УДК 531.36

© 2004 г. В. И. Каленова, В. М. Морозов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Исследуется устойчивость стационарных движений неголономных механических систем общего вида, обладающих циклическими координатами, под действием потенциальных и диссипативных сил. Установлена теорема об устойчивости, обобщающая теорему, доказанную ранее [1]. В качестве примера рассмотрена задача об устойчивости стационарного движения трехколесного экипажа.

1. Стационарные движения. Рассмотрим неголономную механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$. Скорости $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$ стеснены $n-l$ $(l<n)$ стационарными неголономными связями

$$\dot q_\chi = \sum_{r=1}^{l} b_{\chi r}(q)\dot q_r \tag{1.1}$$

Здесь и далее индексы принимают следующие значения: $i=1, \ldots, k$; $j=1, \ldots, n$; $p, r, s = 1,\ldots,l$; $\alpha, \beta, \gamma = k+1, \ldots l$; $\mu = m+1, \ldots, n$; $\rho = l+1, \ldots, m$; $\chi = l+1, \ldots, n$.

Предположим, что на систему действуют потенциальные силы (производные от силовой функции U) и диссипативные силы (производные от функции Релея F).

Уравнения движения неголономной механической системы в форме уравнений Воронца имеют вид [2, 3]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot q_r} - \frac{\partial(\theta+U)}{\partial q_r} - \sum_{\chi=l+1}^{n}\frac{\partial(\theta+U)}{\partial q_\chi}b_{\chi r} - \sum_{\chi=l+1}^{n}\theta_\chi\sum_{s=1}^{l}\nu_{\chi rs}\dot q_s + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot q_r} = 0 \tag{1.2}$$

где

$$\nu_{\chi rs} = \frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\chi s}}{\partial q_r} - \sum_{\chi'=l+1}^{n}\left(b_{\chi' r}\frac{\partial b_{\chi s}}{\partial q_{\chi'}} - b_{\chi' s}\frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_{\chi'}}\right)$$

Здесь θ, θ_χ, Φ – результаты исключения величин $\dot q_\chi$ при помощи соотношений (1.1) из выражений для T, $\partial T/\partial\dot q_\chi$, F, где T – кинетическая энергия системы,

$$2\theta = \sum_{r,s=1}^{l} a_{rs}(q)\dot q_r\dot q_s > 0, \quad \theta_\chi = \sum_{p=1}^{l}\theta_{\chi p}(q)\dot q_p, \quad 2\Phi = \sum_{r,s=1}^{l} f_{rs}(q_s)\dot q_s\dot q_r$$

Уравнения (1.2) совместно с уравнениями (1.1) представляют собой замкнутую систему порядка $n+l$ относительно q_j, $\dot q_r$.

Предположим, что выполнены условия [1, 3]

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial q_\mu} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_\mu} = 0, \quad \frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_\mu} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial(\theta+U)}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial b_{\rho r}}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{\chi=l+1}^{n}\theta_{\chi p}\nu_{\chi rs} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{1.4}$$

Условия (1.3) означают, что последние $n-m$ уравнений неголономных связей (1.1) – связи типа Чаплыгина и уравнения (1.2) можно рассматривать независимо от этих связей (первые $m-l$ связей – связи общего вида). Условия (1.4) означают, что координаты q_α – циклические в смысле определения [1, 3], остальные координаты q_i, q_ρ – позиционные.

Допустим, что при некоторых начальных условиях возможно стационарное движение (СД) системы, при котором позиционные координаты и циклические скорости постоянны:

$$q_i(t) = q_{i0}, \quad \dot q_i(t) = 0, \quad \dot q_\alpha(t) = \dot q_{\alpha 0} = \omega_\alpha, \quad q_\rho(t) = q_{\rho 0} \tag{1.5}$$

Для существования СД (1.5) необходимо, чтобы отсутствовала диссипация по циклическим скоростям, т.е.

$$\partial\Phi/\partial\dot q_\alpha = 0$$

При этом m постоянных величин q_{i0}, $\bar\omega_\alpha$, $q_{\rho 0}$ удовлетворяют m уравнениям

