ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 68. Вып. 1, 2004

УДК 539.3

© 2004 г. Г. З. Шарафутдинов

НАПРЯЖЕНИЯ И СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ СИЛЫ В ТОНКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНКАХ

При помощи функций комплексной переменной получены точные решения некоторых пространственных задач деформирования тонкой кольцевой пластинки, неподвижно закрепленной по внешнему контуру и нагруженной определенным образом по внутреннему контуру. Предельным переходом, при радиусе внутренней окружности, стремящемся к нулю, получены распределения напряжений на ней при действии сосредоточенных сил различного характера.

Сосредоточенные силы в тонких пластинках следует различать по характеру воздействия на деформируемые тела с учетом их происхождения и технических, технологических или научных приложений. Один из типов сосредоточенных сил связан с перемещением впаянного в тонкую пластинку жесткого диска, используемого при креплении на ней приборов или каких-либо иных устройств, или жесткого стержня, используемого в качестве крепежного элемента или оси. Другой тип сосредоточенных сил возникает при мгновенном прожигании тонкого цилиндрического канала в пластинке. И, наконец, третий тип сосредоточенных сил возникает при увеличении диаметра отверстия в пластинке, вызванного увеличением диаметра заклепки в результате ее деформировании, или при действии специальных инструментов в технологических операциях.

При анализе действия сосредоточенных сил в механике деформируемого тела обычно предполагается бесконечная протяженность пластинки. Такое предположение не всегда корректно; так, при исследовании сосредоточенных сил первого из перечисленных типов оно приводит к тривиальному решению, хотя ясно, что в пластинке конечных размеров, закрепленной по внешнему контуру, напряжения (и деформации) в таком случае отнюдь не будут нулевыми. Кроме того, априорное задание распределений напряжений на контуре отверстия, подверженного действию сосредоточенных сил, в некоторых случаях может оказаться не соответствующим реальному.

1. Представление компонент вектора перемещений и тензора напряжений в задачах деформирования тонких пластинок при использовании трех комплексных потенциалов. Теория функций комплексной переменной (ТФКП) широко применяется в теории упругости, в первую очередь при решении плоских задач [1]. При дальнейшем развитии применения методов ТФКП в теории упругости в дополнение к двум комплексным потенциалам Колосова–Мусхелишвили был введен третий комплексный потенциал и исследованы постановки пространственных задач теории упругости для тонких пластинок переменной толщины с учетом этого обстоятельства [2]. С использованием трех комплексных потенциалов были получены новые решения классических задач об одноосном растяжении тонкой пластинки со свободным круговым и свободным эллиптическим отверстием в трехмерной постановке [3, 4].

Имея в виду в дальнейшем применение методов ТФКП при изучении напряженно-деформированного состояния, приведем основные соотношения, связывающие компоненты вектора перемещений (u_1, u_2, u_3) в прямоугольной системе координат $OX_1X_2X_3$ (или $(u_\rho, u_\vartheta, u_3)$ – в цилиндрической полярной системе координат (ρ, ϑ, x_3)) и тензора напряжений $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$ – в прямоугольной (соответственно $\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{\rho\vartheta}, \sigma_{\rho 3}, \sigma_{\vartheta 3}, \sigma_{33}$ – в цилиндрической полярной) системе координат с тремя комплексными потенциалами.

В прямоугольной декартовой системе координат указанные величины, выраженные через три комплексных потенциала $\varphi(z)$, $\phi(z)$, $f(z)$, имеют вид [2]

$$4\mu(u_1 + iu_2) = f(z) - 2[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\phi(z)}] \tag{1.1}$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 2(1+\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \tag{1.2}$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{1}{2}[f'(z) + \overline{f'(z)}] - 2(1-2\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \tag{1.3}$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \phi'(z)] \tag{1.4}$$

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2x_3\left[2(1-\nu)\varphi''(z) - \frac{1}{4}f''(z)\right] \tag{1.5}$$

$$\sigma_{33} = 2(2-\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] - \frac{1}{2}[f'(z) + \overline{f'(z)}] \tag{1.6}$$

где $z = x_1 + ix_2$, ν – коэффициент Пуассона. Чертой наверху обозначены комплексно сопряженные величины.

Приведем также выражение для компоненты тензора деформации ε_{33}:

$$\varepsilon_{33} = \frac{2(1+\nu)}{E}\left\{2(1-\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] - \frac{1}{4}[f'(z) + \overline{f'(z)}]\right\} \tag{1.7}$$

где E – модуль Юнга. При этом величина перемещения в третьем направлении определяется выражением

$$u_3 = \varepsilon_{33}x_3 \tag{1.8}$$

Соотношения между компонентами вектора перемещений и тензора напряжений в прямоугольной и цилиндрической полярной системах координат имеют следующий вид:

$$u_\rho + iu_\vartheta = (u_1 + iu_2)e^{-i\vartheta} \tag{1.9}$$

$$\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{1.10}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\rho\rho} + 2i\sigma_{\rho\vartheta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})e^{2i\vartheta} \tag{1.11}$$

$$\sigma_{\rho 3} - i\sigma_{\vartheta 3} = (\sigma_{13} - i\sigma_{23})e^{i\vartheta} \tag{1.12}$$

Из соотношения (1.10), в частности, следует

$$\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{11} + \sigma_{22} \tag{1.13}$$

Комплексные потенциалы зададим в виде [2]

$$\varphi(z) = Az\ln z + \alpha\ln z + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k \tag{1.14}$$

$$\phi(z) = \beta\ln z + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k z^k \tag{1.15}$$

$$f(z) = \gamma\ln z + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k \tag{1.16}$$

где A – действительная величина.

