

УДК 539.3

© 2004 г. Н. Д. Бертяева, В. Б. Пеньков

**РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ  
И СОПРЯЖЕННЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ**

Решена задача о растяжении упругой анизотропной плоскости с линейным включением по отрезку. Задача приведена к краевой задаче Римана на двух листах комплексной плоскости, склеенных по действительной оси. Выполнены расчеты для включения, расположенного наклонно к оси анизотропии.

Для решения плоских смешанных задач изотропной упругости для односвязного тела был разработан метод граничных представлений [1], обладающий рядом отличительных особенностей и достоинств.

1. Любая компонента тензоров напряжений ( $\sigma_n, \sigma_\tau, \tau_n$ ), деформаций ( $\epsilon_n, \epsilon_\tau, \epsilon_{n\tau}$ ), отнесенных к системе координат “нормаль–касательная” ( $n, \tau$ ), и производная по дуговой координате от декартовых составляющих перемещения ( $u, v$ ) на границе тела выражаются в форме линейной комбинации граничных значений единственного набора функций, аналитических в круге или полуплоскости и их дополнений до полной плоскости. То же самое можно сказать о любой линейной комбинации этих объектов (унифицированность представления).

2. Набору граничных условий на некотором участке границы соответствует сопряжение краевых значений векторов аналитических функций с рациональными матричными коэффициентами. Модуль определителя матричного коэффициента тождественно равен единице (допускается класс областей, отображаемых конформно на канонические рациональными функциями; униформальность граничных условий).

3. Совокупности смешанных граничных условий соответствует краевая задача Римана с разрывным матричным коэффициентом, поставленная на окружности либо прямой. Поскольку в каждой точке границы модуль определителя матричного коэффициента равен единице, разрыв терпит лишь его аргумент. Этот факт свидетельствует о безусловной разрешимости краевой задачи (математическая корректность модели).

4. Процесс формализации физической задачи сводится к конструированию задачи теории функций из готовых блоков, отвечающих за тот или иной тип граничных условий. В случае неограниченного тела условие сопряжения следует дополнить требованиями, обеспечивающими конкретное напряженное состояние в дальней зоне (конструктивность формализации).

5. В ряде случаев удается провести факторизацию матричного коэффициента и выписать квадратное или явное решение.

6. Униформальность граничного представления позволяет вместо краевой задачи Римана рассматривать систему сингулярных интегральных уравнений относительно любой пары независимых механических характеристик (гибкость аппарата).

7. Для построения эпюр нет необходимости восстанавливать упругое поле. Распределение механической величины вдоль границы можно восстановить непосредственно через краевые значения найденных аналитических функций, пользуясь формулами ее граничного представления (экономичность).

Распространение столь эффективного метода на анизотропные объекты представляется темой актуальной.

Как известно [2], для плоской анизотропии возможны два варианта представления полевых характеристик через аналитические функции. В случае попарно равных корней характеристического уравнения формулы комплексного представления идентичны формулам Колосова–Мусхелишвили и поэтому все выполненное для изотропии полностью повторяемо [3]. В случае попарно различных корней комплексное представление С.Г. Лехницкого выражает полевые ха-

рактически через аналитические функции переменных, отнесенных к различным комплексным плоскостям, между точками которых установлено аффинное соответствие. Ниже развигается аппарат метода граничных представлений для тел с прямолинейной границей, т.е. полуплоскости или плоскости с особенностями, локализованными вдоль прямой или совокупности отрезков и лучей, ориентированных вдоль одной прямой.

