

УДК 539.4

© 2004 г. А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ПРЯМОМ ТЕРМОУПРУГОМ ФАЗОВОМ ПРЕВРАЩЕНИИ

В различных постановках получены аналитические решения связной задачи устойчивости прямоугольной пластины из сплава с памятью формы, претерпевающей прямое термоупругое фазовое превращение под действием сжимающих нагрузок. Установлено, что критические нагрузки, соответствующие связной постановке задачи, могут быть многократно ниже, чем получающиеся при решении несвязной задачи. Получена невыпуклая область устойчивости на плоскости действующих нагрузок.

Уникальные механические свойства сплавов с памятью формы (СПФ) связаны с происходящими в них термоупругими фазовыми превращениями. При охлаждении такого сплава в соответствующем температурном интервале в нем происходит прямое превращение из аустенитной фазы в мартенситную, сопровождающееся падением модуля Юнга (до трехкратного в никелиде титана). Если прямое превращение происходит под действием механических напряжений, то в СПФ кроме упругой развивается еще и фазовая деформация, многократно превышающая упругую, соответствующую тем же напряжениям. Падение упругой жесткости и рост деформативности СПФ при прямом превращении свидетельствуют об опасности потери устойчивости в случае, если этот фазовый переход происходит под действием сжимающих напряжений.

Устойчивость равновесия элементов из СПФ исследовалась в [1–6]. Экспериментально установлено [5], что образцы в виде тонких полосок из никелида титана, не теряющие устойчивость изотермически ни в аустенитном, ни в мартенситном состоянии, могут потерять устойчивость при вызванном охлаждением переходе из первого состояния во второе под действием той же нагрузки. Критические нагрузки потери устойчивости при прямом мартенситном превращении оказались многократно ниже критических нагрузок изотермической потери устойчивости в наименее жестком мартенситном фазовом состоянии, так что обнаруженное явление нельзя объяснить только падением упругих модулей при прямом мартенситном превращении.

В данной работе для качественного описания экспериментально обнаруженного явления получены аналитические решения задачи устойчивости для прямоугольной пластины из СПФ, претерпевающей прямое мартенситное превращение под действием одно- и двустороннего равномерного нагружения. Задача решается в различных постановках с целью выбора той из них, которая приводит к наименьшим значениям критических нагрузок.

1. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная пластина постоянной толщины h и размерами a и b вдоль осей декартовой системы координат Ox_1 и Ox_2 , расположенной в срединной плоскости пластины (начало системы координат O совпадает с одним из углов пластины). Пластина нагружена в аустенитном фазовом состоянии равномерно распределенными по противоположным кромкам постоянными нормальными поверхностными силами p_{11} , p_{22} , действующими в направлении соответственно осей Ox_1 , Ox_2 (положительной считается сжимающая нагрузка), и медленно охлаждается от температуры начала до температуры окончания прямого мартенситного превращения. В каждый момент времени все точки пластины имеют одинаковую температуру. Разыскиваются минимальные нагрузки, при которых в

процессе прямого превращения наряду с тривиальной плоской формой пластины возможны искривленные формы равновесия. Рассмотрение ведется в рамках теории малых деформаций и гипотезы Кирхгоффа – Лява (для полных деформаций). Задача устойчивости решается в линеаризованной постановке.

Используется упрощенный вариант предложенной ранее [7–9] системы определяющих соотношений для сплавов с памятью формы (СПФ). Для случая прямого превращения при плоском напряженном состоянии эта система сводится к следующей:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \tag{1.1}$$

$$d\varepsilon_{11}^{(2)} = \left(\frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22}}{3\sigma_{(1)}} + a_0\varepsilon_{11}^{(2)} \right) dq, \quad d\varepsilon_{22}^{(2)} = \left(\frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11}}{3\sigma_{(1)}} + a_0\varepsilon_{22}^{(2)} \right) dq \tag{1.2}$$

$$d\varepsilon_{12}^{(2)} = \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{(1)}} + a_0\varepsilon_{12}^{(2)} \right) dq$$

$$q = \sin\left(\frac{\pi M_1 + k\sigma_i - T}{2 M_1 - M_2}\right), \quad q = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\pi \frac{M_1 + k\sigma_i - T}{M_1 - M_2}\right) \right] \tag{1.3}$$

$$M_2 + k\sigma_i \leq T \leq M_1 + k\sigma_i, \quad kd\sigma_i - dT > 0$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\sigma_{11} - \mu(q)\sigma_{22}}{E(q)}, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{\sigma_{22} - \mu(q)\sigma_{11}}{E(q)}, \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = \frac{\sigma_{12}}{2G(q)} \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_1} + \frac{1-q}{E_2}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_1} + \frac{1-q}{G_2}, \quad \mu(q) = \frac{E(q)}{2G(q)} - 1 \tag{1.6}$$

Здесь ε_{ij} , $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ – полная, упругая и фазовая деформации, σ_{ij} , σ_i – тензор и интенсивность напряжений, q – внутренняя переменная состояния, трактуемая как объемная доля мартенситной фазы, для которой используется первое [9] или второе [10] соотношение (1.3), T , M_1 , M_2 – текущая температура, а также температуры начала и завершения прямого мартенситного превращения в свободном от напряжений материале, третье и четвертое соотношения (1.3) – условия осуществления прямого мартенситного превращения, $E(q)$, $G(q)$, $\mu(q)$ – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона СПФ, зависимости которых от параметра фазового состава даются формулами (1.6), являющимися следствием гипотез об аддитивности потенциалов Гиббса и осреднения по Рейссу [11] (индексами 1 и 2 помечены значения соответствующих модулей для мартенситного и аустенитного состояний), a_0 , $\sigma_{(1)}$, k – постоянные материала для СПФ.