2. Напряжения в кольцевой пластинке, закрепленной по внешнему контуру при перемещении впаянной центральной жесткой шайбы. Рассмотрим кольцевую пластинку с внутренним радиусом r и внешним радиусом R. Допустим, что внутри кольцевой пластинки впаян жесткий диск радиуса r и пластинка неподвижно закреплена по внешнему контуру. Допустим далее, что жесткое включение перемещается в некотором направлении.

Центр пластинки совместим с началом прямоугольной декартовой и цилиндрической полярной систем координат. Граничные условия сформулированной выше задачи сводятся к двум соотношениям

$$(u_1 + iu_2)\big|_{\rho = r} = U_0 + iV_0, \quad (u_1 + iu_2)\big|_{\rho = R} = 0 \tag{2.1}$$

Будем считать, что компоненты вектора перемещения на контуре внутреннего отверстия пластинки – постоянные величины.

Нетрудно видеть, что жесткое закрепление центрального абсолютно жесткого включения приводит к граничному условию

$$u_3\big|_{\rho = r} = 0 \tag{2.2}$$

Допустим также, что на внешнем контуре выполняется условие

$$\sigma_{33}\big|_{\rho = R} = 0 \tag{2.3}$$

Для реализации граничных условий (2.1) выражения (1.14)–(1.16) подставим в соотношение (1.1). Получим

$$\begin{aligned}
4\mu(u_1 + iu_2) &= \gamma(\ln\rho + i\vartheta) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\rho^k e^{ik\vartheta} - \\
&-2\left[A\rho e^{i\vartheta}(\ln\rho + i\vartheta) + \alpha(\ln\rho + i\vartheta) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\rho^k e^{ik\vartheta}\right] - \\
&-2\rho e^{i\vartheta}\left[A(\ln\rho - i\vartheta) + \frac{\bar{\alpha}}{\rho} + \sum_{k=0}^{+\infty} k\bar{a}_k\rho^{k-1}e^{i(k-1)\vartheta} - \sum_{k=-1}^{-\infty} k\bar{a}_k\rho^{k-1}\right] - \\
&-2\left[\bar{\beta}(\ln\rho - i\vartheta) + \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{b}_k\rho^k e^{-ik\vartheta} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \bar{b}_k\rho^k e^{-ik\vartheta}\right]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В силу однозначности перемещений сумма коэффициентов при $i\vartheta$ должна быть равна нулю [1, 2]:

$$\gamma - 2\alpha + 2\bar{\beta} = 0 \tag{2.5}$$

Собирая теперь коэффициенты при e^0 и учитывая условия (2.1), имеем

$$\begin{aligned}
&(\gamma - 2\alpha - 2\bar{\beta})\ln r + A_0 - 4\bar{a}_2 r^2 = 4\mu(U_0 + iV_0) \\
&(\gamma - 2\alpha - 2\bar{\beta})\ln R + A_0 - 4\bar{a}_2 R^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $A_0 = c_0 - 2a_0 - 2\bar{b}_0$.

Суммы коэффициентов при $e^{i\vartheta}$ в равенстве (2.4) приводят к двум уравнениям, следующим из граничных условий (2.1),

$$
\begin{aligned}
&c_1 r - 2a_1 r - 4Ar\ln r - 2Ar - 2\bar{a}_1 r - 2\frac{\bar{b}_{-1}}{r} = 0 \\
&c_1 R - 2a_1 R - 4AR\ln R - 2AR - 2\bar{a}_1 R - 2\frac{\bar{b}_{-1}}{R} = 0
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

а при $e^{2i\vartheta}$ – к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&c_2 r^2 - 2a_2 r^2 - 2\bar{\alpha} - 2\frac{\bar{b}_{-2}}{r^2} = 0 \\
&c_2 R^2 - 2a_2 R^2 - 2\bar{\alpha} - 2\frac{\bar{b}_{-2}}{R^2} = 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Полученная система (2.5)–(2.8), состоящая из семи уравнений, содержит 11 неизвестных коэффициентов

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ A_0,\ a_2,\ b_{-2},\ c_2,\ A,\ a_1,\ b_{-1},\ c_1 \tag{2.9}$$

Обратим внимание на то, что в комбинации коэффициентов при других значениях k в $e^{ik\vartheta}$

$$
\begin{aligned}
&c_k\rho^k - 2a_k\rho^k - 2\frac{\bar{a}_{-(k-2)}}{\rho^{k-2}} - 2\frac{\bar{b}_{-k}}{\rho^k} = 0, \quad k \geq 3 \\
&\frac{c_{-k}}{\rho^k} - 2\frac{a_{-k}}{\rho^k} - 2(k+2)\bar{a}_{k+2}\rho^{k+1} - 2\bar{b}_k\rho^k = 0, \quad k \geq 1
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

ни один из коэффициентов (2.9) не входит.

