипликаторов не попадает в точку $\rho = 1$), то эти гамильтонианы принадлежат одной области устойчивости. Таким образом, гамильтониан $H(t, c)$ возрастает по $c$ и принадлежит одной и той же области устойчивости при $c = c_-$ и $c = c_+$, однако уравнение (1.1) при $c \in \in (c', c'') \in (c_-, c_+)$ неустойчиво.

Гамильтониан $H_2(t, c)$ можно выбрать таким образом, чтобы индекс $H_-(t)$ и $H_+(t)$ имел любое наперед заданное четное значение. Таким образом, можно утверждать, что все области устойчивости с мультипликаторным типом $\mu = (-1, 1, -1)$ не являются направленно выпуклыми (т.е. найдутся такие $H_-(t), H_+(t) \in G_\mu^q$, для которых существуют неустойчивые гамильтонианы, удовлетворяющие условию (5.2)). Тот же вывод справедлив и для мультипликаторного типа $\mu = (1, -1, 1)$ (здесь следует рассмотреть гамильтониан $H_2(t, c)$, для которого $\varphi'' < \varphi'$). Объединяя $|\mu_i|$ систем указанного вида, получим систему порядка $n = 3|\mu_i|$ с мультипликаторным типом $\mu = (-|\mu_i|, |\mu_i|, -|\mu_i|)$ или $\mu = (|\mu_i|, -|\mu_i|, |\mu_i|)$. Его можно расширить до заданного добавлением систем первого порядка с мультипликаторным типом $\mu_+ = (+1)$ либо $\mu_- = (-1)$), мультипликаторы которых соответствующим образом расположены на интервале $(0, \pi)$. Построенная система имеет требуемый мультипликаторный тип и не является направленно выпуклой; следовательно, условие (5.3) необходимо. Теорема полностью доказана.

Как видно, направленная выпуклость области $G_\mu^q$ определяется лишь ее мультипликаторным типом и не зависит от индекса.

Так как условие (5.3) не зависит от $H_-(t)$ и $H_+(t)$, то теорема 4 в теоретическом отношении сильнее теоремы 3, однако с практической точки зрения ее преимущество незначительно. Действительно, коль скоро мультипликаторы уравнения (1.1) с гамильтонианами $H_-(t)$ и $H_+(t)$ найдены, проверка условий этих теорем одинаково элементарна.

Как отмечено выше, в приложениях обычно рассматриваются гамильтонианы вида $H(t, c_1, \ldots, c_p)$, где $c_i$ – некоторые параметры. Обозначим $C_k(k = 1, 2,\ldots)$ области сильной устойчивости уравнения (1.1) в пространстве этих параметров. Очевидно, что границы $C_k$ совпадают с границами некоторой области $G_\mu^q$, однако последняя может содержать несколько областей $C_k$. Так, в рассмотренном при доказательстве теоремы однопараметрическом семействе $H(t, c)$ гамильтонианы $H(t, c_-)$ и $H(t, c_+)$ принадлежат одной области устойчивости $G_\mu^q$, но различным областям (отрезкам) $C_k(c)$ (так как при $c \in (c', c'')$ уравнение (1.1) неустойчиво).

Предположим, что гамильтониан $H(t, c_1, \ldots, c_p)$ непрерывен по всем параметрам. Будем называть область $C_k$ направленно выпуклой по параметру $c_q$, если из условия $H(t, c_1, \ldots, c_q^1, \ldots, c_p)$, $H(t, c_1, \ldots, c_q^2, \ldots, c_p) \in C_k$ следует $H(t, c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_p) \in C_k$ для всех $c_q \in (c_q^1, c_q^2)$.

*Теорема* 5. Если гамильтониан $H(t, c_1, \ldots, c_p)$ возрастает либо убывает по параметру $c_q$, то области устойчивости $C_k$ направленно выпуклы по $c_q$.