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 + \sum_{\rho=l+1}^{m}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\rho}b_{\rho i}\right)_0 + \\ &+\sum_{\gamma,\beta=k+1}^{l}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q_i} + \sum_{\rho=l+1}^{m}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q_\rho}b_{\rho i}\right)_0 + \sum_{\chi=l+1}^{n}\theta_{\chi\gamma}\nu_{\chi i\beta} - \sum_{\rho=l+1}^{m}\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_\rho}b_{\rho\gamma}\right\}\omega_\gamma\omega_\beta = 0\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma,\beta=k+1}^{l}\left\{\sum_{\chi=l+1}^{n}\theta_{\chi\gamma}\nu_{\chi\alpha\beta} + \sum_{\rho=l+1}^{m}\left[\frac{1}{2}b_{\rho\alpha}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q_\rho} - b_{\rho\gamma}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\rho}\right]\right\}_0\omega_\gamma\omega_\beta + \\ &+\sum_{\rho=l+1}^{m}\left\{b_{\rho\alpha}\frac{\partial U}{\partial q_\rho}\right\}_0 = 0\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\sum_{\alpha=k+1}^{l}(b_{\rho\alpha})_0\omega_\alpha = 0 \tag{1.8}$$

Нулевой индекс означает, что выражение вычислено для значений переменных, соответствующих СД (1.5).

Было отмечено [1, 3, 4], что в общем случае система (1.6)–(1.8) имеет лишь тривиальные относительно ω_α решения, отвечающие положениям равновесия системы. В ряде случаев среди уравнений (1.6)–(1.8) может оказаться m_1 ($m_1 < m$) независимых. Тогда рассматриваемая система может иметь семейство СД вида (1.5) размерности $m - m_1$.

Если выполнены условия, аналогичные условиям, приведенным ранее [5],

$$\sum_{\mu=m+1}^{n}(\theta_{\mu\beta}\nu_{\mu\alpha\gamma})_0 = -\sum_{\mu=m+1}^{n}(\theta_{\mu\gamma}\nu_{\mu\alpha\beta})_0, \quad (b_{\rho\alpha})_0 = 0 \tag{1.9}$$

то уравнения (1.7), (1.8) удовлетворяются при любых ω_α, и в системе существует многообразие СД, размерность которого не меньше суммы числа циклических координат $(l - k)$ и числа неголономных связей общего вида $(m - l)$.

Далее будем полагать, что условия (1.9) выполнены. Тогда система имеет многообразие СД размерности $m - k$, параметры которого (q_{i0}, $q_{\rho 0}$, ω_α) удовлетворяют системе уравнений

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 + \sum_{\rho = l+1}^{m} \left(\frac{\partial U}{\partial q_\rho} b_{\rho i}\right)_0 +$$

$$+ \sum_{\alpha,\,\beta = k+1}^{l} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_i} + \sum_{\rho = l+1}^{m} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\rho} b_{\rho i}\right) + \sum_{\chi = l+1}^{n} \theta_{\chi\alpha} \nu_{\chi i\beta}\right]_0 \omega_\alpha \omega_\beta = 0 \tag{1.10}$$

Обсудим условия (1.9). Эти условия выполняются, в частности, если

$$\sum_{\mu = m+1}^{n} (\theta_{\mu\beta} \nu_{\mu\alpha\gamma})_0 = 0, \quad (b_{\rho\alpha})_0 = 0 \tag{1.11}$$

Очевидно, что для выполнения условий (1.11) достаточно, чтобы [1, 3, 4, 6]

$$\sum_{\mu = m+1}^{n} \theta_{\mu\beta} \nu_{\mu\alpha\gamma} \equiv 0, \quad b_{\rho\alpha} \equiv 0 \tag{1.12}$$

Заметим, что условия (1.12) выполняются тождественно по позиционным координатам, а условия (1.11) – лишь на СД.

Как уже отмечалось [5], при исследовании устойчивости СД неголономных механических систем ранее [1, 3, 4, 6] всегда предполагалось выполнение условий (1.12), и эти условия действительно выполнены в известных задачах об СД тяжелого твердого тела (диска, тора и т. д.) на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, а также в задаче о движении "roller racer" [6]. Однако в ряде задач, в частности в задаче об устойчивости СД моноцикла [5, 7–9], условия

$$\sum_{\mu = m+1}^{n} \theta_{\mu\beta} \nu_{\mu\alpha\gamma} \equiv 0$$

не выполняются, но выполнены условия

$$\sum_{\mu = m+1}^{n} (\theta_{\mu\beta} \nu_{\mu\alpha\gamma})_0 = 0$$

В приведенной ниже задаче о СД трехколесного экипажа, представляющего собой неголономную систему со связями общего вида, выполнены условия (1.11), но не условия (1.12).