Дополним полученные соотношения уравнениями, следующими из условий (2.2) (при учете выражений (1.7), (1.8)) и (2.3). С этой целью подставим выражения (1.14)–(1.16) в указанные граничные условия. Очевидно, представляют интерес, в первую очередь, уравнения, содержащие неизвестные из множества (2.9). Такими уравнениями являются

$$8(1-\nu)[2A(\ln r + 1) + (a_1 + \bar{a}_1)] - (c_1 + \bar{c}_1) = 0 \tag{2.11}$$

$$8(1-\nu)\left(2a_2 r + \frac{\bar{\alpha}}{r}\right) - \left(2c_2 r + \frac{\bar{\gamma}}{r}\right) = 0 \tag{2.12}$$

$$4(2-\nu)[2A(\ln R + 1) + (a_1 + \bar{a}_1)] - (c_1 + \bar{c}_1) = 0 \tag{2.13}$$

$$4(2-\nu)\left(2a_2 R + \frac{\bar{\alpha}}{R}\right) - \left(2c_2 R + \frac{\bar{\gamma}}{R}\right) = 0 \tag{2.14}$$

Заметим, что остальные уравнения, получаемые из граничных условий (2.2), (2.3), не содержат неизвестных из множества (2.9) и не приводятся здесь по следующей причине. Указанные граничные условия – однородные, и, следовательно, не приведенные здесь уравнения относительно неизвестных, не входящих во множество (2.9), совместно с уравнениями (2.10) могут образовать лишь однородную систему. В силу произвольности входящих в эту систему величин определитель такой системы не будет равен нулю, что приводит к тривиальному решению. Это означает, что все неизвестные коэффициенты разложения, не принадлежащие множеству (2.9), равны нулю.

Полученная система уравнений (2.5)–(2.8), (2.11)–(2.14) состоит из двух подсистем: одна содержит уравнения (2.5), (2.6), (2.8), (2.12), (2.14) с неизвестными

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ A_0,\ a_2,\ b_{-2},\ c_2 \tag{2.15}$$

а вторая – из уравнений (2.7), (2.11), (2.13) относительно набора неизвестных

$$A,\ a_1,\ b_{-1},\ c_1 \tag{2.16}$$

Рассмотрим сначала вторую систему. Она легко преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &-2r(2\ln r+1)A-2r(a_1+\bar{a}_1)-\frac{2}{r}\bar{b}_{-1}+rc_1 = 0\\ &-2R(2\ln R+1)A-2R(a_1+\bar{a}_1)-\frac{2}{R}\bar{b}_{-1}+Rc_1 = 0\\ &16(1-\nu)(\ln r+1)A+8(1-\nu)(a_1+\bar{a}_1)-(c_1+\bar{c}_1) = 0\\ &8(2-\nu)(\ln R+1)A+4(2-\nu)(a_1+\bar{a}_1)-(c_1+\bar{c}_1) = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Относительно действительных и мнимых частей неизвестных коэффициентов разложения отсюда получаем две системы уравнений. Их матрицы имеют соответственно вид

$$\begin{Vmatrix} -2r(2\ln r+1) & -4r & -\frac{2}{r} & r\\ -2R(2\ln R+1) & -4R & -\frac{2}{R} & R\\ 16(1-\nu)(\ln r+1) & 16(1-\nu) & 0 & -2\\ 8(2-\nu)(\ln R+1) & 8(2-\nu) & 0 & -2 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{r} & r\\ 0 & 0 & \frac{2}{R} & R\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.18}$$

Непосредственно можно проверить, что определитель первой матрицы отличен от нуля, и поэтому действительные части неизвестных, принадлежащих множеству (2.16), равны нулю. Из системы уравнений относительно их мнимых частей нетрудно видеть, что коэффициент a_1 определяется с точностью до мнимой части этого коэффициента. Однако это обстоятельство не оказывает никакого влияния на напряженно-деформированное состояние в кольцевой пластинке, поскольку во все величины входит только действительная часть коэффициента a_1.

Обратимся теперь к первой системе. Для упрощения работы с ней несколько преобразуем эту систему. Сначала учтем равенство (2.5) в соотношениях (2.6). В результате имеем

$$\begin{aligned} &A_0-\ln r(4\alpha-2\gamma)-4r^2\bar{a}_2 = 4\mu(U_0+iV_0)\\ &A_0-\ln R(4\alpha-2\gamma)-4R^2\bar{a}_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$(\ln R-\ln r)(4\alpha-2\gamma)+4(R^2-r^2)\bar{a}_2 = 4\mu(U_0+iV_0) \tag{2.20}$$

Преобразуем теперь уравнения (2.8), умножив первое на r^2, а второе на R^2. Затем вычтем второе уравнение из первого, после чего полученное выражение сократим на $R^2 - r^2$; в результате имеем

$$2\bar{\alpha} + 2(R^2 + r^2)a_2 - (R^2 + r^2)c_2 = 0 \tag{2.21}$$

Дополняя уравнения (2.20), (2.21) уравнениями (2.12), (2.14), также содержащими неизвестные α, γ, a_2, c_2, получим систему четырех уравнений относительно указанных неизвестных.

Разделим теперь первое уравнение (2.8) на r^2, а второе на R^2 и вычтем одно уравнение из другого. В результате получим

$$b_{-2} = -\frac{R^2 r^2}{R^2 + r^2}\alpha \tag{2.22}$$

Величина $\bar{\beta}$ определяется из соотношения

$$\bar{\beta} = \alpha - \gamma/2 \tag{2.23}$$

после чего из второго уравнения (2.19) находим

$$A_0 = 4\bar{\beta}\ln R + 4\bar{a}_2 R^2 \tag{2.24}$$

Решение системы уравнений (2.20), (2.21), (2.12), (2.14) совместно с уравнениями (2.22)–(2.24) дает следующие выражения для неизвестных из множества (2.15):

$$\alpha = \frac{1}{\Delta}[(3 - 2\nu)R^4 + 2\nu R^2 r^2 - (3 - 4\nu)r^4](U_0 + iV_0) = A_1(U_0 + iV_0)$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}[(R^2 - r^2) - \nu(R^2 + r^2)](U_0 - iV_0) = A_2(U_0 - iV_0)$$