**1. Формулы граничного представления для полуплоскости.** Совместим с планом упругого тела комплексную полуплоскость  $z = x + iy$ ,  $y > 0$ . Формулы комплексного представления С.Г. Лехницкого [1] выражают компоненты тензоров напряжений  $\sigma_x^+$ ,  $\sigma_y^+$ ,  $\sigma_{xy}^+$  и деформаций  $\epsilon_x^+$ ,  $\epsilon_y^+$ ,  $\epsilon_{xy}^+$ , а также производную от вектора перемещения  $u + iv$  по координате  $x$  через две функции  $\Omega_1^+(z_1)$ ,  $\Omega_2^+(z_2)$ , каждая из которых – аналитическая по своей переменной  $z_1, z_2$  [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_x^+ &= 2\text{Re}[\mu_1^2\Omega_1^+(z_1) + \mu_2^2\Omega_2^+(z_2)] \\ \sigma_y^+ &= 2\text{Re}[\Omega_1^+(z_1) + \Omega_2^+(z_2)] \\ \sigma_{xy}^+ &= -2\text{Re}[\mu_1\Omega_1^+(z_1) + \mu_2\Omega_2^+(z_2)] \\ \epsilon_x^+ &= 2\text{Re}[p_1\Omega_1^+(z_1) + p_2\Omega_2^+(z_2)] \\ \epsilon_y^+ &= 2\text{Re}[p_3\Omega_1^+(z_1) + p_4\Omega_2^+(z_2)] \\ \epsilon_{xy}^+ &= -2\text{Re}[p_5\Omega_1^+(z_1) + p_6\Omega_2^+(z_2)] \\ \partial v^+/\partial x &= 2\text{Re}[q_1\Omega_1^+(z_1) + q_2\Omega_2^+(z_2)] + \omega \\ \omega_{xy} &= \frac{1}{2}(\partial u^+/\partial y - \partial v^+/\partial x) = \\ &= -2\text{Re}[(q_1 - p_5)\Omega_1^+(z_1) + (q_2 - p_6)\Omega_2^+(z_2)] - \omega\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $\omega$  задает жесткое вращение,  $\omega_{xy}$  – поворот элемента среды, все константы определены через упругие постоянные анизотропии  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned}p_1 &= a_{11}\mu_1^2 + a_{12} - a_{16}\mu_1, & p_3 &= \mu_1 q_1 \\ p_2 &= a_{11}\mu_2^2 + a_{12} - a_{16}\mu_2, & p_4 &= \mu_2 q_2 \\ p_5 &= \mu_1(a_{11} - a_{12}), & p_6 &= \mu_2(a_{11} - a_{12}) \\ q_1 &= a_{12}\mu_1 + a_{22}/\mu_1 - a_{26}, & q_2 &= a_{12}\mu_2 + a_{22}/\mu_2 - a_{26}\end{aligned}$$

Образом физической плоскости служит пара листов  $z_1 = x + \mu_1 y$ ,  $z_2 = x + \mu_2 y$ , склеенных вдоль общей оси  $y = 0$ . Любую аналитическую функцию, имеющую на оси  $x$  значение  $f(x)$ , можно продолжить с этой оси на каждую из четырех полуплоскостей как  $f(z_1)$  либо как  $f(z_2)$ . Обозначим через  $D^+$  совокупность полуплоскостей от  $z_1, z_2$  при  $y > 0$  и через  $D^-$  – их дополнение до двулистной поверхности.

Через функции  $\Omega_1^+(z_1)$ ,  $\Omega_2^+(z_2)$  определим еще две функции, аналитические в идентифицированных знаками полуплоскостях (используется обозначение Н.И. Мусхелишвили [4])

$$\Omega_3^-(z_1) = \overline{\Omega_1^+(z_1)}, \quad \Omega_4^-(z_2) = \overline{\Omega_2^+(z_2)}\tag{1.2}$$

Использование для этих функций двойной идентификации (индексы 1, 2 здесь сочетаются с индексом плюс, а 3, 4 – с индексом минус) избыточное, но его удобство про-

явится в задачах для плоскости, когда наряду с полем верхней полуплоскости (индекс плюс) будет фигурировать поле нижней полуплоскости (индекс минус). После этого каждую из функций аналитически продолжаем на другой лист через общую границу. Для текущей точки двулистной поверхности введем общее обозначение  $z$ , полагая  $z = z_1$  или  $z = z_2$  в зависимости от нумерации листов. Соответственно после выполнения аналитических продолжений каждая из функций зависит от единого аргумента.