В соответствии с уравнениями (1.1), (1.2) при решении задачи объемный эффект реакции мартенситного превращения и чисто температурные деформации не учитываются, а из соотношений (1.3), (1.4) ясно, что при подсчете температур начала и конца прямого перехода пренебрегается влиянием поперечных касательных напряжений.

Пусть в соотношениях (1.3) можно положить $k = 0$. Возникающие на основе такой системы краевые задачи можно, следуя принятой терминологии [11], классифицировать как несвязные, поскольку в этом случае распределение по материалу параметра фазового состава может быть найдено независимо от решения задачи определе-

ния напряженно-деформированного состояния. Предполагая, что переход в смежную форму равновесия происходит значительно быстрее процесса охлаждения, а снижающаяся температура не испытывает возмущений ($\delta T = 0$), можно прийти к концепции “фиксированного фазового состава” [6], следуя которой, можно считать, что при переходе в смежную форму равновесия фазовый состав не меняется ($\delta q = 0$). В несвязной постановке система (1.1)–(1.6) используется для анализа невозмущенного состояния, а для формулировки линеаризованных уравнений устойчивости вместо (1.2), (1.3) используются соотношения

$$\delta q = 0, \quad \delta \varepsilon_{ij}^{(2)} = 0 \quad (1.7)$$

Случай $k \neq 0$ соответствует связной постановке задачи устойчивости. Здесь даже при $\delta T = 0$ переход в смежную форму равновесия за счет изменения напряжений может сопровождаться дополнительным фазовым превращением и параметр q при написании уравнений для возмущенного состояния должен варьироваться (концепция “продолжающегося фазового перехода” [6]).

Условием осуществления дополнительного фазового перехода, согласно последнему соотношению (1.3), является выполнение неравенства

$$k \delta \sigma_i - \delta T > 0 \quad (1.8)$$

При выпучивании под действием постоянной внешней нагрузки, не испытывающей возмущений, вблизи выпуклой поверхности пластины сжимающие напряжения могут падать и интенсивность напряжений может уменьшаться. Если при этом температура также не испытывает возмущений ($\delta T = 0$), то условие (1.8) нарушается. В результате рассматриваемая (заранее не известная) часть пластины при выпучивании не будет испытывать дополнительного фазового перехода (концепция “упругой разгрузки”). Для этой части при анализе возмущенного состояния вместо уравнений (1.2), (1.3) будут, как и при несвязной постановке, использоваться выражения (1.7), в то время как для остальных точек сечения как предварительное напряженное состояние, так и переход в смежную форму равновесия будет анализироваться с помощью полной системы (1.1)–(1.6).

Пусть действующая нагрузка и (или) температура могут претерпевать малые возмущения. Было показано [6], что в случае стержня из СПФ всегда найдутся такие бесконечно малые вариации нагрузки, при которых в процессе выпучивания интенсивность напряжений будет возрастать во всех точках сечения. В результате все сечение будет претерпевать дополнительное фазовое превращение. Гипотеза о существовании и реализации таких возмущений соответствует концепции Шенли в теории устойчивости упругопластических тел [12, 13] и поэтому может для краткости быть названа концепцией “продолжающегося нагружения”.

В экспериментах [5] критические нагрузки потери устойчивости при прямом мартенситном превращении оказались чрезвычайно низкими, поэтому интересно определить такую постановку задачи устойчивости, которая приводит к наименьшему значению критических нагрузок.

2. Линеаризованные уравнения устойчивости. Для решения задачи устойчивости необходимо прежде всего найти докритическое напряженно-деформированное и фазовое состояния. Следуя общим положениям, доказанным для краевых задач о прямом превращении в СПФ [14, 15], можно установить, что докритические напряжения при прямом превращении сохраняют постоянные значения

$$\sigma_{11} = -p_{11}, \quad \sigma_{22} = -p_{22}, \quad \sigma_{12} = 0 \quad (2.1)$$

В этом случае, интегрируя уравнения (1.2) с учетом нулевых начальных условий, можно найти значения фазовых деформаций при докритическом деформировании

$$\varepsilon_{ii}^{(2)}(q) = \frac{2\sigma_{ii} - \sigma_{jj}}{3\sigma_{(1)}a_0}(\exp(a_0q) - 1), \quad \varepsilon_{12}^{(2)}(q) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам i, j суммирование не проводится, $i, j = 1, 2; i \neq j$.

Докритические значения q определяются по формулам (1.3), (1.4), (2.1) и будут одинаковы в каждый момент времени для всех точек пластины.