2. Исследование устойчивости. Выберем точку многообразия СД, определяемого соотношениями (1.10), и рассмотрим вопрос об устойчивости решения (1.5) системы уравнений (1.1), (1.2) по отношению к возмущениям переменных q_i, $\dot{q}_i$, $\dot{q}_\alpha$, q_ρ.

Введем отклонения

$$x_i = q_i - q_{i0}, \quad y_\alpha = \dot{q}_\alpha - \omega_\alpha, \quad z_\rho = q_\rho - q_{\rho 0}$$

Уравнения возмущенного движения при выполнении условий (1.9) в переменных $x(k \times 1)$, $y((l-k) \times 1)$, $z((m-l) \times 1)$ имеют вид

$$\begin{aligned} A\ddot{x} + C\dot{y} &= W_1 x + D_1\dot{x} + P_1 y + V_1 z + X(x, \dot{x}, y, z) \\ C^T\ddot{x} + B\dot{y} &= W_2 x + D_2\dot{x} + V_2 z + Y(x, \dot{x}, y, z) \\ \dot{z} &= W_3 x + D_3\dot{x} + V_3 z + Z(x, \dot{x}, y, z) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Формулы для элементов матриц A, C, ... аналогичны соответствующим формулам [3]; X, Y, Z – вектор-функции, содержащие члены порядка выше первого по введенным переменным.

При выполнении определенных условий структура уравнений возмущенного движения (2.1) может существенно упрощаться. Например, при выполнении условий (1.12) в уравнениях (2.1) матрицы W_2, V_2, W_3, V_3 – нулевые, т.е. уравнения, соответствующие циклическим скоростям, и уравнения, соответствующие уравнениям неголономных связей, не содержат линейных членов по переменным x_i, y_α, z_ρ и эти уравнения, очевидно, допускают $m-k$ линейных интегралов, которым соответствуют $m-k$ нулевых корней характеристического уравнения системы (2.1) [1, 3]. Наличие $(m-k)$-мерного многообразия СД, обусловливает существование $m-k$ нулевых корней в линеаризованной системе (2.1) и при отличных от нуля матрицах W_2, V_2, W_3, V_3, удовлетворяющих следующим условиям:

$$W_2W_1^{-1}P_1 = 0, \quad W_3W_1^{-1}P_1 = 0, \quad V_2 = W_2W_1^{-1}V_1, \quad V_3 = W_3W_1^{-1}V_1 \quad (\det W_1 \neq 0) \tag{2.2}$$

Покажем, что для неголономных систем со связями общего вида имеет место теорема, аналогичная теореме [5] об устойчивости СД систем Чаплыгина.

Нетрудно показать (см.[5]), что при условии $\det W_1 \neq 0$ замена переменных

$$\eta = B_0 y + C_0^T\dot{x} - D_{21}\chi, \quad \zeta = z - W_3W_1^{-1}A\dot{x} - W_3W_1^{-1}Cy - D_{31}x \tag{2.3}$$

где

$$B_0 = B - W_2W_1^{-1}C, \; C_0^T = C^T - W_2W_1^{-1}A, \; D_{21} = D_2 - W_2W_1^{-1}D_1, \; D_{31} = D_3 - W_3W_1^{-1}D_1$$

причем

$$\det B_0 \neq 0 \tag{2.4}$$

приводит систему (2.1) к виду

$$\begin{aligned} A_0\ddot{x} + D_0\dot{x} + W_0 x + P_0\eta + V_0\zeta &= X_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta) \\ \dot{\eta} = Y_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta), \quad \dot{\zeta} &= Z_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$A_0 = A - CB_0^{-1}C_0^T, \quad D_0 = -D_1 - P_0C_0^T + CB_0^{-1}D_{21} - V_1W_3W_1^{-1}A$$

$$W_0 = -W_1 - V_1D_{31} + P_0D_{21}, \quad P_0 = -(P_1 + V_1W_3W_1^{-1}C)B_0^{-1}, \quad V_0 = -V_1$$

Функции $X_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta)$, $Y_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta)$, $Z_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta)$ образованы из функций $X(x, \dot{x}, \eta, z)$, $Y(x, \dot{x}, \eta, z)$, $Z(x, \dot{x}, \eta, z)$с учетом замены переменных (2.3).

Очевидно, что характеристическое уравнение, отвечающее линеаризованной системе (2.5), всегда имеет $m-k$ нулевых корней, а остальные корни удовлетворяют уравнению

$$\det(A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0) = 0 \tag{2.6}$$

Если среди корней уравнения (2.6) есть корни с положительной действительной частью, то СД (1.5) неустойчиво согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению. Так как при указанных условиях число нулевых корней совпадает с размерностью многообразия СД (1.5) (так же, как и в рассмотренном ранее случае [1]), то, если все корни уравнения (2.6) имеют отрицательные действительные части, имеет место особенный критический случай нескольких нулевых корней и справедлива теорема Ляпунова–Малкина [10, 11].