Через граничные значения при  $z = z_1 = z_2 = x$  этих функций выражаются все основные механические величины. Их сводка содержится в табл. 1 (граничное значение механической величины из первого столбца равно линейной комбинации краевых значений функций, стоящих в огловке таблицы, со своими коэффициентами).

Приведем некоторые примеры конструирования краевых соотношений для пространственных вариантов граничных условий.

*Поверхностные усилия.* На границе определены нормальные и касательные напряжения. Строки для напряжений  $p = \sigma_y^+$ ,  $\tau = \sigma_{xy}^+$  дают условия сопряжения вида

$$\begin{vmatrix} \Omega_1^+ \\ \Omega_2^+ \end{vmatrix} = G \begin{vmatrix} \Omega_3^- \\ \Omega_4^- \end{vmatrix} + g \tag{1.3}$$

$$G = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \begin{vmatrix} \mu_2 - \bar{\mu}_1 & \mu_2 - \bar{\mu}_2 \\ \bar{\mu}_1 - \mu_1 & \bar{\mu}_2 - \mu_1 \end{vmatrix}, \quad g = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \begin{vmatrix} -\mu_2 p - \tau \\ \mu_1 p + \tau \end{vmatrix}$$

*Поверхностные перемещения.* На границе определены перемещения. С точностью до константы за эти условия отвечают строки  $u' = \partial u^+ / \partial x$ ,  $v' = \partial v^+ / \partial x$  и коэффициенты имеют вид

$$G = \frac{1}{q_2 p_1 - q_1 p_2} \begin{vmatrix} \bar{q}_1 p_2 - q_2 \bar{p}_1 & \bar{q}_2 p_2 - q_2 \bar{p}_2 \\ q_1 \bar{p}_1 - \bar{q}_1 p_1 & q_1 \bar{p}_2 - \bar{q}_2 p_1 \end{vmatrix}$$

$$g = \frac{1}{q_2 p_1 - q_1 p_2} \begin{vmatrix} q_2 u' - p_2 v' \\ -q_1 u' + p_1 v' \end{vmatrix}$$

*Контакт с гладким профилем.* Под жестким штампом определена нормальная составляющая перемещения и касательное напряжение (равное нулю). Коэффициенты таковы:

$$G = \frac{1}{q_2 \mu_1 - q_1 \mu_2} \begin{vmatrix} \bar{q}_1 \mu_2 - q_1 \bar{\mu}_2 & \bar{q}_2 \mu_2 - q_2 \bar{\mu}_2 \\ q_1 \bar{\mu}_1 - \bar{q}_1 \mu_1 & q_1 \bar{\mu}_2 - \bar{q}_2 \mu_1 \end{vmatrix}$$

$$g = \frac{1}{q_2 \mu_1 - q_1 \mu_2} \begin{vmatrix} -q_2 \tau - \mu_2 v' \\ q_1 \tau + \mu_1 v' \end{vmatrix}$$

Допущение в дальней зоне конечных напряжений характеризует все введенные функции как ограниченные на бесконечности

$$\begin{aligned} \Omega_1^+(z_1) &= \Gamma + A z_1^{-1} + O(z_1^{-2}) \\ \Omega_2^+(z_2) &= \Gamma' + B z_2^{-1} + O(z_2^{-2}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если обозначить параметры однородного напряженного состояния и поворота в дальней зоне через  $\sigma_x^\infty$ ,  $\sigma_y^\infty$ ,  $\sigma_{xy}^\infty$ ,  $\omega^\infty$ , то между ними и значениями функций в бесконечно удаленной точке  $\Gamma = \Omega_1^+(\infty)$ ,  $\Gamma' = \Omega_2^+(\infty)$  можно на основании выражений (1.1) обнаружить связь

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^\infty \\ \sigma_y^\infty \\ \sigma_{xy}^\infty \\ -2\omega^\infty \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Gamma \\ i\operatorname{Im}\Gamma \\ \operatorname{Re}\Gamma' \\ i\operatorname{Im}\Gamma' \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} \mu_1^2 + \bar{\mu}_1^2 & \mu_1^2 - \bar{\mu}_1^2 & \mu_2^2 + \bar{\mu}_2^2 & \mu_2^2 - \bar{\mu}_2^2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -\mu_1 - \bar{\mu}_1 & -\mu_1 + \bar{\mu}_1 & -\mu_2 - \bar{\mu}_2 & -\mu_2 + \bar{\mu}_2 \\ \operatorname{Re}r_1 & i\operatorname{Im}r_1 & \operatorname{Re}r_2 & i\operatorname{Im}r_2 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = q_1 + p_5, \quad r_2 = q_2 + p_6$$

