

УДК 533.72

© 2004 г. В. С. Галкин, В. А. Жаров

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
БОЛЬЦМАНА–МАКСВЕЛЛА**

Дан обзор точных решений по следующим направлениям: локально-максвелловские решения, пространственно-однородная релаксация бинарной смеси газов (моментные решения и обобщение решения Бобылева–Крука–Ву), гомоэнергетические аффинные течения (класс точных решений Галкина–Труделла), сферический разлет–слет (преобразование Никольского), доминантные решения, степенные решения. По второму и третьему направлениям получены новые результаты. Особое внимание уделено качественным свойствам решений, представляющим достаточно общий интерес. Под точным решением понимается решение в явном виде, т.е. через элементарные или трансцендентные функции, нелинейного кинетического уравнения Больцмана–Максвелла (функции распределения) или уравнений переноса Максвелла (моменты функций распределения). Последние называются также моментными решениями кинетического уравнения. В основном молекулы газа предполагаются максвелловскими, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности линейно зависят от температуры.

В названии статьи сделана попытка восстановить историческую справедливость [1]. Как известно [1–3], Максвелл ввел фундаментальное статистическое понятие – функцию распределения, положив начало статистической физике и физической кинетике. При выводе уравнений кинетических моментов (уравнений переноса Максвелла) им было сформулировано все необходимое для того, чтобы записать кинетическое уравнение для функции распределения, что и было сделано Больцманом. Поэтому в работах начала 20 века кинетическое уравнение называлось именами Больцмана и Максвелла [2], а не только Больцмана [4–6].

В силу сложности кинетического уравнения точные решения описывают весьма вырожденные процессы. Компьютерная революция позволила получить численные решения большого числа задач. Тем не менее точным решениям уделяется значительное внимание в кинетической теории [1, 4–6].

С целью сокращения объема не рассматриваются статьи, в которых используются упрощенные операторы столкновений (линеаризованные или модельные операторы) или предполагается, что внешние силы зависят от скоростей молекул. Предпочтение отдается завершающим статьям, опубликованным в легко доступных изданиях. Первостепенное внимание уделяется новым результатам и результатам, не получившим существенного отражения в известных руководствах [1, 4–6].

1. Исходные соотношения. Запишем систему кинетических уравнений Больцмана–Максвелла в переменных C_i, \mathbf{r}, t , где собственная скорость частицы i -го компонента смеси одноатомных газов $C_i = \xi_i - \mathbf{u}$, ξ_i – абсолютная скорость частицы, \mathbf{u} – среднemasовая скорость

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum m_i \int \xi_i f_i(\xi_i, \mathbf{r}, t) d\xi_i$$

Здесь и ниже знак суммы означает суммирование по всем значениям $i = 1, 2, \dots, N$, где N – число компонентов смеси.

Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{Df_i}{Dt} + C_{i\beta} \frac{\partial f_i}{\partial r_\beta} + \left(F_{i\beta} - \frac{Du_\beta}{Dt} \right) \frac{\partial f_i}{\partial C_{i\beta}} - \frac{\partial f_i}{\partial C_{i\gamma}} C_{i\gamma} \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\gamma} &= J_i \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}, \quad f_i = f_i(\mathbf{C}_i, \mathbf{r}, t), \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь f_i – функция распределения одноатомных частиц i -го компонента по собственным скоростям \mathbf{C}_i ; \mathbf{F}_i – внешняя сила, отнесенная к массе частицы m_i ; J_i – оператор столкновений; r_α – компоненты радиус-вектора ($r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z$); используется суммирование по повторяющимся индексам $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; t – время.

Центральные моменты функции распределения вводятся формулой

$$M_{i\{\alpha\}}^{(n)} = m_i \int \mathbf{C}_i^{(n)} f_i d\mathbf{C}_i \equiv m_i \int C_{i\alpha_1} C_{i\alpha_2} \dots C_{i\alpha_n} f_i d\mathbf{C}_i, \quad \{\alpha\} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, \quad n \geq 0 \quad (1.2)$$