Таким образом, имеет место утверждение, аналогичное теореме, сформулированной А.В. Карапетяном [1].

Теорема. СД (1.5) неголономной системы (1.1), (1.2), имеющей многообразие СД, размерность которого равна сумме числа циклических координат и числа неголономных связей общего вида, устойчиво (неустойчиво), если все корни уравнения (2.6) имеют отрицательные действительные части (по крайней мере один корень с положительной действительной частью). В случае устойчивости всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится при $t \to \infty$ к одному из возможных СД, принадлежащих указанному многообразию (1.10).

Важно отметить, что условие (2.4) очень существенно, что показывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим классическую задачу о движении саней Чаплыгина по наклонной плоскости [2, 3]. Тяжелое твердое тело опирается на наклонную плоскость P тремя ножками, две из которых абсолютно гладкие, а третья снабжена полукруглым лезвием; проекция центра масс тела на плоскость P лежит на прямой, перпендикулярной к лезвию и проходящей через точку K – точку соприкосновения лезвия с плоскостью P. В качестве обобщенных координат принимаются декартовы координаты ξ_1, ξ_2 (ось ξ_1 параллельна горизонтальной плоскости, ось ξ_2 направлена вверх по опорной плоскости P) точки K и угол поворота φ тела вокруг прямой, перпендикулярной плоскости P. Неголономная связь, выражающая условие отсутствия скольжения тела в направлении, ортогональном плоскости лезвия, описывается уравнением

$$\dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_1 \operatorname{tg}\varphi \tag{2.7}$$

Функция Лагранжа имеет вид [2]

$$L = \frac{m}{2}[(\dot{\xi}_1 + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\dot{\xi}_2 + l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + b^2\dot{\varphi}^2] - mg\sin\alpha(\xi_2 - l\cos\varphi)$$

Здесь m – масса, b – радиус инерции, α – угол наклона плоскости, l – расстояние от проекции центра масс на плоскость P до точки K. Координата ξ_1 – циклическая, ξ_2, φ – позиционные координаты. Предполагается, что на систему действуют диссипативные силы с функцией Релея $F = mh\dot{\varphi}^2/2$. Как было отмечено ранее [3], рассматриваемая связь (2.7) не является чаплыгинской.

Уравнения движения в форме уравнений Воронца (1.2) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\rho^2\ddot{\varphi} + \frac{l}{\cos\varphi}\ddot{\xi}_1 + \frac{l\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\dot{\xi}_1\dot{\varphi} + h\dot{\varphi} + \delta l\sin\varphi = 0\\
&\frac{l}{\cos\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\ddot{\xi}_1 + \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\dot{\xi}_1\dot{\varphi} + \delta\operatorname{tg}\varphi = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь

$$\rho^2 = b^2 + l^2, \quad \delta = g\sin\alpha$$

Уравнения (2.8) совместно с уравнением связи (2.7) представляют собой замкнутую систему относительно переменных ξ_1, ξ_2, φ.

Нетрудно убедиться в том, что эти уравнения допускают СД вида

$$\varphi(t) = \varphi_0, \quad (\varphi_0 = 0, \pi), \quad \dot\varphi(t) = 0, \quad \dot\xi_1 = \upsilon_0, \quad \xi_2 = \xi_{20} \tag{2.9}$$

принадлежащие двумерному многообразию и определяющие равномерное поступательное движение тела с произвольной скоростью υ_0, при этом лезвие движется параллельно оси ξ_1. Заметим, что в данном случае выполнено условие (1.11), но не (1.12) ($b_{\rho\alpha}(\varphi) = \operatorname{tg}\varphi \neq 0$, $b_{\rho\alpha}(\varphi_0) = 0$).