Обращение соотношений (1.5) позволяет устанавливать в каждом конкретном случае значения функций в бесконечно удаленной точке. Относительно постоянных  $A$ ,  $B$  в разложении (1.4) С.Г. Лехницкий [1] сформулировал однозначно разрешимую систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \mu_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_1 & -\bar{\mu}_2 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & -\bar{\mu}_1^2 & -\bar{\mu}_2^2 \\ \mu_1^{-1} & \mu_2^{-1} & -\bar{\mu}_1^{-1} & -\bar{\mu}_2^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ \bar{A} \\ \bar{B} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -\tilde{Y} \\ \tilde{X} \\ (a_{16}\tilde{X} + a_{12}\tilde{Y})/a_{11} \\ -(a_{12}\tilde{X} + a_{26}\tilde{Y})/a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$\tilde{X} = X/(2\pi h), \quad \tilde{Y} = Y/(2\pi h)$$

$X + iY$  – главный вектор сил, приложенных к пластинке толщиной  $h$  в конечной части плоскости.

**2. Решение задачи сопряжения на двулистной поверхности.** Рассмотрим граничные условия “рода  $N$ ” [1], когда вдоль границы тела удержано соответствующее количество различных линейных соотношений между механическими величинами. При этом граница тела разбита на  $N$  классов

$$\partial D^+ = l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_N, \quad l_k \cap l_j = \emptyset, \quad k \neq j$$

Конструирование краевого соотношения относительно аналитических векторов

$$\Omega^+ = \{\Omega_1^+, \Omega_2^+\}, \quad \Omega^- = \{\Omega_3^-, \Omega_4^-\}$$

приводит к краевой задаче вида

$$\Omega^+ = G\Omega^- + g, \quad x \in \partial D^+; \quad G = G_n, \quad g = g_n, \quad x \in l_n \quad (2.1)$$

Матричный коэффициент  $G$  является кусочно-постоянным. В силу определения “по симметрии”  $\Omega^- = \overline{\Omega}^+$  после перехода к сопряжению в (2.1) получаем два соотношения:

$$G\overline{G} = E, \quad G\overline{g} + g = 0$$

Первое из них свидетельствует о том, что  $|\det G| = 1$ .

Требуется найти функции, аналитические на поверхности, составленной из двух листов, склеенных вдоль действительной оси. Эти функции должны удовлетворять условию симметрии (1.2) и ограничениям (1.3).

Эту задачу можно свести к аналогичной проблеме, но на плоскости. Для этого достаточно игнорировать один из листов поверхности. Действительно, решение “усеченной” задачи для каждого из листов независимо друг от друга и последующее склеивание обеспечивают удовлетворение всем граничным условиям и условиям на бесконечности. Симметрия функций, удовлетворенная в рамках одного листа, будет наблюдаться и после склеивания, поскольку индекс переменной  $z$ , “привязывающий” ее к листу, “забыт”.

Основная трудность при решении “усеченной” задачи состоит в факторизации матричного коэффициента, т.е. в представлении его в виде

$$G = X^+(x)[X^-(x)]^{-1}, \quad x \in \partial D^+$$

где участвующие в произведении функциональные матрицы (канонические решения) являются граничными значениями матриц, аналитических в идентифицированных знаком полуплоскостях и допускающих определенный порядок на бесконечности [5]. Первая факторизация кусочно-постоянного матричного коэффициента была выполнена Племелем [6].