$$\beta = \frac{1}{\Delta}[(-9 + 18\nu - 8\nu^2)(R^4 - r^4) + 4\nu R^2 r^2](U_0 - iV_0) = B_1(U_0 - iV_0)$$

$$b_{-2} = \frac{1}{\Delta}[-(3 - 2\nu)R^4 - 2\nu R^2 r^2 + (3 - 4\nu)r^4]\frac{R^2 r^2}{R^2 + r^2}(U_0 + iV_0) = B_2(U_0 + iV_0) \tag{2.25}$$

$$\gamma = \frac{2}{\Delta}[(12 - 20\nu + 8\nu^2)R^4 - 2\nu R^2 r^2 - (12 - 22\nu + 8\nu^2)r^4](U_0 + iV_0) = C_1(U_0 + iV_0)$$

$$c_2 = \frac{2}{\Delta}[(4 - 3\nu)(R^2 - r^2)](U_0 - iV_0) = C_2(U_0 - iV_0)$$

$$A_0 = \frac{4}{\Delta}\{[(-9 + 18\nu - 8\nu^2)(R^4 - r^4) + 4\nu R^2 r^2]\ln R + (R^2 - r^2) - \nu(R^2 + r^2)\}(U_0 + iV_0)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\mu}\left\{[-(3 - 4\nu)(3 - 2\nu)(R^4 - r^4) + 4\nu r^2 R^2]\ln\frac{R}{r} + (R^2 - r^2)^2 - \nu(R^4 - r^4)\right\}$$

Заметим, что величина A_0, представляющая собой определенную выше комбинацию постоянных (см. соотношения (2.6)), используется в виде этой комбинации только при определении перемещений и ни в какие другие соотношения не входит, в силу чего нет необходимости в определении ее составляющих.

Таким образом, комплексные потенциалы в рассматриваемой задаче принимают вид

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= \alpha \ln z + a_0 + a_2 z^2 \\
\phi(z) &= \beta \ln z + b_0 + b_{-2} z^{-2} \\
f(z) &= \gamma \ln z + c_0 + c_2 z^2
\end{aligned}
\qquad (2.26)
$$

где все коэффициенты, за исключением a_0, b_0, c_0, определены первыми шестью соотношениями (2.25), а линейная комбинация указанных коэффициентов – последним соотношением (2.25).

При помощи представлений комплексных потенциалов (2.26) нетрудно получить все величины, полностью характеризующие напряженно-деформированное состояние деформируемого тела в рассматриваемой задаче. Так, например, комплексное перемещение $(u_1 + iu_2)$ в силу соотношений (1.1), (2.5), (2.23) и (2.24) легко определяется из выражения

$$
4\mu(u_1 + iu_2) = 4\bar{\beta}\ln\frac{R}{\rho} + 4\bar{a}_2(R^2 - \rho^2) - \left[2\frac{\bar{b}_{-2}}{\rho^2} + 2\bar{\alpha} - (c_2 - 2a_2)\rho^2\right]e^{2i\vartheta}
$$

Однако для различных оценок комплексная форма вектора перемещения неудобна, и поэтому выделим в этом выражении комплексную и действительную части при помощи первых шести соотношений (2.25). В результате имеем

$$
4\mu(u_1 + iu_2) = \chi_1 U_0 + \chi_2(U_0\cos 2\vartheta + V_0 \sin 2\vartheta) + i[\chi_1 V_0 + \chi_2(U_0 \sin 2\vartheta - V_0\cos 2\vartheta)] \qquad (2.27)
$$

где

$$
\chi_1 = 4B_1\ln\frac{R}{\rho} + 4A_2(R^2 - \rho^2), \quad \chi_2 = -2\frac{B_2}{\rho^2} - 2A_1 + (C_2 - 2A_2)\rho^2
$$

Используя соотношения (1.2)–(1.6), а также (1.10)–(1.13) и (2.28)–(2.33), приведем основные комбинации компонент тензора напряжений

$$
\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = \left[\left(\frac{C_1}{\rho} + 2C_2\rho\right) - 4(1-2\nu)\left(\frac{A_1}{\rho} + 2A_2\rho\right)\right]W_1
$$

$$
\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\rho\rho} + 2i\sigma_{\rho\vartheta} = 2\left[-2\frac{B_2}{\rho^3} - \frac{A_1 - B_1}{\rho} + 2A_2\rho\right]W_1 - 2i\left[2\frac{B_2}{\rho^3} + \frac{A_1 + B_1}{\rho} + 2A_2\rho\right]W_2
$$

а также компоненты этого тензора

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho} &= \frac{1}{2}\left\{4\frac{B_2}{\rho^3} + \frac{C_1 - 2B_1 - 2(1-4\nu)A_1}{\rho} + 2[C_2 - 2(3-4\nu)A_2]\rho\right\}W_1 \\
\sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{2}\left\{-4\frac{B_2}{\rho^3} + \frac{C_1 + 2B_1 - 2(3-4\nu)A_1}{\rho} + 2[C_2 - 2(1-4\nu)A_2]\rho\right\}W_1 \\
\sigma_{33} &= \left\{\frac{4(2-\nu)A_1 - C_1}{\rho} + 2[4(2-\nu)A_2 - C_2]\rho\right\}W_1 \\
\sigma_{\rho\vartheta} &= -\left[2\frac{B_2}{\rho^3} + \frac{A_1 + B_1}{\rho} + 2A_2\rho\right]W_2
\end{aligned}
\qquad (2.28)
$$

$$\sigma_{\rho 3} = 2x_3\left[\frac{C_1 - 8(1-\nu)A_1}{4\rho^2} + 4(1-\nu)A_2 - \frac{C_2}{2}\right]W_1$$

$$\sigma_{\vartheta 3} = -2x_3\left[\frac{C_1 - 8(1-\nu)A_1}{4\rho^2} - 4(1-\nu)A_2 + \frac{C_2}{2}\right]W_2$$