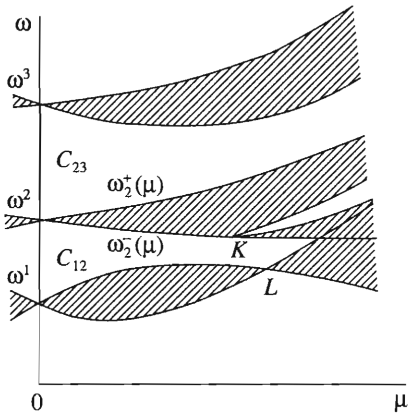
*Доказательство*. Предположим противное, тогда при некоторых $c_k(k \neq q)$ найдется отрезок $[c_q^1, c_q^2]$ такой, что $[c_q^1, c_0) \in C_k$, точка $c_0$ лежит на границе области $C_k$, а точки отрезка $[c_0, c_q^2)$ лежат внутри или на границе $C_k$. Таким образом, для любого $c \in [c_q^1, c_q^2]$ все мультипликаторы лежат на единичной окружности. Без ограничения общности полагаем, что гамильтониан $H(t, c_1, \ldots, c_p)$ возрастает по $c_p$, тогда ИФ $q(\varphi, c_q)$ также возрастает. При $c_q = c_0$ интеграл $\Gamma_i$, отвечающий некоторому минимуму $q_i$ функции $q(\varphi, c_q)$, стягивается в точку $\varphi_i$. Пусть в точке $\varphi_i$ встречаются $p$ и $q$ мультипликаторов, двигавшихся в противоположных направлениях. Соответствующие элементарные делители простые (иначе, как показано в разд. 3, при $c > c_0$ некоторые мультипликаторы не лежали бы на окружности). Поэтому они продолжают движение по окружности в тех же направлениях, так что при достаточно малом $\varepsilon$ уравнение (1.1) сильно устойчиво при $c_i \in [c_0 - \varepsilon, c_0)$ и $c_i \in (c_0, c_0 - \varepsilon]$. Однако при прохождении точки $c_0$ мультипликаторный тип системы изменяется (индекс в точке $\varphi_i$ увеличивается на величину $p + q$). Поэтому точки $c_0 - \varepsilon$ и $c_0 + \varepsilon$ должны принадлежать различным областям устойчивости $G_\mu^q$ и, следовательно, не могут принадлежать одной области $C_k$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, в отличие от областей $G_\mu^q$ свойством направленной выпуклости обладают все области $C_k$.

**6. К теории параметрического резонанса и параметрической стабилизации.** Параметрические колебания канонической системы обычно описываются уравнением вида

$$J\dot{\mathbf{x}} = H(\omega t, \mu)\mathbf{x} \tag{6.1}$$

где $H(\omega t) = H(\omega t + 2\pi)$, $\omega$ – частота параметрического возбуждения, $\mu$ – параметр, характеризующий его интенсивность. Области устойчивости на плоскости $\mu$, $\omega$ пред-




Фиг. 6

ставляют собой множества точек, которым отвечают сильно устойчивые гамильтонианы $H(\omega t, \mu)$. На границах этих областей все мультипликаторы лежат не единичной окружности, но уравнение (6.1) не сильно устойчиво.

Существует обширная литература, посвященная разработке конструктивных (численных и аналитических) методов для отыскания областей устойчивости уравнения (6.1) (см., например, [1, 10, 11]). Напротив, количество общих качественных утверждений об областях устойчивости ограничено, причем большинство из них получено асимптотическими методами в предположении малости параметра $\mu$ [11]. Ниже получены некоторые общие результаты об областях устойчивости, свободные от данного ограничения.

Заменой $\tau = \omega t$ уравнение (6.1) приводится к виду

$$J\mathbf{x}' = H(\tau, \mu, \omega)\mathbf{x}$$
$$H(\tau, \mu, \omega) = \omega^{-1}H(\tau, \mu), \quad H(\tau, \mu) = H(\tau + 2\pi, \mu) \tag{6.2}$$

где штрих означает дифференцирование по $\tau$.