Общее решение матричной краевой задачи Римана на плоскости имеет форму

$$\Omega^\pm(z) = X^\pm(z) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{X^\pm(t)}{t-z} dt + P(z) \right], \quad z \in D^\pm \tag{2.2}$$

где  $P(z)$  – вектор многочленов с неопределенными коэффициентами, обеспечивающий требуемое поведение искомых функций на бесконечности. Значения его коэффициентов устанавливаются в процессе выделения частного решения, гарантирующего не только заданный уровень напряжений в дальней зоне и оговоренную симметрию функций, но также особенности постановки конкретной задачи (например, потерянные при дифференцировании перемещения по параметру границы постоянные следует восстановить).

*Замечание.* В случаях, когда матричный коэффициент задачи (2.1) имеет диагональную структуру, краевая задача редуцируется и вместо вектора функций оказывается достаточным рассматривать скалярную. Иные функции либо определяются по симметрии, либо не являются необходимыми.

**3. Формулы граничного представления для сопряженных полуплоскостей.** Две анизотропные полуплоскости сопряжены по прямой, с которой свяжем действительную ось комплексной плоскости. Состояние верхней полуплоскости опишем при помощи функций  $\Omega_1^+(z_1)$ ,  $\Omega_2^+(z_2)$  формулами (1.1), в которых упругие постоянные следует пометить индексом плюс, состояние нижней полуплоскости – при помощи функций  $\Omega_1^-(z_1)$ ,  $\Omega_2^-(z_2)$  аналогичными формулами, принимая для упругих постоянных индекс минус. Для каждой из этих функций определим симметричную в сопряженной полуплоскости формулами вида (1.2). Таким образом, на паре склеенных

Таблица 1

Таблица 2

Механические величины	Коэффициенты при функциях ( $n = 1, 2$ )		Разрывы механических величин	Коэффициенты при функциях ( $n = 1, 2$ )	
	$\Omega_n^+$	$\Omega_{n+2}^-$		$\Omega_n^\pm$	$\Omega_{n+2}^\pm$
$\sigma_x^+$	$\mu_n^2$	$\mu_n^{-2}$	$[\sigma_x]$	$\pm\mu_n^{\pm 2}$	$\mp\mu_n^{-\mp 2}$
$\sigma_y^+$	1	1	$[\sigma_y]$	$\pm 1$	$\mp 1$
$\sigma_{xy}^+$	$-\mu_n$	$-\mu_n^-$	$[\sigma_{xy}]$	$\mp\mu_n^\pm$	$\pm\mu_n^{-\mp}$
$\epsilon_x^+ = \partial u^+/\partial x$	$p_n$	$p_n^-$	$[\epsilon_x] = \partial[u]/\partial x$	$\pm p_n^\pm$	$\mp p_n^{-\mp}$
$\epsilon_y^+$	$p_{n+2}$	$p_{n+2}^-$	$[\epsilon_y]$	$\pm p_{n+2}^\pm$	$\mp p_{n+2}^{-\mp}$
$2\epsilon_{xy}^+$	$p_{n+4}$	$p_{n+4}^-$	$2[\epsilon_{xy}]$	$\pm p_{n+4}^\pm$	$\mp p_{n+4}^{-\mp}$
$\partial v^+/\partial x$	$q_n$	$q_n^-$	$\partial[v]/\partial x$	$\pm q_n^\pm$	$\mp q_n^{-\mp}$

вдоль общей оси  $x$  листов двулистной поверхности с единой комплексной переменной  $z$  определены два аналитических вектора

$$\Omega^\pm(z) = \{\Omega_1^\pm(z), \Omega_2^\pm(z), \Omega_3^\pm(z), \Omega_4^\pm(z)\}$$

через граничные значения которого выражаются не только механические величины, фигурирующие в табл. 1, но и аналогичные со стороны нижней полуплоскости и их скачки вида  $[a] = a^+ - a^-$ . Сводка скачков величин приведена в табл. 2.

Процедура конструирования краевого соотношения для аналитических функций принципиального отличия от изложенного выше не имеет. Приведем некоторые примеры типовых соотношений в местах сопряжения полуплоскостей, составленных из однородного материала (поэтому индексы плюс и минус опущены).