где

$$W_1 = U_0\cos\vartheta + V_0\sin\vartheta, \quad W_2 = -U_0\sin\vartheta + V_0\cos\vartheta$$

Выражение компоненты тензора деформации ε_{33}, необходимой при формировании граничного условия (2.2), имеет вид

$$\varepsilon_{33} = \frac{2(1+\nu)}{E}\left\{\frac{8(1-\nu)A_1 - C_1}{2\rho} + [8(1-\nu)A_2 - C_2]\rho\right\}W_1 \tag{2.29}$$

Выражения (2.28), (2.29) дают полное решение поставленной задачи – непосредственной проверкой установлено, что они удовлетворяют всем, без исключения, уравнениям равновесия, условиям совместности и граничным условиям.

Напряжения на контуре кругового отверстия в пластинке даются выражениями, получаемыми из (2.28) при $\rho = r$:

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{4}{\Delta}\left[\frac{(3-2\nu)(1-\nu)}{r}R^4 + 2(1-\nu)R^2 r - (5-2\nu)(1-\nu)r^3\right]W_1$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{4}{\Delta}\left[\frac{(3-2\nu)\nu}{r}R^4 + 2\nu R^2 r - (5-2\nu)r^3\right]W_1$$

$$\sigma_{33} = \frac{4\nu}{\Delta}\left[\frac{3-2\nu}{r}R^4 + 2R^2 r - (5-2\nu)r^3\right]W_1 \tag{2.30}$$

$$\sigma_{\rho\vartheta} = \frac{4}{\Delta}\left[\frac{(3-2\nu)(1-\nu)}{r}R^4 - (2-\nu)rR^2 - (1-4\nu+2\nu^2)r^3\right]W_2$$

$$\sigma_{\rho 3} = -\frac{4\nu x_3}{\Delta}[(5-4\nu)R^2 + (3-4\nu)r^2]W_1, \quad \sigma_{\vartheta 3} = 0$$

Распределение напряжений на контуре кругового отверстия при действии сосредоточенной силы рассматриваемого типа можно получить из соотношений (2.30) предельным переходом при $r \to 0$. Совершая такой предельный переход, получим для ненулевых компонент тензора напряжений

$$\sigma_{\rho\rho} = 4\mu\frac{1-\nu}{3-4\nu}\frac{1}{r\ln r}W_1$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{33} = 4\mu\frac{\nu}{3-4\nu}\frac{1}{r\ln r}W_1$$

$$\sigma_{\rho\vartheta} = 4\mu\frac{1-\nu}{3-4\nu}\frac{1}{r\ln r}W_2, \quad \sigma_{\rho 3} = -4\mu\frac{\nu(5-4\nu)}{(3-4\nu)(3-2\nu)}\frac{x_3}{r\ln r}W_1$$

Если же в соотношениях (2.28) совершить сначала предельный переход при $R \to \infty$, то эти величины в результате будут иметь порядок $1/\ln R$, и, следовательно, они в этом случае, как и следует ожидать, стремятся к нулю, что и приводит к тривиальному решению в случае бесконечной пластины. Таким образом, предположение о безграничности пластинки в рассматриваемой задаче принципиально.

Из анализа общего решения (2.28), и в частности на контуре выреза (соотношения (2.30)), следует, что касательные компоненты тензора напряжений, связанные с третьей координатой, по своей абсолютной величине являются величинами того же порядка, что и остальные. Более того, в некоторых случаях, указанных ранее [4], они могут существенно превосходить по абсолютной величине все другие компоненты тензора напряжений. Это означает, что рассмотренная здесь задача является пространственной неосесимметричной задачей теории упругости без каких-либо ограничений. В этом случае компонента тензора напряжений σ_{33} на свободной поверхности пластинки может отличаться от нуля, но при этом компоненты $\sigma_{\rho 3}$, $\sigma_{\vartheta 3}$, σ_{33} обязательно должны удовлетворять третьему уравнению равновесия, что и имеет место в настоящем случае.

Вместе с тем полученное решение может быть легко трансформировано в решение соответствующей задачи обобщенного плоского напряженного состояния. Как это следует из полученных ранее результатов [3], в задачах обобщенного плоского напряженного состояния коэффициент Пуассона ν предполагается равным нулю. Установлено, что определяемые соотношениями (2.28) компоненты тензора напряжений $\sigma_{\rho 3}$, $\sigma_{\vartheta 3}$, σ_{33} пропорциональны ν. Поэтому если в соответствии с теорией обобщенного плоского напряженного состояния на свободной поверхности пластины конечной толщины положить $\sigma_{\rho 3} = 0$, $\sigma_{\vartheta 3} = 0$ (а это возможно только при $\nu = 0$), то традиционным путем из третьего уравнения равновесия получаем, что всюду $\sigma_{33} = 0$, что вполне соответствует полученным результатам.

3. Действие равномерного давления на контур кольцевой пластинки, закрепленной по внешнему контуру. Рассмотрим задачу о действии нормальных и касательных напряжений на внутренний контур кольцевой пластинки постоянной толщины, неподвижно закрепленной по внешнему контуру.

Допустим, что кольцевая пластинка единичной толщины и внешнего радиуса R имеет центральное круговое отверстие радиуса r. Будем считать, что на внутреннем контуре заданы нормальные и касательные напряжения, а внешний контур кольцевой пластинки неподвижно закреплен.

