

УДК 539.3:534.1

© 2004 г. Р. Е. Лампер, В. Е. Левин

МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СОСУДОВ С ЖИДКОСТЬЮ

Излагается вариант метода расчета собственных продольных колебаний упругого осесимметричного сосуда, частично заполненного жидкостью. В основу метода положено сочетание граничных элементов для жидкости и конечных элементов для упругого сосуда. Приводятся примеры, показывающие эффективность предлагаемого метода.

Основные постановки задач о динамическом взаимодействии тонкостенного упругого сосуда с заполняющей его жидкостью обсуждались ранее [1, 2]. Предложенные алгоритмы расчета динамических характеристик продольных колебаний сосуда, ориентированные на использование ЭВМ, в определенной степени решили часть проблемы для сосудов простых форм [3, 4]. Дальнейшее их развитие связано с прогрессом вычислительной техники [5, 6].

Развитие конструктивных схем ракет-носителей требует совершенствования расчетных алгоритмов. Имеющиеся вычислительные комплексы типа NASTRAN не всегда позволяют получить приемлемое решение.

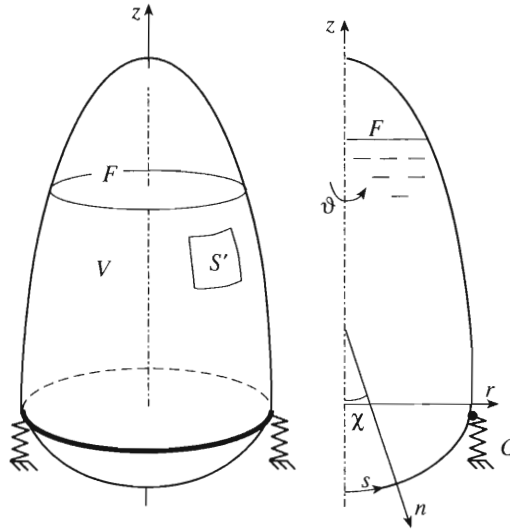
Предлагаемый метод построен на более гибком описании геометрии сосуда с использованием построенных эффективных конечных элементов, что позволяет уточнить результаты расчетов по известным методикам и проводить расчеты сосудов сложной геометрии с учетом их внутренних конструктивных особенностей.

1. Постановка задачи. Рассматривается частично заполненный несжимаемой вязкой жидкостью тонкостенный упругий сосуд, составленный из оболочек вращения, подкрепленных шпангоутами. Движение жидкости считается потенциальным; пренебрегается энергией волнообразования на свободной поверхности жидкости.

Свяжем с сосудом цилиндрическую систему координат z, r, ϑ (фиг. 1). Внешнее крепление сосуда реализуется через шпангоуты с помощью кольцевых подвесок, обладающих распределенной жесткостью в продольном и радиальном направлениях, а также угловой жесткостью. В расчетной схеме жесткие связи представляются достаточно большими жесткостями в нужных направлениях. Внутри сосуда могут находиться стержневые конструкции, не влияющие на течение жидкости. К шпангоутам могут быть прикреплены дополнительные массы. Рассматриваются малые гармонические продольные колебания сосуда с круговой частотой ω (все рассматриваемые функции имеют временной множитель $\exp(i\omega t)$).

Такая конструкция с жидкостью представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Для ее приближенного описания системой с конечным числом степеней свободы ниже используются два известных метода: метод конечных элементов (МКЭ) для представления упругих элементов сосуда и метод граничных элементов (МГЭ) для моделирования движений жидкости в сосуде.

При постановке задачи для оболочек в рамках МКЭ имеются разные возможности выбора аппроксимирующих функций формы. Требования к таким функциям известны [7]: эти функции должны восстанавливать перемещение элемента как жесткого целого, а при уменьшении размеров элемента они должны описывать состояние постоянной деформации. Известны проблемы, связанные с построением



Фиг. 1

криволинейного элемента, обладающего такими свойствами [8, 9]. Отдельным вопросом является описание исходной геометрии объекта в виде, удобном для эффективного применения ЭВМ, в частности для упрощения процедуры увеличения количества конечных элементов.

Метод граничных элементов предъявляет особые требования к функциям, аппроксимирующим границу жидкого объема, и к функциям формы, описывающим перемещения этой границы.