Линеаризованные в окрестности СД (2.9) уравнения (2.8), (2.7), соответствующие (2.1), имеют вид

$$\rho^2\ddot x + l\varepsilon\dot y = -h\dot x - l\varepsilon\delta x, \quad l\varepsilon\ddot x + \dot y = -\delta x, \quad \dot z = \upsilon_0 x \tag{2.10}$$

Здесь

$$x = \varphi - \varphi_0, \quad y = \dot\xi_1 - \upsilon_0, \quad z = \xi_2 - \xi_{20}, \quad \varepsilon = \cos\varphi_0 = \pm 1$$

В принятых обозначениях матрицы системы имеют вид

$$A = \rho^2, \quad C = \varepsilon l, \quad B = 1, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = -h_1, \quad D_3 = 0$$

$$P_1 = P_2 = 0, \quad V_1 = V_2 = V_3 = 0, \quad W_1 = -\varepsilon\delta l, \quad W_2 = -\delta, \quad W_3 = \upsilon_0$$

Отсюда следует, что $B_0 = 0$ и условие (2.4) не выполняется, поэтому сформулированная выше теорема неприменима.

В рассматриваемой системе размерность многообразия СД равна двум, но количество нулевых корней характеристического уравнения системы (2.10) равно трем. Эта система относится к обычному критическому по Ляпунову случаю нескольких нулевых корней.

Нетрудно убедиться, что СД (2.9) (в том числе и положение равновесия) неустойчиво, несмотря на наличие диссипативных сил по координате φ. В самом деле, вычтем из первого уравнения системы (2.8) второе уравнение, умноженное на $l\cos\varphi$. Тогда система (2.8) примет вид

$$b^2\ddot\varphi + h\dot\varphi = 0, \quad \ddot\xi_1 + \dot\xi_1\dot\varphi\operatorname{tg}\varphi = \frac{hl}{b^2}\dot\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2}\delta\sin 2\varphi$$

Соответствующие уравнения возмущенного движения примут вид

$$b^2\ddot x + h\dot x = 0, \quad \dot y + \gamma(t)y = \psi(t) \tag{2.11}$$

где

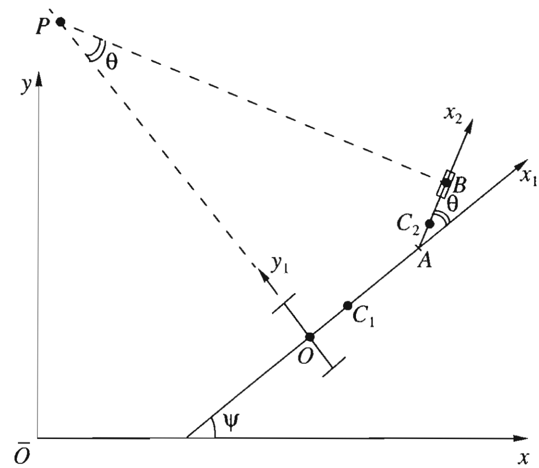
$$\gamma(t) = \dot x\operatorname{tg}(\varphi_0 + x)$$

$$\psi(t) = \frac{hl}{b^2}\dot x\cos(\varphi_0 + x) - \dot x\upsilon_0\operatorname{tg}(\varphi_0 + x) - \frac{\delta}{2}\sin 2(\varphi_0 + x)$$

Из первого уравнения системы (2.11) имеем

$$x(t) = C_1 + C_2\exp\left(-\frac{h}{b^2}t\right)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.



Выберем следующие начальные условия для системы (2.11):

$$t = 0\colon x(0) = x_0 \neq 0, \frac{\pi}{2}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (C_1 = x_0, C_2 = 0), \quad y(0) = 0$$

Тогда

$$x(t) \equiv x_0, \ \ \dot{x}(t) \equiv 0, \ \ \gamma(t) \equiv 0, \ \ \psi(t) = -\frac{\delta}{2}\sin 2x_0; \quad y(t) = -\left(\frac{\delta}{2}\sin 2x_0\right)t \to \infty \quad \text{при } t \to \infty$$

Заметим, что в случае действия диссипативных сил по всем координатам φ, ξ_1, ξ_2 с функцией Релея

$$F = \frac{m}{2}[h\dot{\varphi}^2 + h_1(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2)]$$

СД (2.9) представляют собой только положения равновесия ($\upsilon_0 = 0$), из которых при выполнении определенных условий положение равновесия $\varphi = 0$ устойчиво, а $\varphi = \pi$ неустойчиво [2, 3].

3. Стационарные движения трехколесного экипажа. Рассмотрим задачу о СД трехколесного экипажа, движущегося по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Пренебрегая инерцией вращающихся колес, представим упрощенную модель этого экипажа (трицикла) как систему двух твердых тел [12]: тело массы m_1, состоящее из корпуса и жестко соединенной с ним оси, на которую насажены два колеса, и тело массы m_2, представляющее собой вертикальную стойку с передним колесом. Ранее был рассмотрен [6] частный случай этой задачи (задача о движении “roller racer”).