Введем цилиндрическую полярную систему координат (ρ, ϑ, x_3). Тогда граничные условия рассматриваемой задачи примут вид

$$\sigma_{\rho\rho} - i\sigma_{\rho\vartheta}\big|_{\rho = r} = p - iq, \quad u_\rho + iu_\vartheta\big|_{\rho = R} = 0 \tag{3.1}$$

Кроме того, будем считать, что всюду

$$\sigma_{33} = 0 \tag{3.2}$$

Указанные комбинации величин через комплексные потенциалы выражаются при помощи соотношения [2]

$$\sigma_{\rho\rho} - i\sigma_{\rho\vartheta} = \frac{1}{4}[f'(z) + \overline{f'(z)}] - (1 - 2\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] - [\bar{z}\varphi''(z) + \phi'(z)]e^{2i\vartheta} \tag{3.3}$$

и соотношений (1.1) (при учете представления (1.9)) и (1.6) соответственно.

Решение задачи будем искать при помощи степенных рядов [1]. Комплексные потенциалы возьмем в форме (1.14)–(1.16). Подставляя их в граничные условия (3.1), (3.2), приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{1}{4}(c_1+\bar{c}_1)-(1-2\nu)[2(\ln r+1)A+(a_1+\bar{a}_1)]-A+\frac{b_{-1}}{r^2} = p-iq$$

$$Rc_1-2R(a_1+\bar{a}_1)-2R(2\ln R+1)A-2\frac{\bar{b}_{-1}}{R} = 0 \tag{3.4}$$

$$2(2-\nu)A\ln\rho = 0, \quad 2(2-\nu)(a_1+\bar{a}_1)-\frac{1}{2}(c_1+\bar{c}_1) = 0$$

Поясним происхождение уравнений в этой системе. В результате выбора коэффициентов разложения при e^0 в первом граничном условии (3.1) получено первое уравнение (3.4), а во втором граничном условии (3.1) – второе уравнение (3.4). Последние два уравнения (3.4) получены при реализации граничного условия (3.2) как комбинации членов разложения, включающие входящие в систему (3.4) неизвестные коэффициенты разложений (см. уравнение (2.13), в котором R следует заменить на ρ и приравнять нулю в отдельности его зависящие и не зависящие от ρ слагаемые).

Из третьего уравнения (3.4) непосредственно имеем $A = 0$. Учитывая это и разделяя искомые коэффициенты на действительные и мнимые части, приходим к двум следующим системам уравнений: относительно действительных частей коэффициентов

$$r^2c_{11}-4(1-2\nu)r^2a_{11}+2b_{-11} = 2pr^2$$

$$c_{11}-4(2-\nu)a_{11} = 0$$

$$R^2c_{11}-4R^2a_{11}-2b_{-11} = 0$$

и относительно их мнимых частей

$$b_{-12} = -qr^2$$

$$R^2c_{12}+2b_{-12} = 0$$

Решая указанные системы, получаем выражения для коэффициентов разложений комплексных потенциалов. В результате комплексные потенциалы принимают вид

$$\varphi(z) = a_0+\left(\frac{pr^2}{2d}+ia_{12}\right)z$$

$$\phi(z) = b_0+\left[\frac{(1-\nu)pR^2r^2}{d}-iqr^2\right]\frac{1}{z}$$

$$f(z) = c_0+\left[\frac{2(2-\nu)pr^2}{d}+2iq\frac{r^2}{R^2}\right]z$$

где

$$d = (1-\nu)R^2+(1+\nu)r^2$$

Заметим, что мнимая часть коэффициента a_1 не определяется из приведенной системы уравнений. Однако это не играет большой роли, поскольку, как мы увидим далее, она не участвует в представлении компонентов вектора перемещений и тензора напряжений.

Непосредственной подстановкой полученных выражений для комплексных потенциалов в выражение (1.6) нетрудно убедиться в справедливости условия (3.2) всюду.

Подставляя их в соотношение (3.3), получим компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{(1+\nu)pr^2}{(1-\nu)R^2+(1+\nu)r^2} + \frac{(1-\nu)pR^2r^2}{(1-\nu)R^2+(1+\nu)r^2}\frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_{\rho\vartheta} = q\frac{r^2}{\rho^2} \tag{3.5}$$

Поскольку выражение для $\sigma_{\vartheta\vartheta} + i\sigma_{\rho\vartheta}$ отличается от (3.3) только знаком перед множителем при экспоненциальной функции [2], то выражение для $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ отличается от выражения для $\sigma_{\rho\rho}$ лишь знаком минус вместо знака плюс перед вторым слагаемым в первой формуле (3.5).

Непосредственной проверкой установлено, что полученные компоненты тензора напряжений удовлетворяют всем уравнениям равновесия и совместности и первому граничному условию (3.1). Для того чтобы полученные комплексные потенциалы определяли решение задачи, необходимо, кроме этого, обеспечить выполнение второго граничного условия (3.1). Рассмотрим это подробнее.