*Условие сплошности поля.* В случае, когда напряжения и перемещения не терпят разрывов вдоль линии сопряжения, коэффициенты краевого условия принимают простейшие значения

$$G = E, \quad g = 0 \quad (3.1)$$

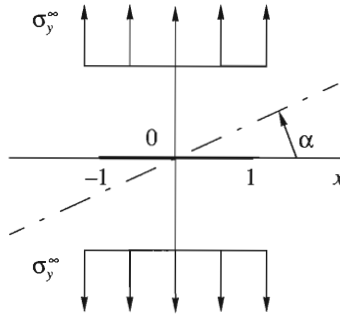
*Жесткое линейное включение.* Одномерное включение перемещается как абсолютно твердое тело, поэтому на нем определены перемещения со сторон каждой из полуплоскостей (с точностью до трех действительных констант). Для формирования коэффициентов условия сопряжения можно удержать выражения для составляющих перемещения из табл. 1 и их разрыва из табл. 2. Получаем выражения

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha/\delta & \beta/\delta \\ 0 & 0 & \gamma/\delta & \bar{\alpha}/\delta \\ \bar{\alpha}/\delta & -\beta/\delta & 0 & 0 \\ -\gamma/\delta & \alpha/\delta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\delta = q_2 p_1 - q_1 p_2, \quad \alpha = q_2 \bar{p}_1 - \bar{q}_1 p_2$$

$$\beta = q_2 \bar{p}_2 - \bar{q}_2 p_2, \quad \gamma = \bar{q}_1 p_1 - q_1 \bar{p}_1$$

в которых  $\omega_0$  – угол поворота.



Фиг. 1

*Разрез.* Вдоль разреза, берега которого не взаимодействуют, нормальные и касательные усилия отсутствуют. Удержание соответствующих строк из табл. 1 (дважды, поскольку для тела, занимающего нижнюю полуплоскость, справедливы такие же представления, но с индексом минус) дает

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = 0 \tag{3.3}$$

При постановке краевых задач для векторов размерности четыре также возможны случаи, когда допустима редукция. Они обусловлены особенностями структуры в общем кусочного матричного коэффициента, а именно наличием в нем диагональных блоков.

**4. Одноосное растяжение плоскости, содержащей включение.** Пусть включение произвольно ориентировано к осям анизотропии под углом  $\alpha$ . Совместим с его серединой начало координат и направим вдоль него ось  $x$ . Будем полагать, что включение занимает отрезок  $[-a, a]$  (фиг. 1). Вдоль оси выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} v^\pm &= \omega_0 x, \quad \varepsilon_x^\pm = 0, \quad x \in l_1 \\ [\sigma_y] &= 0, \quad [\sigma_{xy}] = 0, \quad [u] = 0, \quad [v] = 0 \\ x \in l_2 &= (-\infty, -a) \cup (a, \infty) \end{aligned} \tag{4.1}$$

$\omega_0$  отвечает за жесткое вращение включения.

После применения формул граничного представления (табл. 1, 2), приходим от (2.1) к краевой задаче Римана на общем отрезке двулистной поверхности в классе ограниченных на бесконечности функций

$$\Omega^+ = G\Omega^- + \omega_0 g, \quad x \in l_1 \tag{4.2}$$

Коэффициенты  $G, g$  определены в соответствии с выражениями (3.2).

Поскольку матрица коэффициентов в задаче (4.2) – постоянная на разомкнутом контуре, ее факторизация проводится через представление в нормальной форме Жордана и переходу к совокупности одномерных задач на разомкнутом контуре [1]. Матрица  $G$  имеет разложение

$$G = R\Lambda P^{-1}, \quad \Lambda = \text{diag}\{1, 1, -1, -1\}$$

Постоянные элементы матрицы  $R = [R_{ij}]$  однозначно определены.