Уравнения для возмущенного состояния получаются из кинематической части гипотез Кирхгоффа – Лява, которые при учете соотношений (1.1), (1.5) запишем в виде

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^0 - x_3\kappa_{ii} = \frac{\sigma_{ii} - \mu(q)\sigma_{jj}}{E(q)} + \varepsilon_{ii}^{(2)}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 - x_3\kappa_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G(q)} + \varepsilon_{12}^{(2)} \quad (2.3)$$

Здесь x_3 – ортогональная пластине координата, ε_{ij}^0 – деформации срединной плоскости пластины, κ_{ij} – кривизны, для которых используются линейные соотношения

$$\kappa_{11} = w_{,11}, \quad \kappa_{22} = w_{,22}, \quad \kappa_{12} = w_{,12} \quad (2.4)$$

где w – прогиб срединной плоскости пластины, символы после запятой в нижнем индексе указывают на взятие частной производной вдоль соответствующей координаты. При рассмотрении в данном разделе к варьированию допускается все множество упомянутых ранее переменных: w, q, p_{11}, p_{22} и T .

Беря вариации от обеих частей равенств (2.3), учитывая докритические значения фазовых деформаций (2.2) и формулы (1.6), получим

$$\delta\varepsilon_{ii}^0 - x_3\delta\kappa_{ii} = \frac{\delta\sigma_{ii} - \mu(q)\delta\sigma_{jj}}{E(q)} + g_{ii}(q)\delta q, \quad \delta\varepsilon_{12}^0 - x_3\delta\kappa_{12} = \frac{\delta\sigma_{12}}{2G(q)}$$

$$g_{ii}(q) = \sigma_{ii}\Delta_1 - \sigma_{jj}\Delta_2 + \frac{2\sigma_{ii} - \sigma_{jj}}{3\sigma_{(1)}}\exp(a_0q) \quad (2.5)$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right), \quad \Delta_2 = \left(\frac{\mu_1}{E_1} - \frac{\mu_2}{E_2}\right)$$

Здесь и далее все величины без знака вариации соответствуют докритическому состоянию, а со знаком вариации – их изменению при переходе в смежную форму равновесия.

Для вариации объемной доли мартенситной фазы q из формул (1.3) можно получить соотношение

$$\delta q = \psi(q)(k^*\delta\sigma_i + \delta t)U_+$$

$$t = \frac{M_1 - T}{M_1 - M_2}, \quad k^* = \frac{k}{M_1 - M_2}, \quad U_+ = \begin{cases} 1 & \text{при } k^*\delta\sigma_i + \delta t > 0 \\ 0 & \text{при } k^*\delta\sigma_i + \delta t \leq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Величина $\psi(q)$ в случае использования первой зависимости (1.3) подсчитывается по формуле $\psi(q) = \pi\sqrt{1 - q^2}/2$, а в случае второй – по формуле $\psi(q) = \pi\sqrt{q(1 - q)}$.

Вариация интенсивности напряжений (1.4) (с учетом того, что при докритическом сжатии отсутствуют касательные напряжения) вычисляется по формуле

$$\delta\sigma_i = \frac{1}{\sigma_i} \left[\left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}}{2} \right) \delta\sigma_{11} + \left(\sigma_{22} - \frac{\sigma_{11}}{2} \right) \delta\sigma_{22} \right] \quad (2.7)$$

Разрешая уравнение (2.5) относительно вариации напряжений, получим

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ii} &= \frac{E(q)}{1 - \mu^2(q)} [e_{ii}z_{jj} + e_{jj}z_{ij}], \quad \delta\sigma_{12} = 2G(q)(\delta\varepsilon_{12}^0 - x_3\delta\kappa_{12}) \\ e_{ii} &= \delta\varepsilon_{ii}^0 - x_3\delta\kappa_{ii} - g_{ii}(q)\Psi(q)U_+\delta t \\ z_{jj} &= \frac{1 + \xi_{jj}(q)U_+}{1 + \xi(q)U_+}, \quad z_{ij} = \frac{\mu(q) - \xi_{ij}(q)U_+}{1 + \xi(q)U_+} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\xi_{ii}(q) = \frac{g_{ii}(q)E(q)\Psi(q)k^*}{\sigma_i} \left(\sigma_{ii} - \frac{\sigma_{jj}}{2} \right)$$

$$\xi_{ij}(q) = \frac{g_{ii}(q)E(q)\Psi(q)k^*}{\sigma_i} \left(\sigma_{jj} - \frac{\sigma_{ii}}{2} \right)$$

$$\xi(q) = \frac{\xi_{11}(q) + \xi_{22}(q) + \mu(q)(\xi_{12}(q) + \xi_{21}(q))}{1 - \mu^2(q)}$$

Соотношения (2.8) справедливы для тех точек пластины, в которых при переходе в смежную форму равновесия происходит дополнительное фазовое превращение. Для точек, где $\delta q = 0$, в (2.8) необходимо положить $\Psi(q) = 0$.