2. Описание меридиана осесимметричного сосуда. Параметрические уравнения меридиана – плоской кривой, наиболее просто выглядят в случае, когда параметром является длина дуги кривой s . В рамках такого описания можно приближенно построить участок кривой по информации в соседних узлах m и $m + 1$ следующим образом [10].

Радиус-вектор участка кривой запишем в виде

$$\mathbf{r}(s) = x_k(s)\mathbf{i}_k, \quad k = 1, 2$$

где \mathbf{i}_k – орты глобальной системы координат.

Производная вектора \mathbf{r} по дуге имеет единичную длину. Обозначим $dx_1/ds = \cos\chi$, $dx_2/ds = \sin\chi$, где χ – угол наклона нормали к кривой. Зададим закон изменения угла χ по длине кривой в виде

$$\chi(s) = \left(1 - \frac{s}{l}\right)\chi_m + \frac{s}{l}\chi_{m+1} + B\left(1 - \frac{s}{l}\right)\frac{s}{l} \quad (2.1)$$

где χ_m, χ_{m+1} – углы в точках m и $m + 1$ соответственно, B и l – подлежащие определению неизвестный коэффициент и неизвестная длина кривой между точками.

Для неизвестных B и l получим систему двух нелинейных уравнений

$$x_{1m+1} = x_{1m} + \int_0^l \cos \left[\left(1 - \frac{s}{l}\right)\chi_m + \frac{s}{l}\chi_{m+1} + B\left(1 - \frac{s}{l}\right)\frac{s}{l} \right] ds$$

$$x_{2m+1} = x_{2m} + \int_0^l \sin \left[\left(1 - \frac{s}{l}\right)\chi_m + \frac{s}{l}\chi_{m+1} + B\left(1 - \frac{s}{l}\right)\frac{s}{l} \right] ds$$

Для решения системы применяется метод Ньютона.

Поскольку в аппроксимации (2.1) заложена возможность описания постоянной кривизны кривой, то по изложенному алгоритму с высокой степенью точности восстанавливается элемент окружности любого угла раствора, и в частности прямолинейный участок.

Таким образом, криволинейный контур сосуда восстанавливается на ЭВМ по координатам отдельных точек и направлениям нормалей к контуру в этих точках. В процессе аппроксимации вычисляются длины криволинейных участков.

3. Описание движения жидкости по МГЭ. Принятые допущения относительно движений жидкости в объеме V являются основанием для введения потенциала перемещений жидкости ϕ [11]. Потенциал ϕ удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta\phi = 0 \text{ в } V; \quad \phi = 0 \text{ на } F, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \text{ на } S'$$

где \mathbf{U} – вектор упругого перемещения стенки сосуда, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к стенке, F – свободная поверхность жидкости, S' – смоченная поверхность сосуда.

Для формулировки задачи о колебаниях сосуда с жидкостью нужно найти связь между граничными значениями ϕ и $\partial\phi/\partial n$. Такая связь между соответствующими значениями в конечном числе точек смоченного контура сосуда устанавливается в рамках прямого метода граничных элементов (ПМГЭ).

Реализация ПМГЭ основана на применении интегральной теоремы Грина для двух гармонических в области V функций: искомого потенциала ϕ и фундаментального решения уравнения Лапласа для осесимметричного течения жидкости. Фундаментальное решение задается в таком виде, чтобы получаемое по ПМГЭ решение для потенциала перемещений удовлетворяло условию на свободной поверхности жидкости точно. В рассматриваемой задаче фундаментальное решение имеет вид

$$\Phi(x, x^{(i)}) = G(x, x^{(i)}) - \bar{G}(x, x^{(i)})$$

$$G(x, x^{(i)}) = \frac{1}{\pi r_1} K \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right), \quad \bar{G}(x, x^{(i)}) = \frac{1}{\pi r_1^*} K \left(1 - \frac{r^{*2}}{r_1^{*2}} \right)$$

где $K(\dots)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, x – текущая точка границы области, $x^{(i)}$ – точка коллокации на границе, r – расстояние между точками x и $x^{(i)}$, r_1 – расстояние между точкой x и точкой $x^{(i)}$, симметричной точке $x^{(i)}$ относительно оси симметрии области, занятой жидкостью, r^* и r_1^* – расстояния между точкой x и точками, симметричными точкам $x^{(i)}$ и $x^{(i)}$ относительно поверхности жидкости.