Замена неизвестных  $\Psi^\pm(z) = R^{-1}\Omega^\pm(z)$ , где аргумент принадлежит любому листу, приводит к матричной форме записи для совокупности одномерных краевых задач Римана на отрезке

$$\Psi^+ = \Lambda\Psi^-, \quad x \in l_1 \quad (4.3)$$

Лишь третья и четвертая из строк (4.3) имеют коэффициент  $-1$ , который факторизуется при дополнении отрезка до прямой канонической функцией  $\Pi(z) = 1/\sqrt{z^2 - a^2}$ , имеющей различные пределы при подходе к  $l$  сверху или снизу, остальные непрерывны на  $l$ . Поэтому каноническая матрица задачи (4.2) определяется как

$$X^\pm(z) = R \text{diag}\{1, 1, \Pi(z), \Pi(z)\}$$

Общее решение задачи (4.2), обеспечивающее ограниченность функций на бесконечности, таково:

$$\Omega^\pm(z) = X^\pm(z) \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 + Q_3 z \\ P_4 + Q_4 z \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Равенство нулю главного вектора и условия (4.2) на бесконечности однозначно определяют все неопределенные коэффициенты общего решения, тем самым выделяют частное решение, удовлетворяющее механическому смыслу задачи. В случае отсутствия поворота включения они принимают значения

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Gamma' \\ \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}' \end{pmatrix}, \quad P_3 = P_4 = 0$$

Последовательность формул (4.4), (1.1) позволяет восстановить механическое поле. Непосредственное применение формул граничного представления позволяет получать эпюры всех механических характеристик вдоль действительной оси без построения поля.

Приняты реальные значения для упругих постоянных ортотропного материала [2]

$$E_1 = 2E_2 = 120 \text{ МПа}, \quad G = 7 \text{ МПа}, \quad \nu_1 = 2\nu_2 = 0.072$$

Через эти параметры выражены коэффициенты:

$$a_{11} = 1/E_1, \quad a_{22} = 1/E_2, \quad a_{12} = -\nu_1/E_1 = -\nu_2/E_2$$

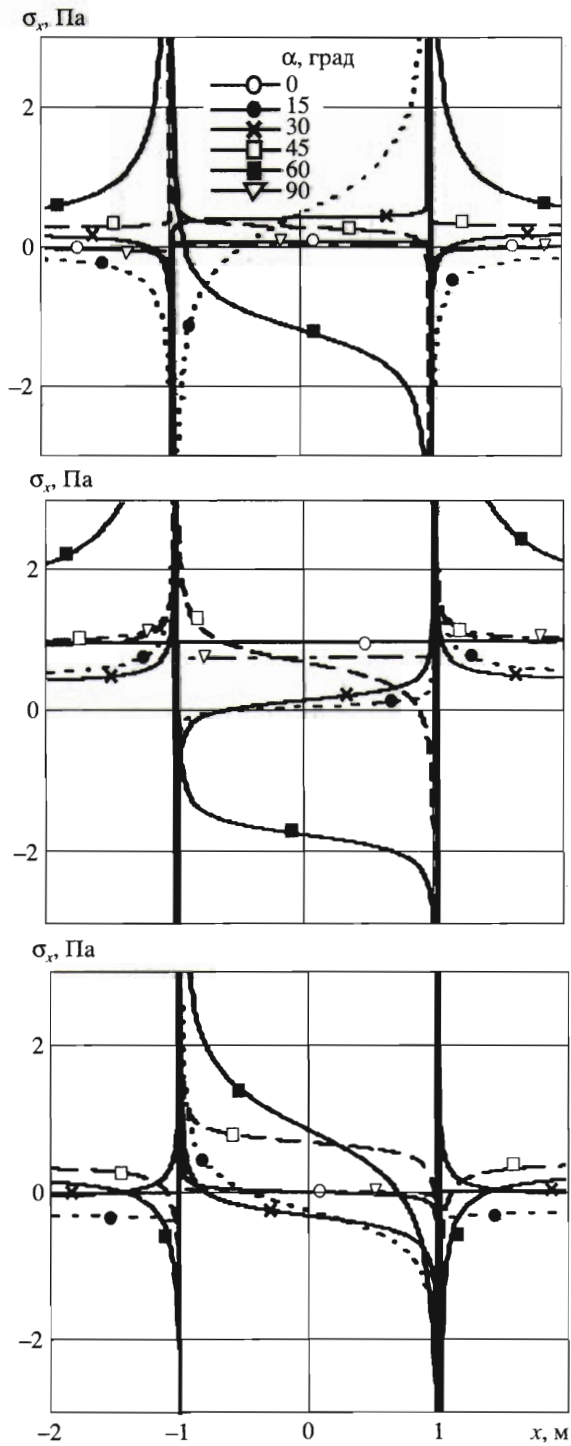
$$a_{16} = a_{26} = 0, \quad a_{66} = 1/G$$