Положение системы определим координатами x, y, θ, ψ (фигура): x, y – координаты точки O – середины заднего моста в неподвижной системе координат $\bar{O}xy$, ψ – угол между осью симметрии экипажа Ox_1 и неподвижной осью $\bar{O}x$, точка A – проекция точки крепления стойки на ось Ox_1, θ – угол, определяющий положение оси Ax_2 передней части трицикла относительно оси Ox_1, точка B – проекция центра переднего колеса на плоскость xy, C_1, C_2 – проекции центров масс первого и второго тел на оси Ox_1 и Ax_2 соответственно. Обозначим

$$b = AB, \quad l = OA, \quad l_1 = OC_1, \quad d = AC_2$$

(Смещением центра масс трицикла, возникающим при повороте на угол θ передней части пренебрегаем.)

Уравнения неголономных связей, выражающие условия отсутствия составляющих скоростей точек O и B в поперечном направлении, имеют вид

$$\begin{aligned} &-\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = 0 \\ &-\dot{x}\sin(\psi+\theta) + \dot{y}\cos(\psi+\theta) + l\dot{\psi}\cos\theta + b(\dot{\psi}+\dot{\theta}) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Без ограничения общности предположим, что $\sin\psi \neq 0$, и разрешим уравнения (3.1) относительно $\dot{x}$, $\dot{\psi}$

$$\dot{x} = \dot{y}\,\mathrm{ctg}\psi, \quad \dot{\psi} = \frac{1}{r}\left[\frac{\sin\theta}{\sin\psi}\dot{y} - b\dot{\theta}\right]; \quad r = b + l\cos\theta \tag{3.2}$$

Замечание. При использовании принятой ранее процедуры [6, 12] исключения $\dot{x}$, $\dot{y}$ из уравнений (3.1) предполагается, что $\sin\theta \neq 0$. Это предположение фактически исключает возможность исследования простейшего движения трицикла по прямой с постоянной скоростью v_0 (так как в этом случае $\theta = 0$ или $\theta = \pi$). Кроме того, при выводе линеаризованных в окрестности прямолинейного движения уравнений в [12] допущена ошибка.

Выражение для кинетической энергии при учете связей (3.2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{2r^2}\Big\{ &[(m_1+m_2)r^2 + (I_1+I_2)\sin^2\theta]\frac{\dot{y}^2}{\sin^2\psi} + \\ &+ [I_1 b^2 + I_2 l^2\cos^2\theta]\dot{\theta}^2 - 2(I_1 b - I_2 l\cos\theta)\frac{\sin\theta}{\sin\psi}\dot{\theta}\dot{y}\Big\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$I_1 = I_{11} + m_1 l_1^2 + m_2 l^2, \quad I_2 = I_{22} - 2m_2 bd$$

Здесь I_1, I_2 – приведенные моменты инерции, I_{11} – момент инерции первого тела относительно вертикальной оси, проходящей через точку C_1, I_{22} – момент инерции второго тела относительно вертикальной оси, проходящей через точку A.

Первое уравнение (3.2) выражает неголономную связь типа Чаплыгина, второе уравнение – неголономную связь общего вида.

Предполагается, что на систему действуют диссипативные силы, производные от функции Релея $f = h\dot{\theta}^2/2$.

Введем переменную $v = \dot{y}/\sin\psi$ – проекцию скорости точки O на ось симметрии экипажа. Тогда уравнения движения системы, составленные на основе уравнений Воронца, примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[F_1(\theta)\dot{\theta} + F_2(\theta)v] = R_1(\theta)\dot{\theta}^2 + R_2(\theta)\dot{\theta}v + R_3(\theta)v^2 - h\dot{\theta} \\ &\frac{d}{dt}[F_3(\theta)\dot{\theta} + F_4(\theta)v] = S_1(\theta)\dot{\theta}^2 + S_2(\theta)\dot{\theta}v \\ &\dot{\psi} = \frac{1}{r}(v\sin\theta - b\dot{\theta}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь

$$F_1(\theta) = \frac{1}{r^2}(I_1 b^2 + I_2 l^2\cos^2\theta)$$

$$F_2(\theta) = F_3(\theta) = \frac{1}{r^2}(I_2 l\cos\theta - I_1 b)\sin\theta$$

$$F_4(\theta) = m_1 + m_2 + \frac{1}{r^2}(I_1 + I_2)\sin^2\theta$$

$$R_1(\theta) = -\frac{1}{r^3}(I_2 l\cos\theta - I_1 b)bl\sin\theta$$

$$R_2(\theta) = -\left[\frac{1}{r^3}(I_1 + I_2)bl\sin^2\theta + m_2 dl^2 r\cos\theta + b^2 rM\right]$$