В частности, массовая плотность и диффузионная скорость i -го компонента $\rho_i = M_i^{(0)}$, $\mathbf{V}_i = M_i^{(1)}/\rho_i$, температура, компоненты тензора давлений и вектора теплового потока соответственно равны

$$(T, \tau_{\alpha\beta}, q_\alpha) = \sum \left\{ \frac{1}{3nk} M_{i\alpha\alpha}^{(2)}, M_{i\alpha\beta}^{(2)}, \frac{1}{2} M_{i\alpha\beta\beta}^{(3)} \right\}, \quad n = \sum n_i, \quad n_i = \frac{\rho_i}{m_i}$$

причем

$$\tau_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} p, \quad p = nkT, \quad p_{\alpha\alpha} = 0$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ и напряжения $p_{\alpha\beta}$ – компоненты единичного и бездивергентного тензоров соответственно, p – гидростатическое давление (далее просто давление), k – постоянная Больцмана. В гидродинамике величины $\sigma_{\alpha\beta} = -p_{\alpha\beta}$ называются вязкими напряжениями.

Из соотношений (1.1), (1.2) следуют уравнения переноса Максвелла (уравнения кинетических моментов)

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} M_{i\{\alpha\}}^{(n)} + \frac{\partial}{\partial r_\beta} M_{i\{\alpha\}\beta}^{(n+1)} - \left(F_{i\beta} - \frac{Du_\beta}{Dt} \right) m_i \int \frac{\partial \mathbf{C}_i^{(n)}}{\partial C_{i\beta}} f_i d\mathbf{C}_i + \\ + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\gamma} m_i \int \frac{\partial}{\partial C_{i\beta}} (C_{i\gamma} \mathbf{C}_i^{(n)}) f_i d\mathbf{C}_i = R_{i\{\alpha\}}^{(n)} \equiv m_i \int \mathbf{C}_i^{(n)} J_i d\mathbf{C}_i \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отсюда имеем уравнения сохранения

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \rho_i (\mathbf{u} + \mathbf{V}_i) = 0, \quad \nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\alpha} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1.5)$$

$$\rho \frac{Du_\alpha}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} - \sum \rho_i F_{i\alpha} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{3}{2} nk \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha} + (p \delta_{\alpha\beta} + p_{\alpha\beta}) \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{3}{2} kT \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \sum n_i V_{i\alpha} - \sum \rho_i F_{i\alpha} V_{i\alpha} = 0 \quad (1.7)$$

Уравнения (1.3) представляют собой бесконечную систему: в уравнение для $M_{i\{\alpha\}}^{(n)}$ входят пространственные производные от $M_{i\{\alpha\}\beta}^{(n+1)}$; за исключением случаев (1.4)–(1.7), правые части уравнений переноса $R_{i\{\alpha\}}^{(n)} \neq 0$ и зависят от моментов различного порядка.

Особым является случай максвелловских молекул (для них межмолекулярная сила взаимодействия частиц i и j равна $\kappa_{ij}r^{-5}$, где $i, j = 1, 2, \dots, N$, r – расстояние между ними; коэффициенты переноса пропорциональны T), когда $R_{i\{\alpha\}}^{(n)}$ явно выражаются через моменты порядка $m \leq n$. Открытие этих молекул обусловило интерес Максвелла к уравнениям переноса. В этом случае при помощи системы уравнений (1.3) удается определить некоторые моменты функции распределения, не зная самой этой функции (разд. 3, 5, 7), т.е. получить моментные решения кинетического уравнения Больцмана–Максвелла.

Ниже в основном молекулы предполагаются максвелловскими, в противном случае делаются соответствующие оговорки.

Наиболее общие результаты вычисления $R_{i\{\alpha\}}^{(n)}$ получаются для простого газа (т.е. для однокомпонентного одноатомного газа, когда индекс i опускается). В монографиях приведены выражения для $R^{(2)}$, $R^{(3)}$ [1, 6], $R^{(4)}$ [1]. Удалось получить формулы для $R^{(5)}$, $R^{(6)}$ [7]. Предложен эффективный метод вычисления $R^{(n)}$ [8].

В частности, для напряжений $p_{\alpha\beta}$ простого газа справедлива система уравнений [1, 6]

$$\frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\gamma}(u_\gamma p_{\alpha\beta}) + \frac{\partial Q_{\alpha\beta\gamma}}{\partial r_\gamma} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\nabla\mathbf{q} + 2\left\langle p_{\alpha\gamma}\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\gamma}\right\rangle + 2p\left\langle\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta}\right\rangle = -\frac{p}{\mu}p_{\alpha\beta} \quad (1.8)$$

Здесь $\mu = \mu_0 T$ – коэффициент динамической вязкости ($\mu_0 = \text{const}$), операция $\langle \rangle$ вводится формулой

$$\langle A_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}A_{\gamma\gamma} \quad (1.9)$$

Моменты третьего порядка

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = m \int C_\alpha C_\beta C_\gamma f d\mathbf{C}, \quad q_\alpha = \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta\beta} \quad (1.10)$$

Система уравнений для них также приведена в [1, 6].