Предположим, что $H(\tau, \mu) > 0$ при $\tau \in [0, 2\pi]$ и $\mu \in [0, \mu_0]$, а $H(\tau, 0) = H_0$ – постоянная матрица. В силу $H_0 > 0$ собственные значения матрицы $J^{-1}H_0$ мнимые [1], обозначим их $\pm i\omega_k (0 < \omega_1 \le \ldots \le \omega_n)$. При $\mu = 0$ уравнение (6.1) сильно устойчиво, за исключением точек [4]

$$\omega = \omega_{pkq} = (\omega_p + \omega_k)/q, \quad p, k = 1, \ldots, n; \quad q = 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$

В случае общего положения точки $\omega_{pkq}$ различны. При изменении $\omega$ в точках $\omega = \omega_{pkq}$ изменяется мультипликаторный тип системы, при $p = k$ и четном $q$ меняется также индекс гамильтониана (мультипликаторы проходят точку $\rho = 1$). Поэтому примыкающие к точке $\omega_{pkq}$ интервалы оси $\omega$ отвечают различным областям устойчивости $G_\mu^q$ и, следовательно, различным областям устойчивости на плоскости $\mu$, $\omega$ (например, областям $C_{12}$ и $C_{23}$ на фиг. 6, где $\omega^1$, $\omega^2$ и $\omega^3$ – соседние точки $\omega_{pkq}$ на оси $\omega$).

Непосредственным следствием теоремы 5 служит следующее утверждение.

*Следствие* 3. Если при некотором $\mu$ точки $\omega'(\mu)$ и $\omega''(\mu)$ принадлежат одной области устойчивости, то ей принадлежит и весь отрезок $[\omega'(\mu), \omega''(\mu)]$.

Действительно, гамильтониан $H(\tau, \mu, \omega)$ убывает по $\omega$, поэтому области устойчивости направленно выпуклы по $\omega$.

Практическое значение этого результата заключается в следующем. Для построения областей устойчивости на плоскости $\mu$, $\omega$ обычно вычисляют их границы $\omega_i^+(\mu)$ и $\omega_i^-(\mu)$ (фиг. 6), примыкающие к точкам $\omega_{pkq}$ оси $\omega$; в дальнейшем полагают, что множества точек между $\omega_i^+(\mu)$ и $\omega_i^-(\mu)$ представляют собой области неустойчивости, а множества точек между $\omega_i^+(\mu)$ и $\omega_{i+1}^-(\mu)$ – области устойчивости. Такой подход нуждается в обосновании, так как, вообще говоря, ниоткуда не следует, что между границами областей устойчивости не лежат "островки" неустойчивости. Следствие 3 как раз дает необходимое обоснование для случая $H(\omega t, \mu) > 0$.

Что касается областей неустойчивости, то, как было показано [11], при малых $\mu$ уравнение (6.1) действительно неустойчиво при всех $\omega \in (\omega_i^-(\mu), \omega_i^+(\mu))$. Детальный анализ, выходящий за рамки данной работы, показывает, что в общем случае между указанными границами могут лежать области устойчивости, примыкающие к некоторой границе (как, например, к точке $K$ на фиг. 6). Здесь реализуется сценарий, описанный при доказательстве теоремы 4, когда при возрастании гамильтониана сильно устойчивое уравнение становится неустойчивым, а затем возвращается в ту же область устойчивости.

В приложениях часто рассматриваются параметрические колебания систем, описываемых векторным уравнением второго порядка

$$(M(\omega t, \mu)\dot{\mathbf{y}})^{\cdot} + C(\omega t, \mu)\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad y \in R^n$$
$$C(\omega t, \mu) = C_0(\mu) + \mu C_1(\mu, \omega t) = C(\omega t + 2\pi, \mu), \quad M(\omega t, \mu) = M(\omega t + 2\pi, \mu) \tag{6.4}$$

где $M(\omega t, \mu)$ и $C(\omega t, \mu)$ – симметрические матрицы, причем $M(\omega t, \mu) > 0$ и $C_0(\mu) > 0$, а средние значения элементов матрицы $C_1(\omega t)$ на $[0, T]$ равны нулю.