Используя вариации напряжений (2.8), можно образовать вариации внутренних моментов и усилий

$$\delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_{ij}x_3dx_3, \quad \delta N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_{ij}dx_3 \quad (2.9)$$

Уравнения равновесия для возмущенного состояния записываются в виде [16]

$$\delta M_{11,11} + 2\delta M_{12,12} + \delta M_{22,22} = h(\sigma_{11}\delta w_{,11} + \sigma_{22}\delta w_{,22}) \quad (2.10)$$

$$\delta N_{11,1} + \delta N_{12,2} = \delta X, \quad \delta N_{12,1} + \delta N_{22,2} = \delta Y \quad (2.11)$$

$\delta X, \delta Y$ – вариации внешних поверхностных сил, которые могут быть отличны от нуля, хотя сами эти силы в докритическом состоянии предполагаются равными нулю.

Уравнение совместности вариаций деформаций $\delta\varepsilon_{11,22} + \delta\varepsilon_{22,11} = 2\delta\varepsilon_{12,12}$ при учете представлений (2.3) эквивалентно таковому же, но только для вариаций деформаций в срединной плоскости

$$\delta\varepsilon_{11,22}^0 + \delta\varepsilon_{22,11}^0 = 2\delta\varepsilon_{12,12}^0 \quad (2.12)$$

3. Решение несвязной задачи. В случае решения несвязной задачи устойчивости при $\delta T = 0$ выполняется условие $\delta q = 0$. Полагая в соотношениях (2.8) $\Psi(q) = 0$ для всех точек пластины и используя первое выражение (2.9), имеем

$$\delta M_{ii} = -D(q)(\delta \kappa_{ii} + \mu(q)\delta \kappa_{jj}), \quad \delta M_{12} = -D(q)(1 - \mu(q))\delta \kappa_{12}$$

$$D(q) = \frac{E(q)h^3}{12(1 - \mu(q)^2)} \tag{3.1}$$

$D(q)$ – цилиндрическая жесткость пластины, учитывающая переменность модуля упругости.

Подстановка выражений (3.1) в уравнение равновесия (2.10), при учете соотношений (2.4), дает уравнение устойчивости упругих пластин с коэффициентом, зависящим от параметра фазового состава

$$\Delta \Delta \delta w - \frac{h}{D(q)}(\sigma_{11} \delta w_{,11} + \sigma_{22} \delta w_{,22}) = 0$$

Для свободно опертой по всем кромкам пластины, используя представление вариации прогиба в двойных тригонометрических рядах

$$\delta w(x_1, x_2) = w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_2\right) \tag{3.2}$$

получим соотношение

$$p_{11}\left(\frac{m}{a}\right)^2 + p_{22}\left(\frac{n}{b}\right)^2 = \frac{D(q)\pi^2}{h} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2 \tag{3.3}$$

для разыскания критических значений нагрузок p_{11}, p_{22} , которое совпадает с известным решением для упругой пластины, но при учете переменности цилиндрической жесткости. Поскольку для значений упругих постоянных, характерных для СПФ, цилиндрическая жесткость убывает с ростом q , т.е. при прямом превращении в мартенситное состояние, наименьшие значения критических нагрузок (3.3) при охлаждении пластины и соответствующем прямом превращении в рамках концепции “фиксированного фазового состава” получаются при $q = 1$. Эти нагрузки равны критическим усилиям изотермической потери устойчивости в мартенситном фазовом состоянии. Согласно экспериментальным данным [5], критические нагрузки потери устойчивости при прямом мартенситном превращении могут быть в несколько раз ниже, чем они же для изотермической потери устойчивости в мартенситном фазовом состоянии. Таким образом, экспериментальные данные противоречат концепции “фиксированного фазового состава”.

4. Решение связанной задачи в рамках концепции “продолжающегося нагружения”.

Пусть допускаются возмущения не только прогиба, но и внешних воздействий (нагрузки и температуры), причем за счет выбора произвольных малых вариаций этих величин $\delta p_{11}, \delta p_{22}, \delta t$ во всей рассматриваемой области удаётся обеспечить выполнение условия $k^* \delta \sigma_i + \delta t > 0$. Как видно из соотношений (2.6), дополнительный фазовый переход будет иметь место в этом случае в каждой точке пластины. Собирая внутренние моменты по формулам (2.9) с учетом выражений для вариаций напряжений (2.8), учитывая при этом, что в рассматриваемом случае $U_+ = 1$, можно получить

$$M_{ii} = -D \frac{\kappa_{ii}(1 + \xi_{jj}) + \kappa_{jj}(\mu - \xi_{ij})}{1 + \xi} - \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{\Psi(g_{ii} + \mu g_{jj})}{1 + \xi} \int_{-h/2}^{h/2} \delta t x_3 dx_3 \tag{4.1}$$

причем выражение для M_{12} не меняется по сравнению с (3.1). В выражении (4.1) аргумент q у функций, зависящих от этой величины, для сокращения записи опущен. Подстановка выражения для моментов (4.1) в уравнение равновесия (2.10), приводит

к неоднородному уравнению в частных производных. Однако неоднородные слагаемые не влияют на критические нагрузки потери устойчивости и поэтому при анализе устойчивости могут быть опущены. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$A_{11}(q)\delta w_{,1111} + 2A_{12}(q)\delta w_{,1122} + A_{22}(q)\delta w_{,2222} - \frac{h}{D(q)}(\sigma_{11}\delta w_{,11} + \sigma_{22}\delta w_{,22}) = 0 \quad (4.2)$$