и корни характеристического уравнения:  $\mu_1 = 4.11i$ ,  $\mu_2 = 0.343i$ . Неопределенные коэффициенты общего решения при  $\alpha = 0$  приняли значения

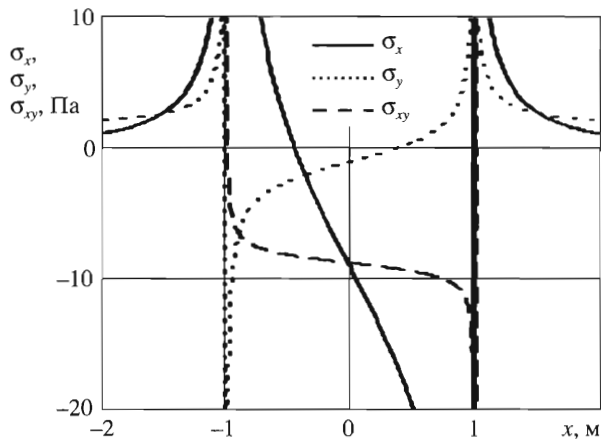
$$P_1 = -0.025, \quad P_2 = 0.71, \quad Q_3 = -3.934 \cdot 10^{-4}, \quad Q_4 = 2.941 \cdot 10^{-3},$$

$$P_3 = P_4 = 0$$

Расчеты проведены при  $\alpha = 0, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ . Эпюры напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  вдоль оси  $x$  построены непосредственно по формулам граничного представления табл. 1 и приведены на фиг. 2, 3 для правой полуоси со стороны верхней полуплоскости. При  $\alpha = 0$  нормальное напряжение  $\sigma_y$  распределено равномерно вдоль



Фиг. 2



Фиг. 3

оси  $x$ , напряжение  $\sigma_x$  – равномерное в пределах включения (вследствие постоянного напряжения  $\sigma_y$  и отсутствия деформаций в продольном волокне), на границе включения оно сжимающее и неограниченное по модулю. Касательные напряжения, напротив, отсутствуют за пределами включения и не ограничены вблизи конца включения. Полевые характеристики напряженно-деформированного состояния можно построить, анализируя найденные аналитические функции и используя представление С.Г. Лехницкого (1.1). Как видно из данных, приведенных на фиг. 2, при повороте осей анизотропии напряжения, растягивающие примыкающие ко включению волокна, качественно меняют свой характер как в пределах включения, так и вне его. Напряжения, растягивающие нормальные включению волокна, качественно меняют свой характер только в пределах включения. Касательные напряжения качественно меняют свой характер только за пределами включения.

**5. Выводы.** Предлагаемый метод позволяет строить строгие решения многих смешанных задач с прямолинейной границей тела. Решение можно также строить численно, используя аппарат “базовой задачи Римана” [1], сводящий граничную задачу к системе сингулярных интегральных уравнений. В частности, представляется интересным рассмотрение следующих задач: фундаментальное решение для анизотропной среды, содержащей линейное жесткое включение; система коллинеарных отслоений в месте спайки разнородных анизотропных полуплоскостей; контактная задача для анизотропной полуплоскости и др.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Толоконников Л.А., Пеньков В.Б. Метод граничных представлений в двумерных задачах механики. Тула: ТВАИУ, 1998. 378 с.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
3. Бертяева Н.Д., Пеньков В.Б. Метод граничных представлений в плоской анизотропной упругости // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Тула: ТулГУ, 1996. Т. 3. Вып. 1. С. 87–90.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. Plemelj I. Riemannsche Functionenschaeren mit gegebener Monodromiegruppe // Monatsh. Math. und Phys. 1908. Bd. 19. S. 211–245.