Учитывая соотношение (1.9) для компонент вектора перемещений вместо равенства (1.1), получим выражение, содержащее помимо всего прочего линейную комбинацию $c_0 - 2a_0 - 2\bar{b}_0$, которая при учете второго граничного условия (3.1) определяется вполне однозначно. Именно в данном случае она равна нулю, и это позволяет, выделяя в этом выражении действительную и мнимую части, окончательно получить

$$u_\rho = \frac{1}{2\mu}\frac{(1-\nu)pr^2}{(1-\nu)R^2+(1+\nu)r^2}\left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right), \quad u_\vartheta = \frac{1}{2\mu}\frac{qr^2}{R^2}\left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)$$

Видно, что главный вектор действующих на внутренний контур сил равен нулю, но величина этой силы, действующая на половину контура, например, в пределах $-\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2$ равна

$$-\int_{-\pi/2}^{\pi/2} pr\cos\vartheta d\vartheta = -2pr$$

Допустим, что величина $r \to 0$, однако при этом будем считать, что предельное значение силы $F = -pr \neq 0$ и остается некоторой постоянной величиной. Тогда в пределе при $\rho = r \to 0$ имеем

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{F}{r}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = -\frac{F}{r}, \quad u_\rho = -\frac{F}{2\mu}$$

Точно так же, полагая $Q = qr \neq 0$, в пределе при $\rho = r \to 0$ имеем

$$\sigma_{\rho\vartheta} = \frac{Q}{r}, \quad u_\vartheta = -\frac{Q}{2\mu}$$

4. Напряжения в кольцевой пластинке, закрепленной по внешнему контуру, при заданных радиальных и касательных перемещениях контура центрального отверстия. Рассмотрим тонкую круглую пластинку единичной толщины, имеющую центральное круговое отверстие, в которое впаяна или вложена шайба (или заклепка, если иметь в виду технические приложения решения рассматриваемой задачи, например, при скреплении двух пластин). В соответствующей технологической операции заклепку деформируют так, что в ней образуются пластические деформации, за счет чего она неподвижно закрепляется в листе. При пластическом деформировании диаметр цилиндрической заклепки увеличивается, что и является одной из причин возникновения радиальных перемещений внутреннего контура в кольцевой пластинке. В операциях раздачи отверстий при увеличении диаметра иногда проворачивают инструмент, в результате чего на внутреннем контуре возникают тангенциальные перемещения. Именно такие соображения положены в основу постановки рассматриваемой в этом разделе задачи.

Таким образом, первая часть граничных условий сводится к следующему. Введем цилиндрическую полярную систему координат (ρ, ϑ, x_3). Обозначим через R внешний радиус кольцевой пластинки, а через r – радиус ее внутреннего отверстия. Тогда граничные условия рассматриваемой задачи можно записать в виде

$$u_\rho + iu_\vartheta\big|_{\rho = r} = U_0 + iV_0, \quad u_\rho + iu_\vartheta\big|_{\rho = R} = 0 \tag{4.1}$$

Допустим также, что компонента тензора напряжений удовлетворяет условию

$$\sigma_{33}\big|_{\rho = R} = 0 \tag{4.2}$$

а компонента вектора перемещения – условию

$$u_3\big|_{\rho = r} = \varepsilon_0 x_3 \tag{4.3}$$

Последнее условие имеет смысл в случаях, когда шайба впаяна или же между ней и пластинкой есть трение. Обратим внимание на возможность связи величины U_0 с перемещением u_3, например с использованием условия несжимаемости материала заклепки или с каким-либо иным условием.

Учитывая соотношения (1.1), (1.6)–(1.9) и используя представления (1.14)–(1.16), так же, как и выше, при помощи граничных условий (4.1)–(4.3) получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений A, a_1, b_{-1}, c_1 (среди них только A – действительная величина). Полученная система отличается от системы (2.17) тем, что правая часть первого уравнения теперь равна $4\mu(U_0 + iV_0)$, а правая часть третьего уравнения равна $4\mu\varepsilon_0$.

Разделяя неизвестные коэффициенты на действительные и мнимые части, т.е. считая, что

$$a_1 = a_{11} + ia_{12}, \quad b_{-1} = b_{-11} + ib_{-12}, \quad c_1 = c_{11} + ic_{12} \tag{4.4}$$

получим две системы уравнений для действительных и мнимых частей коэффициентов разложений. Матрицы этих систем совпадают с матрицами (2.18). Нетрудно видеть, что обе системы совместны.

Решение системы уравнений для мнимых частей дает

$$b_{-12} = \frac{2\mu V_0 r R^2}{R^2 - r^2}, \quad c_{12} = -\frac{4\mu V_0 r}{R^2 - r^2} \tag{4.5}$$

Заметим, что мнимая часть коэффициента a_1 из системы (4.4) не определяется; впрочем, она не нужна при определении какой-либо механической величины, что уже наблюдалось в предыдущем разделе.

Решение системы уравнений для действительных частей указанных коэффициентов разложений имеет вид

$$A = \frac{1}{\Delta}[2\nu U_0 r - (1-\nu)\varepsilon_0(R^2 - r^2)], \quad a_{11} = \frac{1}{2\Delta}(A_1 + A_2 + A_3)$$

$$b_{-11} = \frac{2rR}{\Delta}\left\{\nu U_0 R - [(1-\nu)\varepsilon_0 Rr + 4(1-\nu)^2 U_0 R]\ln\frac{R}{r}\right\} \tag{4.6}$$

$$c_{11} = \frac{2(2-\nu)}{\Delta}\left\{\varepsilon_0(R^2 - r^2) - 2[\varepsilon_0 r^2 + 4(1-\nu)U_0 r]\ln\frac{R}{r}\right\}$$

где

$$A_1 = [2(1-\nu)\varepsilon_0 R^2 - 2(2-\nu)(\varepsilon_0 r + 2U_0)r]\ln R$$

$$A_2 = 2[\varepsilon_0 r + 4(1-\nu)2U_0]r\ln r$$

$$A_3 = (3-2\nu)\varepsilon_0(R^2 - r^2) - 4\nu U_0 r$$

$$\Delta = \frac{1}{\mu}\left\{[2(1-\nu)^2 R^2 - (1-2\nu)(2-\nu)r^2]\ln\frac{R}{r} - \nu(R^2 - r^2)\right\}$$