В формуле Грина интегрирование проводится по смоченной поверхности. Схема получения разрешающих соотношений ПМГЭ стандартна при использовании граничных элементов с постоянным распределением неизвестных граничных функций. В этом случае точки коллокации берутся в середине каждого элемента, а для согласования гранично-элементной и конечно-элементной схем на каждом конечном элементе берется по два граничных элемента. Сингулярные интегралы вычисляются по специальной квадратурной формуле, содержащей логарифмы. В результате разрешения системы уравнений ПМГЭ относительно неизвестных узловых значений потенциала ϕ функция кинетической энергии жидкости (кинетическая энергия без множителя ω^2 – квадрата круговой частоты) сводится к квадратичной форме неизвестных узловых значений $d\phi/d\mathbf{n}$, которые, в свою очередь, выражаются через узловые значения обобщенных перемещений конечно-элементной схемы сосуда.

При использовании в качестве $d\phi/dn$ соответствующих функций формы смоченного конечного элемента оболочки проблемы стыковки МКЭ и МГЭ схем не возникает.

Применение этого подхода позволяет записать функцию кинетической энергии жидкости в виде квадратичной формы обобщенных узловых неизвестных конечно-элементной схемы

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{T}_f \mathbf{Y}$$

где \mathbf{T}_f – матрица присоединенных масс жидкости, \mathbf{Y} – вектор обобщенных узловых неизвестных конечно-элементной схемы.

4. Конечно-элементное описание оболочки. В рассматриваемой задаче форма оболочек сосуда до и после его деформации определяется плоской кривой – меридианом. Построение конечного элемента такого сосуда эквивалентно построению элемента для плоского криволинейного стержня. Функции формы конечного элемента плоского стержня предлагается получать в результате интегрирования задаваемых изменений углов поворота нормали к стержню и деформации вдоль стержня [12]. Связь деформации ϵ , угла поворота нормали к элементу $\Delta\chi$ и производных глобальных компонентов вектора перемещений U_1, U_2 по дуге s контура сосуда имеет вид

$$dU_k/ds = \epsilon dx_k/ds + (-1)^k \Delta\chi dx_{3-k}/ds, \quad k = 1, 2 \quad (4.1)$$

Эти соотношения сохраняют свой вид и при другой параметризации осевой линии стержня. Их можно положить в основу построения функций формы.

Возможны различные варианты представления деформации и угла поворота конечного элемента. Здесь предположим, что неизвестная деформация ϵ постоянна на элементе. Угол поворота нормали к элементу при его деформировании зададим в виде

$$\Delta\chi(s) = \Delta\chi_j(1 - L(s)) + \Delta\chi_{j+1}L(s) + B(1 - L(s))L(s); \quad L(s) = \frac{s - s_j}{s_{j+1} - s_j} \quad (4.2)$$

где \mathbf{j} и $\mathbf{j} + 1$ – узлы конечного элемента, $\Delta\chi_j, \Delta\chi_{j+1}$ – углы поворота нормалей к элементу в этих узлах, s_{j+1}, s_j – координаты узлов элемента вдоль дуги, B – постоянная, подлежащая определению вместе с ϵ .

Обозначим: U_{1j}, U_{2j} – компоненты перемещения узла j , U_{1j+1}, U_{2j+1} – компоненты перемещения узла $j + 1$.

Интегрируя равенства (4.1) с использованием соотношения (4.2), получим

$$U_k(s) = U_{kj} + \epsilon[x_k(s) - x_{kj}] + (-1)^k \int_j^s \Delta\chi(y) \frac{dx_{3-k}}{dy} dy, \quad k = 1, 2$$

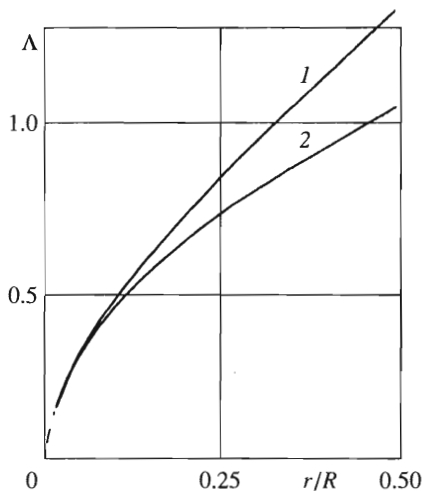
Постоянные B и ϵ определяются из условий в узле $j + 1$

$$U_k(s_{j+1}) = U_{kj+1}, \quad k = 1, 2$$

и выражаются через обобщенные узловые перемещения конечного элемента.