Более общая система уравнений переноса получается, если ввести средние скорости \mathbf{u}_i и температуры T_i , напряжения $p_{i\alpha\beta}$, тепловые потоки \mathbf{q}_i компонентов смеси газов формулами

$$[\mathbf{u}_i, T_i, p_{i\alpha\beta}, \mathbf{q}_i] = \int \left[\frac{\xi_i}{n_i}, \frac{m_i}{3n_i k} C_i^{*2}, m_i \left(C_{i\alpha}^* C_{i\beta}^* - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} C_i^{*2} \right), \frac{m_i}{2} C_i^* C_i^{*2} \right] f_i(\xi_i, \mathbf{r}, t) d\xi_i \quad (1.11)$$

Эти уравнения переноса получаются из уравнений (1.1)–(1.3) заменой \mathbf{u}, \mathbf{C}_i на $\mathbf{u}_i, \mathbf{C}_i^* = \xi_i - \mathbf{u}_i$ при сохранении остальных обозначений. Проведенный авторами анализ показал, что соответствующие (1.11) моменты $R_{i\{\alpha\}}^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) с наименьшими погрешностями получены в работе [9]: нужно только добавить множитель γ перед q_{bn}^* в формуле (6) [9]. В формулу (10) из [10] добавить слагаемые, пропорциональные WT_i , в F_{11} заменить $4m_{10}m_{20}$ на $1 - 4m_{10}m_{20}$.

В случае бинарной смеси имеем связь

$$T = x_1 T_1 + x_2 T_2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{3nk\rho} \Delta^2, \quad \Delta = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad x_i = \frac{n_i}{n} \quad (1.12)$$

2. Локально-максвелловские решения. Локально-максвелловская функция распределения молекул газа

$$f^M = n(2\pi RT)^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\xi - \mathbf{u})^2}{2RT}\right] \quad (2.1)$$

тождественно обращает в нуль интеграл столкновений, зависимости n , T , \mathbf{u} от \mathbf{r} , t определяются левой (конвективной) частью кинетического уравнения, эти газодинамические переменные удовлетворяют, естественно, уравнениям Эйлера. Сказанное имеет место и для смеси газов, если все максвеллианы f_i^M определяются по одинаковым T , \mathbf{u} . В изложенных далее результатах нужно только заменить n , $R = k/m$ на n_i , R_i .

Наиболее полный анализ для случая простого газа в отсутствие внешних сил дан в статье [11] (учет внешних сил осуществлен, например, в монографиях [4, 6]). Используем обозначения [11], заменив β на β_g ; имеем

$$T = -\frac{1}{2R\gamma_4}, \quad \gamma_4 = a_4 + \beta_g t + \alpha t^2, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{a} - \mathbf{k}t - (2\alpha t + \beta_g)\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2\gamma_4}, \quad \ln[n(2\pi RT)^{-3/2}] = \Phi, \quad \Phi = a_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha r^2 - \frac{\boldsymbol{\gamma}^2}{4\gamma_4}$$

Коэффициенты при степенях t и r_α – произвольные постоянные. Компонентами вектора $\boldsymbol{\Omega}$ являются три компонента асимметричного тензора $\Omega_{\alpha\beta}$.

Наиболее важные частные решения найдены, как известно, Максвеллом. Максвелловскую равновесную функцию распределения получаем тогда, когда отличны от нуля только постоянные a_0 , \mathbf{a} , $a_4 < 0$. Если же отличны от нуля только a_0 , $\boldsymbol{\Omega}$, $a_4 < 0$, то

$$T = -\frac{1}{2Ra_4} = \text{const}, \quad \mathbf{u} = -\frac{1}{2a_4}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.3)$$

$$n = (2\pi RT)^{3/2} \exp\left[a_0 - \frac{1}{4a_4}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2\right]$$

Решение (2.1), (2.3) описывает вращение газа как твердого тела. Температура однородна, плотность и давление растут экспоненциально с радиусом (отсчитываемым от оси вращения) и не зависят от t .