$$R_3(\theta) = \frac{1}{r^2}(bM - m_2 dl)\sin\theta$$

$$S_1(\theta) = \frac{1}{r^3}[(I_2 l\cos\theta - I_1 b)(l + b\cos\theta) + (Mb^2 + m_2 dl^2\cos\theta)r]$$

$$S_2(\theta) = \frac{1}{r^3}[(I_1 + I_2)(l + b\cos\theta) + (m_2 dl - Mb)r]\sin\theta$$

$$M = m_1 l_1 + m_2 l$$

Уравнения движения системы (3.4) допускают частные решения

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \upsilon = \upsilon_0, \quad \dot{\psi}_0 = \upsilon_0\sin\theta_0/r_0 \tag{3.5}$$

описывающие СД.

Параметры θ_0, υ_0 удовлетворяют условию

$$\upsilon_0(bM - m_2 dl)\sin\theta_0 = 0 \quad \text{или} \quad \upsilon_0[m_1 bl_1 + m_2 l(b - d)]\sin\theta_0 = 0 \tag{3.6}$$

(предполагается, что $r_0 = b + l\cos\theta_0 \neq 0$).

Следует обратить внимание на то, что условие (3.6) соответствует первому условию (1.11), а условие вида (1.12) здесь не выполняется.

Условие (3.6) выполняется, если

1) $\sin\theta_0 = 0$, υ_0 – произвольная постоянная величина; СД – прямолинейное движение с постоянной скоростью $\upsilon_0 \neq 0$, и произвольным углом $\psi_0 \neq 0, \pi$ к оси x ($\upsilon_0 = \dot{y}_0/\sin\psi_0$);

2) $\upsilon_0 = 0$; СД – равновесие (величина θ_0 произвольная);

3) $m_1 bl_1 + m_2 l(b - d) = 0$; при этом ($\theta_0$, υ_0 – произвольные величины ($\theta_0 \neq 0, \pi$)); в частности, это условие удовлетворяется при $b = d$, $l_1 = 0$ или при $m_2 = 0$, $l_1 = 0$ [6]; СД – вращение системы вокруг мгновенного центра – точки P ($OP = r_0/\sin\theta_0$) (см. фигуру).

Таким образом, существует двумерное многообразие СД, размерность которого равна сумме числа циклических координат (y) и числа неголономных связей общего вида, определяемых вторым соотношением (3.2).

Линеаризованные в окрестности рассматриваемого СД уравнения в отклонениях

$$\xi = \theta - \theta_0, \quad \eta = \upsilon - \upsilon_0, \quad \zeta = \psi - \psi_0$$

имеют вид

$$A\ddot{\xi} + C\dot{\eta} = W_1\xi + D_1\dot{\xi} + P_1\eta, \quad C^T\ddot{\xi} + B\dot{\eta} = D_2\dot{\xi}, \quad \dot{\zeta} = W_3\xi + D_3\dot{\xi} + P_3\eta \tag{3.7}$$

Здесь

$$A = F_1(\theta_0), \quad C = F_2(\theta_0), \quad W_1 = \left(\frac{dR_3}{d\theta}\right)_0 \upsilon_0^2, \quad D_1 = \left[R_2(\theta_0) - \left(\frac{dF_2}{d\theta}\right)_0\right]\upsilon_0 - h$$

$$P_1 = 2R_3(\theta_0)\upsilon_0, \quad B = F_4(\theta_0), \quad D_2 = \left[S_2(\theta_0) - \left(\frac{dF_4}{d\theta}\right)_0\right]\upsilon_0$$

$$W_3 = \frac{l + b\cos\theta_0}{r_0^2}\upsilon_0, \quad D_3 = -\frac{b}{r_0}, \quad P_3 = \frac{\sin\theta_0}{r_0}$$

Характеристическое уравнение системы (3.7) имеет два нулевых корня, что соответствует наличию двумерного многообразия СД; остальные корни определяются из уравнения

$$B(A\lambda^2 - D_1\lambda - W_1) - (C\lambda - P_1)(C^T\lambda - D_2) = 0$$

В случае *1* ($\sin\theta_0 = 0$, $\varepsilon = \cos\theta_0 = \pm 1$) $C = 0$, $P_1 = 0$, $D_2 = 0$. Условие (2.4) в данной задаче выполнено, так как $B_0 = B \neq 0$. При этом в выражении (2.6) $A_0 = A$, $D_0 = -D_1$, $W_0 = W_1$ и условия устойчивости прямолинейного движения (3.6), согласно доказанной выше теореме, имеют вид $W_1 < 0$, $D_1 < 0$, т.е.