В частном случае прямого стержня описанный подход приводит к известным функциям формы [7].

Приведем пример эффективности построенного конечного элемента. Рассматривался плоский стержень с осевой линией в виде полуокружности, консольно закрепленный в вертикальной стенке и нагруженный на свободном конце нагрузками в своей плоскости: сосредоточенным моментом и сосредоточенными силами. При рав-



Фиг. 2

ных безразмерных нагрузках максимальная ошибка обнаруживается в определении горизонтального перемещения свободного конца. Она составляет для одного конечного элемента 0.6% по сравнению с точным решением.

Указанный способ составления функций формы используется и при построении криволинейного конечного элемента оболочки сосуда.

Выражения для кинетической и потенциальной энергии сухого сосуда записываются в виде

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{T}_\zeta \mathbf{Y}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{\Pi}_\zeta \mathbf{Y}$$

\mathbf{T}_ζ – матрица масс сосуда и его шпангоутов, $\mathbf{\Pi}_\zeta$ – матрица жесткости упругих элементов сосуда, включая оболочки, шпангоуты и распределенные опоры.

Задача о собственных продольных колебаниях сосуда с жидкостью формулируется как обобщенная задача на собственные значения

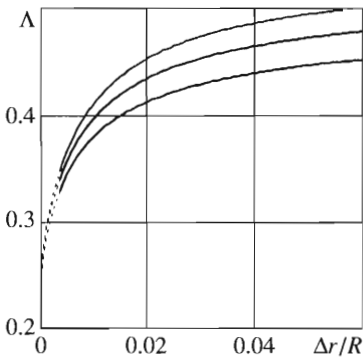
$$(\mathbf{\Pi}_\zeta - \omega^2 (\mathbf{T}_\zeta + \mathbf{T}_f)) \mathbf{Y} = 0$$

Эта задача решается методом итераций в подпространстве.

5.1. Результаты расчетов. Динамические характеристики сосуда сферической формы с жидкостью при средних заполнениях анализировались в рамках многих методик (см., например, [3–6]). При увеличении уровня заливки сосуда радиус зеркала жидкости r стремится к нулю. Частота низшего тона, связанного с объемным расширением сосуда, при малых r пропорциональна \sqrt{r} . Такая асимптотика низшего тона выявляется и в расчете по рассмотренному алгоритму.

На фиг. 2 показаны зависимости собственного числа от радиуса зеркала жидкости для первого упругого тона свободного (кривая 1) и закрепленного в продольном направлении вдоль экватора сферического сосуда (кривая 2). Сосуд заполнен водой. Параметры сосуда: $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ – плотность его материала, $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ – его модуль упругости, $\nu = 0.3$ – коэффициент Пуассона, $R = 1 \text{ м}$ – радиус образующей, $h = 0.005 \text{ м}$ – толщина стенки. Собственное число Λ связано с круговой частотой ω соотношением

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\rho R^3 (1 - \nu^2)}{Eh}} \omega \tag{5.1}$$



Фиг. 3

Тороидальный сосуд, свободный или закрепленный лишь по экватору, имеет низкую частоту упругих колебаний по сравнению с остальными частотами. Так, для сухого кругового тороидального сосуда внутреннего радиуса 1 м, внешнего радиуса 3 м из дюралюминия толщиной 10 мм, закрепленного по внутреннему экватору, получены первые три частоты 11 Гц, 167 Гц, 174 Гц, а для тора, наполовину заполненного водой, 4.5 Гц, 60 Гц, 68 Гц. Причина появления низкой первой частоты объясняется геометрией торообразной оболочки. Вблизи линий нулевой гауссовой кривизны срединной поверхности оболочки реализуется напряженное состояние, близкое к чисто моментному. На этой форме колебаний внутренняя и внешняя части тороидального сосуда, разделенные

линиями нулевой гауссовой кривизны, двигаются вдоль оси симметрии сосуда практически как недеформируемые элементы.

Тон колебаний, определяемый объемным расширением сосуда при больших заливках, как и в рассмотренном выше случае сферы, также имеет низкую частоту, причем это не связано с характером опирания сосуда.