Здесь введены обозначения

$$A_{ii}(q) = \frac{1 + \xi_{ij}(q)}{1 + \xi(q)}, \quad A_{12}(q) = 1 - \mu(q) + \frac{2\mu(q) - \xi_{12}(q) - \xi_{21}(q)}{2(1 + \xi(q))} \quad (4.3)$$

В итоге для свободно опертой по всем кромкам пластины подстановка выражения (3.2) в уравнение (4.2) дает соотношение

$$p_{11}\left(\frac{m}{a}\right)^2 + p_{22}\left(\frac{n}{b}\right)^2 = \frac{D(q)\pi^2}{h} \left[A_{11}(q)\left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2A_{12}(q)\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{n}{b}\right)^2 + A_{22}(q)\left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \quad (4.4)$$

служащее при учете равенств (4.3), (2.8), (2.1) для разыскания критических значений нагрузок p_{11}, p_{22} .

Для пластины со свободно опертыми поперечными нагруженными и свободными продольными краями в предположении о независимости вариации прогиба от x_2 и равенства нулю постоянных интегрирования по x_1 можно вместо уравнения (4.2) получить

$$A_{11}(q)\delta w_{,11} - \frac{h}{D(q)}\sigma_{11}\delta w = 0 \quad (4.5)$$

Подстановка в это уравнение представления для вариации прогиба

$$\delta w = w_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right)$$

дает выражение для критической силы

$$p_{11} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{D(q)A_{11}(q)}{h} \quad (4.6)$$

которая в данном случае минимальна при $m = 1$.

5. Решение связанной задачи устойчивости в рамках концепции “упругой разгрузки”. В этом случае часть пластины, примыкающая в процессе выпучивания к ее выпуклой поверхности, ввиду разгрузки перестает испытывать прямое фазовое превращение. Пусть x_3^0 – поперечная координата границы зоны дополнительного фазового перехода, значение которой, вообще говоря, зависит от координат x_1, x_2 , что затрудняет аналитическое решение. Можно доказать, однако, что в случае, если вариации температуры и нормальных внутренних усилий в пластине равны нулю

$$\delta N_{11} = \delta N_{22} = 0 \quad (5.1)$$

$$\delta t = 0 \quad (5.2)$$

то координата x_3^0 одинакова для всех точек срединной плоскости.

Действительно, на искомой границе фазового перехода вариация интенсивности напряжений (2.7) должна быть равна нулю. Записывая это условие с учетом соотношений (2.8), (5.2) и того, что на границе фазового перехода $U_+ = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}}{2}\right)(\delta\epsilon_{11}^0 + \mu(q)\delta\epsilon_{22}^0) + \left(\sigma_{22} - \frac{\sigma_{11}}{2}\right)(\delta\epsilon_{22}^0 + \mu(q)\delta\epsilon_{11}^0) = \\ & = x_3^0 \left[\left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}}{2}\right)(\delta\kappa_{11} + \mu(q)\delta\kappa_{22}) + \left(\sigma_{22} - \frac{\sigma_{11}}{2}\right)(\delta\kappa_{22} + \mu(q)\kappa_{11}) \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

Считая, что область сечения пластины $x_3 \in [-h/2, x_3^0]$ испытывает дополнительный фазовый переход, а оставшаяся часть сечения – нет, для вариаций внутренних сил (2.9) δN_{11} , δN_{22} , δN_{12} можно получить

$$\begin{aligned} \delta N_{ii} = & \frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\delta\epsilon_{ii}^0 + \mu\delta\epsilon_{jj}^0}{1+\xi} \left[h + \xi \left(\frac{h}{2} - x_3^0 \right) \right] + \frac{\delta\epsilon_{ii}^0 \xi_{jj} - \delta\epsilon_{jj}^0 \xi_{ii}}{1+\xi} \left(\frac{h}{2} + x_3^0 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - (x_3^0)^2 \right) \left[\frac{(\delta\kappa_{ii} + \mu\delta\kappa_{jj})\xi}{1+\xi} - \frac{\delta\kappa_{ii}\xi_{jj} - \delta\kappa_{jj}\xi_{ii}}{1+\xi} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\delta N_{12} = 2Gh\delta\epsilon_{12}^0$$

Умножая уравнение (5.4) для δN_{11} на $(\sigma_{11} - \sigma_{22}/2)$, а уравнение для δN_{22} на $(\sigma_{22} - \sigma_{11}/2)$ и складывая два получившихся соотношения между собой, можно прийти, с учетом равенства (5.3), к зависимости, которая совместно с условиями (5.1) позволяет найти искомое значение координаты x_3^0 :

$$x_3^0 = \frac{h}{\xi} \left(1 + \frac{\xi}{2} - \sqrt{1 + \xi} \right) \quad (5.5)$$

Согласно выражению (5.5), величина x_3^0 в рамках предположений (5.1), (5.2) действительно не зависит от x_1, x_2 .