Заменой $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1$, $M\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{x}_2$ уравнение (6.4) приводится к виду (6.1), где $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ и $H(\omega t, \mu) = \operatorname{diag}[M^{-1}(\omega t, \mu), C(\omega t, \mu)]$, поэтому все полученные выше результаты остаются справедливыми. Однако специальный вид данного гамильтониана позволяет установить некоторые дополнительные факты.

Прежде всего отметим, что использованное выше условие $H(\omega t, \mu) > 0$ излишне. Дело в том, что всюду выше условие $H(t) > 0$ необходимо лишь постольку, поскольку оно гарантирует выполнение неравенства

$$\int_0^T (H\mathbf{x}, \mathbf{x})dt > 0$$

где $\mathbf{x}(t)$ – решение уравнения (1.1), удовлетворяющее соотношению $\mathbf{x}(T) = \rho\mathbf{x}(0)$, $|\rho| = 1$. Между тем в рассматриваемом случае для этой цели достаточно лишь положительной определенности матрицы $M(\omega t, \mu)$. Действительно, с учетом уравнения (6.4) получим

$$\int_0^T (H\mathbf{x}, \mathbf{x})dt = 2\int_0^T (M\dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}})dt - (M\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y})\Big|_0^T \tag{6.5}$$

В силу соотношений $\mathbf{y}(T) = \rho\mathbf{y}(0)$, $\dot{\mathbf{y}}(T) = \rho\dot{\mathbf{y}}(0)$, $|\rho| = 1$ внеинтегральный член равен нулю, в результате требуемое неравенство выполняется при $\mathbf{y}(t) \neq \text{const}$. Поэтому при увеличении $\mu$ области устойчивости остаются направленно выпуклыми по $\omega$, даже когда неравенство $C(\omega t, \mu) > 0$ нарушается.

Заметим также, что специфика уравнения (6.4) позволила установить [12, 13] ряд утверждений о поведении некоторых границ областей устойчивости.

В заключение рассмотрим задачу о параметрической стабилизации неустойчивой системы

$$\ddot{\mathbf{y}} + [C_0 + \mu\omega^2 C_1 + \mu\omega^2 C_2(\omega t)]\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \in R^n \tag{6.6}$$

где $C_1 > 0$, а средние на $[0, 2\pi]$ значения элементов матрицы $C_2(\tau) = C_2(\tau + 2\pi)$ равны нулю.

Предположим, что матрица $C_0$ не положительно определенная, тогда уравнение (6.6) неустойчиво при $\mu = 0$. Как известно, при $\mu \neq 0$ и достаточно больших $\omega$ уравнение (6.6) может быть устойчивым; этот эффект получил название высокочастотной параметрической стабилизации. Известные критерии устойчивости уравнения (6.6) (см., например, [14, 15]) получены асимптотическими методами в предположении малости параметра $\mu$. Используя полученные выше результаты, установим точные границы области параметрической стабилизации на плоскости $\mu$, $\omega$.

Полагая $\tau = \omega t$, приведем уравнение (6.6) к виду

$$\mathbf{y}'' + [\omega^{-2}C_0 + \mu C_1 + \mu C_2(\tau)]\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{6.7}$$

Как было показано [11], при достаточно больших $\omega$ и малых $\mu$ уравнение (6.7) принадлежит той же области устойчивости, что и уравнение

$$\mathbf{y}'' + \mu C_1 \mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{6.8}$$

Рассмотрим соответствующие краевые задачи (2.1) ($H = \mathrm{diag}(I, \mu C_1)$, $T = 2\pi/\omega$, $m = 0$ в силу $H > 0$) с периодическими ($\varphi = 0$) и антипериодическими ($\varphi = \pi$) краевыми условиями. Наименьшие положительные собственные значения указанных задач равны соответственно

$$\lambda_1^p = \frac{\omega}{\omega_n\sqrt{\mu}}, \quad \lambda_1^a = \frac{\omega}{2\omega_n\sqrt{\mu}} \tag{6.9}$$

где $\omega_n$ – наибольшее собственное значение матрицы $C_1$. При малом $\mu$ имеем

$$\lambda_1^p > 1, \quad \lambda_1^a > 1 \tag{6.10}$$

Поэтому число собственных значений на (0, 1) $N(0) = N(\pi) = 0$. Следовательно, при условии (6.10) выполняется условие устойчивости (4.9), причем индекс стабилизированной системы $q = N(0) = 0$. Учитывая, что $q(+0) = q + n = n$, $q(\pi) = 0$, найдем, что ИФ $q(\varphi)$ монотонно убывает на $(0, \pi)$.