Эффект вырождения тона колебаний, определяемого объемным расширением тороидального сосуда, наиболее наглядно проявляется в случае закрепленного по обоим экваторам сосуда, когда отсутствует описанный выше низкочастотный тон. Расчетом этот эффект выявляется и во всех других случаях закрепления.

На фиг. 3 показана зависимость собственного числа (5.1) вырождающегося тона колебаний от ширины кольца свободной поверхности жидкости Δr для тороидального сосуда, заполненного водой (верхняя кривая – свободный сосуд, средняя кривая – сосуд, закрепленный в продольном направлении по внутреннему экватору, нижняя кривая – сосуд, закрепленный в продольном направлении по обоим экваторам). Характеристики тороидального сосуда: радиус внешнего экватора 3 м, радиус внутреннего экватора 1 м, толщина стенки $h = 0.01$ м, плотность материала, его модуль упругости и коэффициент Пуассона – те же, что в предыдущем случае сферического сосуда.

На фиг. 3 не показаны тона, связанные с особенностями геометрии тороидального сосуда; они практически не зависят от ширины кольца.

В приведенных расчетах число конечных элементов не превышало 20 на полуокружность образующей сосуда.

Приведем некоторые результаты сопоставления расчетов с экспериментальными данными. Рассчитывался полностью заполненный водой сосуд полусферической формы, жестко зашпательный по экватору. Характеристики сосуда: $\rho = 1180 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ – плотность материала оболочки, $E = 4.016 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ – модуль упругости материала, $\nu = 0.4$ – коэффициент Пуассона, $R = 0.133 \text{ м}$ – радиус образующей сосуда, $h = 0.0007 \text{ м}$ – толщина стенки. В таблице приведены частоты осесимметричных колебаний полусферического сосуда с такими параметрами, полученные в эксперименте [13] и в расчете по разработанному алгоритму (N – количество конечных элементов).

Частоты, Гц	Эксперимент	Расчет			
		$N = 10$	20	30	40
f_1	216	213	212.6	212.5	212.4
f_2	305	325.8	324.2	323.8	323.8
f_3	370	401.1	399.8	399.3	399.1

Сопоставление значений первого собственного числа, полученного при $N = 10$ и найденного в результате решения задачи для защемленной моментной оболочки с использованием полиномов Лежандра при несколько ином условии на поверхности жидкости (плавающая крышка) [14], дает отличие в 0.8 %.

Авторы посвящают статью 80-летию чл.-кор. РАН Э.И. Григолюка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балабух Л.И. Взаимодействие оболочек с жидкостью и газом // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. С. 935–944.
2. Григолюк Э.И. Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью // Тр. 7-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 755–778.
3. Александрович Л.И., Лампер Р.Е. Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. С. 25–27.
4. Шклярчук Ф.Н. О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966. М.: Наука. 1966. С. 835–840.
5. Богадица Э.С., Брусиловский А.Д., Шмаков В.П. Применение численного метода к расчету собственных колебаний составных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 1. С. 81–85.
6. Григорьев В.Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью: Тр. 3-го семинара. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978. С. 55–60.
7. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method in Engineering Science. L.: McGraw-Hill, 1971 = Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542с.
8. Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т. Статика и динамика сложных структур. М.: Машиностроение, 1989. 247 с.
9. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники. М.: Машиностроение, 1988. 390 с.
10. Лампер Р.Е., Левин В.Е. Применение различных аппроксимаций в методах конечных и граничных элементов для решения прикладных задач статики и динамики упругих тел // Науч. вестн. НГТУ. 2000. № 2 (9). С. 76–90.
11. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 3–20.
12. Левин В.Е. Функции формы конечного элемента криволинейного стержня // Динамика сплошной среды: Математические проблемы механики сплошных сред. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО РАН. 2000. Вып. 116. С. 191–193.
13. Самойлов Е.А., Павлов Б.С. Колебания полусферической оболочки, заполненной жидкостью // Изв. вузов. Авиац. техн. 1964. № 3. С. 79–86.
14. Кобычкин В.С., Шмаков В.П., Яблоков В.А. Осесимметричные колебания полусферической оболочки, частично заполненной жидкостью // Инж. ж. МТТ. 1968. № 5. С.46–54.

Новосибирск
e-mail: pust@nstu.nsk.ru
levin@craft.nstu.ru

Поступила в редакцию
20.11.2003