Опустив несложные выкладки, приведем выражения для компонент тензора напряжений к виду

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{c_{11}}{2} - 2(1-2\nu)[A(\ln\rho + 1) + a_{11}] - A + \frac{b_{-11}}{\rho^2}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{c_{11}}{2} - 2(1-2\nu)[A(\ln\rho + 1) + a_{11}] + A - \frac{b_{-11}}{\rho^2} \tag{4.7}$$

$$\sigma_{33} = 4(2-\nu)[A(\ln\rho + 1) + a_{11}] - c_{11}$$

$$\sigma_{\rho\vartheta} = \frac{b_{-12}}{\rho^2}, \quad \sigma_{\rho 3} = 4(1-\nu)A\frac{x_3}{\rho}, \quad \sigma_{\vartheta 3} = 0$$

Для компоненты ε_{33} тензора деформации, непосредственно необходимой при проверке граничного условия (4.3), имеем выражение

$$4\mu\varepsilon_{33} = 16(1-\nu)[A(\ln\rho + 1) + a_{11}] - 2c_{11}$$

Компоненты вектора перемещения также легко определяются:

$$u_\rho = -2A\rho(\ln\rho + 1) - 4a_{11}\rho - 2\frac{b_{-11}}{\rho} + c_{11}\rho, \quad u_\vartheta = 2\frac{b_{-12}}{\rho} + c_{12}\rho$$

Определим теперь предельные значения компонент тензора напряжений на контуре внутреннего отверстия в кольцевой пластинке. Для этого в выражениях (4.7) положим $\rho = r \to 0$. В результате получим

$$\sigma_{\rho\rho} = -\mu\left[\varepsilon_0 + 2\frac{U_0}{r}\right], \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \mu\left[\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_0 + 2\frac{U_0}{r}\right], \quad \sigma_{33} = \frac{2-\nu}{1-\nu}\mu\varepsilon_0, \quad \sigma_{\rho\vartheta} = 2\mu\frac{V_0}{r},$$

$$\sigma_{\rho 3} = \mu x_3\frac{\varepsilon_0}{r\ln r}$$

Оценим теперь влияние выбора краевых условий на границе контакта шайбы с пластинкой. С этой целью предположим, что свободная поверхность пластинки не нагружена; при этом вместо условия (4.3) рассмотрим граничное условие

$$\sigma_{33}\big|_{\rho = r} = 0$$

Как и выше, задача сводится к двум системам уравнений относительно действительных и мнимых частей неизвестных коэффициентов разложений A, a_1, b_{-1}, c_1. Матрица системы для действительных частей коэффициентов разложений (4.4) отличается от первой матрицы (2.18) лишь тем, что в ее третьей строке в первом и во втором столбцах множитель $1-\nu$ заменяется множителем $1-\nu/2$. Матрица для мнимых частей совпадает со второй матрицей (2.18), в силу чего коэффициенты b_{-12}, c_{12} также определяются соотношениями (4.5).

Решение системы уравнений для действительных частей коэффициентов разложений дает

$$A = 0, \quad a_{11} = -\frac{\mu U_0 r}{(1-\nu)(R^2-r^2)}, \quad b_{-11} = -\frac{2\mu U_0 R^2 r}{(R^2-r^2)}, \quad c_{11} = -\frac{4\mu(2-\nu)U_0 r}{(1-\nu)(R^2-r^2)}$$

Мнимая часть коэффициента a_1, как уже отмечалось выше, не играет роли при определении компонент тензора напряжений.

Используя выражения для указанных коэффициентов, получим следующие представления для компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{\rho\rho} = -2\mu\frac{(1-\nu)R^2 + (1+\nu)r^2}{(1-\nu)(R^2-r^2)}\frac{U_0 r}{\rho^2}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = 2\mu\frac{(1-\nu)R^2 - (1+\nu)r^2}{(1-\nu)(R^2-r^2)}\frac{U_0 r}{\rho^2}$$

$$\sigma_{\rho\vartheta} = 2\mu\frac{R^2}{(R^2-r^2)}\frac{V_0 r}{\rho^2}$$

Остальные его компоненты равны нулю.

Для компонент вектора перемещений имеем

$$u_\rho = \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}\frac{U_0 r}{\rho}, \quad u_\vartheta = \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}\frac{V_0 r}{\rho}$$

И, наконец, для компоненты ε_{33} тензора деформаций получаем

$$\varepsilon_{33} = \frac{2\nu U_0 r}{(1-\nu)(R^2 - r^2)}$$

Для оценки действия сосредоточенных нагрузок положим $\rho = r \to 0$. В результате получим

$$\sigma_{\rho\rho} = -2\mu\frac{U_0}{r}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = 2\mu\frac{U_0}{r}, \quad \sigma_{\rho\vartheta} = 2\mu\frac{V_0}{r}$$

Отметим, что предельные значения компонент $\sigma_{\rho\rho}$ и $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ тензора напряжений полностью соответствуют известным выражениям для этих величин при заданном радиальном перемещении [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Шарафутдинов Г.З.* Применение функций комплексного переменного к некоторым пространственным задачам теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 659–669.
3. *Шарафутдинов Г.З.* Решение задачи Кирша в трехмерной постановке // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2001. № 6. С. 20–25.
4. *Шарафутдинов Г.З.* Напряжения в бесконечной пластинке со свободным эллиптическим отверстием // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 108–119.

Москва
e-mail: sharaf@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
2.IV.2003