Подстановка выражений (2.8) в первую формулу (2.9) дает выражения для вариаций внутренних моментов δM_{11} , δM_{22} , которые содержат члены с вариациями как кривизн $\delta\kappa_{11}$, $\delta\kappa_{22}$, так и деформаций срединной плоскости $\delta\epsilon_{11}^0$, $\delta\epsilon_{22}^0$. Исключив последние при помощи соотношений (5.1), (5.4), с учетом формулы (5.5) после несложных, но весьма громоздких преобразований можно прийти к выражениям

$$\delta M_{ii} = -D(q) \left\{ \left[\frac{\xi_{jj}}{\xi} + \left(1 - \frac{\xi_{jj}}{\xi} \right) \frac{8x_3^0}{h\xi} \right] \delta\kappa_{ii} + \left[-\frac{\xi_{ij}}{\xi} + \left(\mu + \frac{\xi_{ij}}{\xi} \right) \frac{8x_3^0}{h\xi} \right] \delta\kappa_{jj} \right\} \quad (5.6)$$

Для δM_{12} получается выражение, совпадающее с (3.1). Подстановка его вместе с выражением (5.6) в уравнение равновесия (2.10) приводит к искомому дифференциальному уравнению, совпадающему по виду с уравнением (4.2), но с другими коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_{ii}(q) &= \frac{\xi_{jj}(q)}{\xi(q)} + \left(1 - \frac{\xi_{jj}(q)}{\xi(q)} \right) \frac{8x_3^0}{h\xi(q)} \\ A_{12}(q) &= 1 - \mu(q) - \frac{\xi_{12}(q) + \xi_{21}(q)}{2\xi(q)} + \left(\mu(q) + \frac{\xi_{12}(q) + \xi_{21}(q)}{2\xi(q)} \right) \frac{8x_3^0}{h\xi(q)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для свободно опертой по всем кромкам пластины с учетом представления для вариации прогиба (3.2) из этого уравнения выводим соотношение (4.4), но с коэффициентами, подсчитываемыми по формулам (5.7), служащее с учетом формул (2.8), (2.1) для разыскания критических значений параметров нагрузки p_{11} , p_{22} .

Необходимо отметить, что предположения (5.1), в рамках которых найдено данное решение, не противоречат силовым граничным условиям на торцах пластины в случае, если вариации нормальных усилий на торцах равны нулю. Таким образом, в данном случае речь идет о потере устойчивости при фиксированных нормальных внешних усилиях.

Следует особо указать, что в рассматриваемом решении вариация касательного усилия δN_{12} не равна нулю. Чтобы найти ее значение, следует из двух первых формул (5.4), с учетом предположения (5.1), выразить вариации $\delta \epsilon_{11}^0$, $\delta \epsilon_{22}^0$ через кривизны $\delta \kappa_{11}$, $\delta \kappa_{22}$, а из последнего уравнения (5.4) – вариацию сдвиговой деформации $\delta \epsilon_{12}^0$ через δN_{12} и подставить их в уравнение совместности деформаций (2.12). В результате для свободно опертой пластины с учетом соотношения (3.2) можно получить формулу для второй смешанной производной

$$\delta N_{12, 12}(x_1, x_2) = \delta N_{12mn} \frac{mn\pi^2}{ab} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_2\right)$$

в которой введено обозначение

$$\delta N_{12mn} = \frac{G}{1-\mu^2} \frac{hx_3^0}{\xi} \frac{ab}{mn} \pi^2 w_{mn} \left[(\mu \xi_{22} + \xi_{21}) \frac{m^4}{a^4} + (1-\mu^2) \xi \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + (\mu \xi_{11} + \xi_{12}) \frac{n^4}{b^4} \right]$$

Следовательно, для вариации касательной силы справедливо соотношение

$$\delta N_{12}(x_1, x_2) = \delta N_{12mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}x_2\right) \quad (5.8)$$

учитывая которое, из уравнений равновесия (2.11) и допущений (5.1) заключаем, что вариации поверхностных сил δX , δY должны находиться по формулам

$$\delta X(x_1, x_2) = -\delta N_{12mn} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_2\right) \quad (5.9)$$

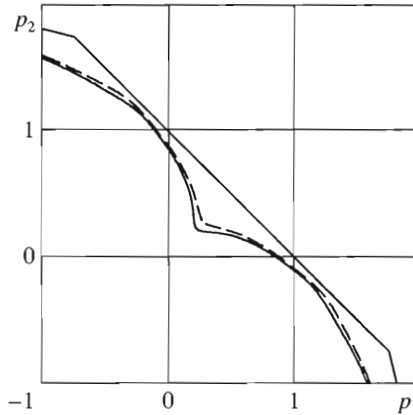
$$\delta Y(x_1, x_2) = -\delta N_{12mn} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}x_2\right)$$

Кроме того, должны быть отличны от нуля вариации касательных усилий на противоположных кромках пластины:

$$\delta p_{12}(0, x_2) = \frac{1}{h} \delta N_{12mn}(0, x_2), \quad \delta p_{12}(a, x_2) = \frac{1}{h} \delta N_{12mn}(a, x_2) \quad (5.10)$$

$$\delta p_{21}(x_1, 0) = \frac{1}{h} \delta N_{12mn}(x_1, 0), \quad \delta p_{21}(x_1, b) = \frac{1}{h} \delta N_{12mn}(x_1, b) \quad (5.11)$$

Как видно, все величины, определяемые формулами (5.8)–(5.11), найдены с точностью до малого множителя w_{mn} из представления для вариации прогиба (3.2). Таким образом, требуемые для реализации полученного решения возмущения внешних касательных нагрузок малы.