$$\varepsilon K_1 < 0, \quad hr_0^2 + \upsilon_0 K_2 > 0 \tag{3.8}$$

где

$$K_1 = m_1 l_1 b + m_2 l(b - d); \quad K_2 = I_{22}l - \varepsilon I_1 b + m_1 b^2 l_1 + m_2 l(b^2 - 2bd + \varepsilon dl)$$

Указанное СД неустойчиво при строгом нарушении хотя бы одного из неравенств (3.8).

Заметим, что величина D_1 отлична от нуля и линейно зависит от величины υ_0. Это означает, что при отсутствии диссипативных сил ($h = 0$) и, если параметры системы таковы, что $K_2 > 0$, СД при $\upsilon_0 > 0$ устойчиво, причем асимптотически по части переменных (θ, $\dot\theta$), и неустойчиво при движении в противоположном направлении ($\upsilon_0 < 0$).

Таким образом, в данной задаче, как и в задаче о кельтском камне [3, 4, 13], наглядно проявляются обе особенности неголономных систем – асимптотическая по части переменных устойчивость консервативной системы и зависимость характера устойчивости от направления движения.

Из первого условия (3.8) следует, что для устойчивости прямолинейного движения требуется, чтобы $\theta = \pi$, так как, как правило, $K_1 > 0$. Это означает, что переднее колесо должно быть вынесено "назад" по отношению к направлению движения.

Заметим, что при наличии диссипации из второго условия (3.8) следует, что движение в обратном направлении ($\upsilon_0 < 0$) при $K_2 > 0$ может быть устойчивым при $\theta = 0$ ($\varepsilon = 1$), если скорость движения не слишком велика.

Сделанные выводы об устойчивости прямолинейного движения трицикла согласуются с результатами работы [14].

В случае *3* выполнено соотношение $K_1 = 0$. Тогда $R_3 \equiv 0$, $P_1 = 0$, $W_1 = 0$. Условие устойчивости такого СД имеет вид

$$\frac{\upsilon_0}{r_0^3}\{(m_1 + m_2)[(I_2 l\cos\theta_0 - I_1 b)(l + b\cos\theta_0) + m_2 dlr_0^2] + (I_1 + I_2)m_2 dl\sin^2\theta_0\} +$$

$$+\left[(m_1 + m_2) + \frac{(I_1 + I_2)\sin^2\theta_0}{r_0^2}\right]h > 0$$

В частности, при $h = 0$ и $m_2 = 0$ имеем

$$\frac{v_0(I_1 l\cos\theta_0 - I_1 b)(l + b\cos\theta_0)}{b + l\cos\theta_0} > 0$$

что совпадает с результатами работы [6].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00194) и программы "Университеты России".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян А.В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 418–426.
2. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
3. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 132 с.
4. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
5. *Каленова В.И., Морозов В.М.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 192–199.
6. *Zenkov D., Bloch A., Marsden J.* The energy-momentum method for the stability of nonholonomic systems // Dynamics and Stability of Systems. 1998. V. 13. P. 123–166.
7. *Каленова В.И., Морозов В.М., Шевелева Е.Н.* Устойчивость и стабилизация движения одноколесного велосипеда // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 4. С. 49–58.
8. *Морозов В.М., Каленова В.И., Шевелева Е.Н.* Об устойчивости и стабилизации движения одноколесного экипажа (моноцикла) // Материалы научн. школы-конф. "Мобильные роботы и мехатронные системы". М.: Изд-во МГУ, 1999. С. 31–43.
9. *Морозов В.М., Назаренко А.Ю.* Об одной механической модели одноколесного экипажа // Материалы научн. школы-конф. "Мобильные роботы и мехатронные системы". М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 227–237.
10. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 272–331.
11. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
12. *Лобас Л.Г.* Неголономные модели колесных экипажей. Киев: Наук. думка, 1986. 231 с.
13. *Карапетян А.В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.
14. *Девянин Е.А.* О движении колесных роботов // Докл. Научной школы-конф. "Мобильные роботы и мехатронные системы". М.: Ин-т механики МГУ, 1999. С. 169–200.

Москва
e-mail:kalenova@imec.msu.ru
morozov@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
22.V.2003