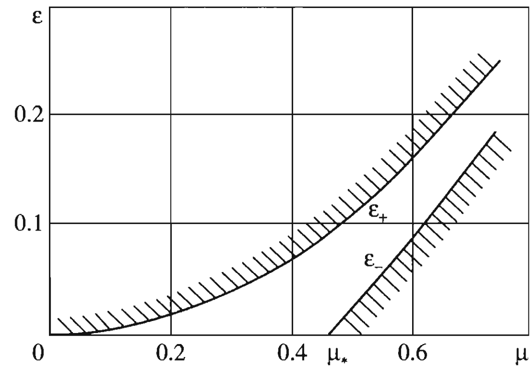
Таким образом, условиями параметрической стабилизации уравнения (6.6) служат неравенства (6.10). При непрерывном изменении $\mu$ и $\omega$ сильная устойчивость нарушается, если только $\lambda_1^p(\mu, \omega) = 1$ либо $\lambda_1^a(\mu, \omega) = 1$; эти равенства определяют границы области параметрической стабилизации.

Полагая $C_0 < 0$, рассмотрим данную область на плоскости $\mu$, $\varepsilon = 1/\omega^2$. Как видно из уравнения (6.7), при возрастании $\varepsilon$ гамильтониан убывает, следовательно, индексная функция $q(\varphi, \varepsilon)$ также убывает по $\varepsilon$. Так как $q(\varphi, \varepsilon)$ убывает по $\varphi$ на $(0, \pi)$, то устойчивость нарушается, когда интервал $\Gamma_1 = [0, \varphi_1(\varepsilon))$ стягивается к нулю. При этом мультипликатор $\rho_1(\varepsilon) = \exp(i\varphi_i(\varepsilon)) = 1$, поэтому на данной границе уравнение (6.7) имеет периодическое решение $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\tau + 2\pi)$ (т.е. $\lambda_1^p(\mu, \varepsilon) = 1$). Пусть $W(\tau, \mu, \varepsilon)$ – матрицант соответствующего уравнения (1.1); существование $2\pi$-периодического решения означает, что

$$\det\|W(2\pi, \mu, \varepsilon) - I_{2n}\| = 0 \tag{6.11}$$

Таким образом, при фиксированном $\mu$ верхняя граница $\varepsilon_+(\mu)$ области параметрической стабилизации является наименьшим корнем уравнения (6.11).

При уменьшении $\varepsilon$ ИФ $q(\varphi, \varepsilon)$ возрастает, поэтому устойчивость стабилизированной системы может нарушиться, если только интервал $\Gamma_n = (\varphi_n(\varepsilon), \pi]$ стянется в точку $\pi$. При этом мультипликатор $\rho_n(\varepsilon) = -1$, поэтому уравнение (6.6) имеет антиперио-




Фиг. 7

дическое решение $\mathbf{x}(\tau) = -\mathbf{x}(\tau + 2\pi)$ ($\lambda_1^a(\mu, \varepsilon) = 1$). Следовательно, нижняя граница $\varepsilon_-(\mu)$ области параметрической стабилизации является наименьшим корнем уравнения

$$\det\|W(4\pi, \mu, \varepsilon) - I_{2n}\| = 0 \qquad (6.12)$$

При малых $\mu$ уравнение (6.12) не имеет корней, поэтому $\varepsilon_-(\mu) = 0$.

В качестве примера рассмотрим известную задачу о параметрической стабилизации верхнего положения равновесия маятника [14]. Соответствующее уравнение приводится к виду

$$x'' + (-\varepsilon + \mu\cos\tau)x = 0; \quad \varepsilon = g/(l\omega^2), \quad \mu = a/l \qquad (6.13)$$

где $x$, $m$ и $l$ – угловая координата, масса и длина маятника, $g$ – ускорение силы тяжести; $a$ и $\omega$ – амплитуда и частота колебаний точки подвеса.