Фиг. 1

Следует отметить, что для пластины со свободными продольными краями формулы (5.5) и (5.7) справедливы при условии равенства нулю вариации внешних продольных нагрузок без каких-либо дополнительных гипотез. Уравнения равновесия удовлетворяются при нулевых вариациях касательных усилий.

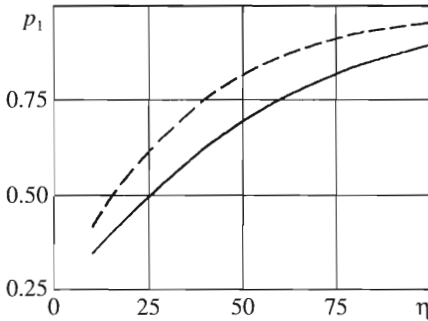
6. Потеря устойчивости квадратной пластины при двухосном нагружении. В качестве примера, иллюстрирующего различные подходы, изученные в работе, рассмотрим квадратную пластину из СПФ, нагруженную по двум парам противоположных кромок постоянными поверхностными нагрузками p_{11}, p_{22} и находящуюся в условиях прямого мартенситного превращения. Безразмерные параметры материала (соответствующие никелиду титана с равным по атомному составу содержанием никеля и титана) и пластины таковы:

$$\frac{a}{b} = 1, \quad \frac{h}{b} = \frac{1}{20}, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{3}, \quad \mu_1 = 0.48, \quad \mu_2 = 0.33, \quad k^*E_2 = 480,$$

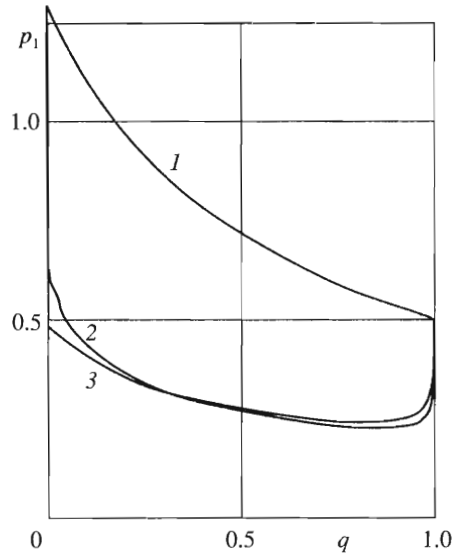
$$\frac{\sigma_{(1)}}{E_2} = 0.049, \quad a_0 = 0.718$$

На фиг. 1 представлены границы областей устойчивости указанной пластины. По осям отложены безразмерные значения критических усилий $p_1 = p_{11}/p^*, p_2 = p_{22}/p^*$, где $p^* = 4D(1)\pi^2/(hb^2)$ – критическая нагрузка изотермической потери устойчивости такой пластины при одноосном сжатии в мартенситном состоянии. Решение получено для аппроксимации диаграммы фазового перехода в виде второй формулы (1.3). Ломаная линия отвечает границе области устойчивости, полученной на основании анализа уравнения (3.3), соответствующего решению несвязной задачи. Сплошная кривая отвечает решению связанной задачи в рамках гипотезы “продолжающегося нагружения”. Штриховая кривая соответствует решению связанной задачи в рамках концепции “упругой разгрузки”.

Как видно из фиг. 1, наименьшие значения критических нагрузок получаются при использовании гипотез “продолжающегося фазового перехода” и “продолжающегося нагружения”. Это представляется вполне оправданным, поскольку в данном случае пластина за счет дополнительного фазового перехода во всех ее точках наиболее склонна к развитию фазовых деформаций, т.е. наиболее податлива. Следует отметить, что границы областей устойчивости для двух последних из рассмотренных подходов не являются выпуклыми.



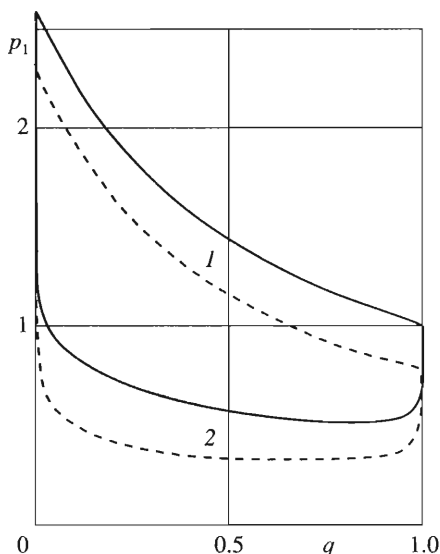
Фиг. 2



Фиг. 3

Согласно фиг. 1, наибольшее расхождение между значениями критических нагрузок, определяемых при использовании различных гипотез, для квадратной пластины, получаются в случае двухосного сжатия одинаковыми нагрузками: $p_{11} = p_{22} = p$. На фиг. 2 приведены графики зависимости безразмерных критических значений $p_1 = p/p^{**}$ от величины $\eta = a/h$. Здесь уже критическая сила отнесена к предельной нагрузке p^{**} изотермической потери устойчивости в мартенситном состоянии при равнодвухосном сжатии, или, что то же, минимальной критической нагрузке, получаемой при решении рассматриваемой задачи в несвязной постановке, которой, таким образом, соответствует верхняя горизонтальная прямая $p_1 = 1$. Решению связанной задачи в рамках гипотезы “упругой разгрузки” соответствует штриховая, а в рамках концепции “продолжающегося нагружения” – сплошная кривая. Как видно, разница между решениями мала для достаточно тонких пластин, она увеличивается с ростом ее относительной толщины (с уменьшением η). Различия между критическими нагрузками потери устойчивости при прямом превращении и изотермической потери устойчивости в наименее жестком мартенситном состоянии для достаточно толстых пластин могут быть многократными, что соответствует экспериментальным данным [5].

В экспериментах [5] никогда не удавалось получить потерю устойчивости при прямом превращении в последней точке интервала этого превращения, т.е. при $q = 1$. Отклонение от прямолинейной формы всегда происходило при некоторых промежуточных температурах, существенно превышающих температуру конца реакции прямого превращения. На фиг. 3 приведены графики зависимости от объемной доли мартенситной фазы q минимального (по m и n) безразмерного критического значения параметра нагрузки $p_1 = p_{11}/p^*$ в задаче о потере устойчивости при прямом превращении под действием двухосного сжатия одинаковыми нагрузками. Кривая 1 соответствует решению несвязной задачи, кривая 2 – решению связанной задачи в рамках концепции “продолжающегося нагружения” с использованием аппроксимации диаграммы фазового перехода в виде второй формулы (1.3), кривая 3 – решению той же задачи, но для аппроксимации диаграммы фазового перехода в виде первой формулы (1.3). Как видно, при решении задачи в связанной постановке, в отличие от результатов решения несвязной задачи, минимум критической нагрузки никогда не



Фиг. 4

соответствует значению $q = 1$, т.е. потеря устойчивости происходит не на конце, а в промежуточной точке интервала прямого превращения, что также не противоречит экспериментальным данным. Минимумы на кривых, приведенных на фиг. 3 и построенных для различных аппроксимаций фазовой диаграммы, близки между собой, хотя сами кривые в окрестности точки $q = 0$ различаются существенно. Связано это различие с тем, что, согласно второй формуле (1.3), производная $dq/dT = 0$ при $T = M_1$, т.е. при $q = 0$, в то время как, согласно первой формуле (1.3), эта производная в начальной точке интервала температур прямого превращения не только не равна нулю, но и имеет максимальное по модулю значение в этой точке.

На фиг. 4 сравниваются между собой решения задач устойчивости для пластины, продольные стороны которой свободны, а поперечные свободно оперты (4.6), и свободно опертого по обоим торцам стержня при одинаковых моментах инерции сечения и одинаковых длинах. Решение задачи устойчивости для стержня взято из работы [6]. В обоих случаях использованы концепция продолжающегося нагружения и второе соотношение (1.3) для фазовой диаграммы. По оси ординат отложены критические нагрузки, отнесенные к предельному усилию изотермической потери устойчивости полоски в мартенситном состоянии. Сплошные линии на фиг. 4 соответствуют пластине, штриховые – стержню. Кривые 1 построены для решения несвязной задачи, кривые 2 – для решения связной. Как видно, относительная разница критических нагрузок потери устойчивости пластины и стержня, получающаяся при решении связной задачи, существенно выше, чем при решении несвязной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01075) и в рамках программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления “Среды с микроструктурой. Учет эффекта нелокальности, внутренних степеней свободы, дискретности, вида напряженного состояния, кристаллографических особенностей термоупругих фазовых превращений”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хусаинов М.А. Исследование эффекта осесимметричного выпучивания круглых пластин // Ж. техн. физики. 1997. Т. 67. № 6. С. 118–120.
2. Хусаинов М.А., Малухина О.А. Анализ устойчивости сферических сегментов с памятью формы // Тр. 3 Междунар. семинара “Современные проблемы прочности” им. В.А. Лихачева, 1999. Новгород: 1999. Т. 2. С. 185–189.
3. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость “стойки Шенли” при ползучести или при прямом термоупругом мартенситном превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 1. С. 89–102.
4. Сильченко Л.Г. Устойчивость сжатого стержня из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // Физика процессов деформации и разрушения и прогнозирование механического поведения материалов: Тр. 36-го семинара “Актуальные проблемы прочности”. Витебск: 2000. Ч. 1. С. 359–364.
5. Мовчан А.А., Казарина С.А. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 82–89.
6. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситное превращение под действием сжимающих напряжений // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 3. С. 169–178.
7. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
8. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 197–205.
9. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 2. С. 173–181.
10. Liang C., Rogers C.A. One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. Intelligent Material System and Structures. 1990. V. 1. № 2. P. 207–234.
11. Мовчан А.А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 79–90.
12. Шэнли Ф. Теория колонны за пределом упругости // Механика. Сб. сокращ. перев. и реф. иностр. период. лит. 1951. № 2. С. 88–98.
13. Работнов Ю.Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инж. сб. 1952. № 11. С. 123–126.
14. Мовчан А.А. Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 4. С. 136–144.
15. Мовчан А.А. Некоторые положения механики материалов, испытывающих термоупругие фазовые превращения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1999. Т. 5. № 4. С. 87–108.
16. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.