В рассматриваемом случае

$$W(\tau, \mu, \varepsilon) = \left\| \begin{matrix} x_1(\tau, \mu, \varepsilon) & x_2(\tau, \mu, \varepsilon) \\ x_1'(\tau, \mu, \varepsilon) & x_2'(\tau, \mu, \varepsilon) \end{matrix} \right\|$$

где $x_1(\tau, \mu, \varepsilon)$ и $x_2(\tau, \mu, \varepsilon)$ – решения уравнения (6.13) при начальных условиях $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ и $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ соответственно.

В соответствии с полученными результатами границы области параметрической стабилизации $\varepsilon_+(\mu)$ и $\varepsilon_-(\mu)$ определяются из уравнений (6.11) и (6.12). Используя вид периодического коэффициента, эти уравнения можно упростить. Именно в силу четности $\cos\tau$ периодические решения четны либо нечетны, т.е. совпадают с $x_1(\tau, \mu, \varepsilon)$ либо $x_2(\tau, \mu, \varepsilon)$ соответственно. Поэтому при условии (6.11) $x_1'(2\pi, \mu, \varepsilon) = 0$ либо $x_2(2\pi, \mu, \varepsilon) = 0$. Учитывая, что $\cos\tau$ убывает на $(0, \pi)$ и возрастает на $(\pi, 2\pi)$, можно показать, что наименьший корень $\varepsilon(\mu)$ имеет первое из этих уравнений. Наконец, в силу $x_1(\tau, \mu, \varepsilon) = x_1(2\pi - \tau, \mu, \varepsilon)$ оно эквивалентно уравнению $x_1'(\pi, \mu, \varepsilon) = 0$, которое и служит для определения верхней границы $\varepsilon_+(\mu)$ области параметрической стабилизации. Аналогично показывается, что нижняя граница $\varepsilon_-(\mu)$ определяется уравнением $x_1'(2\pi, \mu, \varepsilon) = 0$.

На фиг. 7 приведены границы $\varepsilon_+(\mu)$ и $\varepsilon_-(\mu)$ области устойчивости уравнения (6.13), найденные с помощью указанных уравнений. Как видно, при $\mu < \mu_* \approx 0.46$ верхнее положение маятника устойчиво при всех $\omega > (\varepsilon_+(\mu))^{-1/2}$, в то время как при $\mu > \mu_*$ увеличение $\omega$ сначала стабилизирует, а затем ($\omega > \varepsilon_-(\mu)^{-1/2}$) дестабилизирует систему.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
3. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1982 = *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
4. *Крейн М.Г.* Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Памяти А.А. Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 413–498.
5. *Гельфанд И.М., Лидский В.Б.* О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10. Вып. 1. С. 3–40.
6. *Крейн М.Г., Любарский Г.Я.* Об аналитических свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1962. Т. 26. № 4. С. 549–572.
7. *Зевин А.А.* Об областях устойчивости линейных канонических систем с периодическими коэффициентами // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 41–48.
8. *Зевин А.А.* Обобщенный индекс линейной канонической системы с периодическими коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 7–10.
9. *Якубович В.А.* О свойствах выпуклости областей устойчивости линейных гамильтоновых систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Вестн. ЛГУ. Сер. Математики, механики и астрономии. 1962. Т. 13. Вып. 3. С. 61–86.
10. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
11. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
12. *Зевин А.А.* Симметризация функционалов и ее применение в задачах механики // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 109–118.
13. *Zevin A.A.* Analysis of stability and instability regions in parametrically excited Hamiltonian systems // Nonlinear Dynamics. 1997. V. 12. № 4. P. 327–341.
14. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
15. *Челомей В.Н.* О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 3. С. 345–347.


Днепропетровск
e-mail:zevin@npkista.dp.ua

Поступила в редакцию
18.VIII.2002