В общем случае температура $T = T(t)$, движение газа является суперпозицией однородного потока, сферического разлета–слета и вращения газа как твердого тела, плотность и давление – функции t , \mathbf{r} . Если $\alpha \neq 0$, но равны нулю \mathbf{a} , β_g , \mathbf{k} , $\boldsymbol{\Omega}$, то

$$T = -\frac{1}{2R(a_4 + \alpha t^2)}, \quad \mathbf{u} = \frac{\alpha t \mathbf{r}}{a_4 + \alpha t^2} \quad (2.4)$$

$$n = (2\pi RT)^{3/2} \exp\left[a_0 + \frac{\alpha a_4 r^2}{a_4 + \alpha t^2}\right]$$

В дальнейшем будем ставить начальные условия при $t = 0$ (\mathbf{a} не при $t = t_0$). Из условия $T > 0$ следует $a_4 < 0$. Если $\alpha > 0$, то решение существует на конечном отрезке значений t . При $\alpha a_4 > 0$ полная масса конечна [11]:

$$M = \int \rho d\mathbf{r} = \pi^3 m (\alpha a_4)^{-3/2} \exp a_0$$

Рассмотрим важный для дальнейшего частный случай: $\alpha \neq 0$, $\Omega = 0$, плотность (и давление) зависят только от t . Подставляя в соотношение для Φ выражения (2.2) для γ_4 и γ , приравнявая нулю коэффициенты при \mathbf{r} и r^2 , а затем при $t = 0$ и $t \neq 0$, находим

$$a_4 = \frac{\beta_g^2}{4\alpha}, \quad \mathbf{a} = -\frac{\beta_g}{2\alpha}\mathbf{k}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{4\alpha}(\beta_g + 2\alpha t)^2$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{k} + 2\alpha\mathbf{r}}{\beta_g + 2\alpha t}, \quad \Phi = a_0 - \frac{k^2}{4\alpha}, \quad T(0) = -\frac{2\alpha}{R\beta_g^2}$$

Конечность T требует $\beta_g \neq 0$. Обозначая

$$2\alpha\mathbf{r}' = \mathbf{k} + 2\alpha\mathbf{r}, \quad t^* = t/c, \quad c = \beta_g/(2\alpha)$$

и опуская штрих, окончательно находим

$$\rho = \frac{\rho(0)}{(1+t^*)^3}, \quad \mathbf{u} = \frac{c^{-1}\mathbf{r}}{1+t^*}, \quad T = \frac{T(0)}{(1+t^*)^2} \quad (2.5)$$

$$f^M = n(0)(2\pi RT(0))^{-3/2} \exp\left(-\frac{C^{*2}}{2RT(0)}\right), \quad C^* = (1+t^*)(\xi - \mathbf{u}) \quad (2.6)$$

Если $\beta_g < 0$, то $c > 0$, имеет место сферический разлет газа, при $\beta_g > 0$ – сферический слет ($c < 0$) для $t \in [0, 1/|c|)$. В первом случае $(\rho, \mathbf{u}, T, f) \rightarrow 0$ при $t^* \rightarrow \infty$, во втором $(\rho, \mathbf{u}, T) \rightarrow \infty$, а f стремится к постоянной при $t^* \rightarrow -1$ (фиксированы начальные значения, \mathbf{r}, ξ).

Рассмотрение течения (2.5), (2.6) будет продолжено в разд. 6.

Всюду $t^* = t/t_0$ – безразмерное время, но величина t_0 определяется различными выражениями.

3. Пространственно-однородная релаксация бинарной смеси (моментные решения). Пространственно-однородная релаксация описывается решением задачи Коши для системы кинетических уравнений

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = J_i, \quad f_i(0, \xi_i) = \omega_i(\xi_i) \quad (3.1)$$

в отсутствие внешних сил. Здесь ω_i – заданная функция скорости частицы ξ_i , $i = 1, 2$. Задача (3.1) почти всегда решается численно.

В этом случае уравнения переноса (1.3) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{i\{\alpha\}}^{(n)} = R_{i\{\alpha\}}^{(n)} \quad (3.2)$$

При $t = 0$ заданы начальные значения $M_{i\{\alpha\}}^{(n)}(0)$, удовлетворяющие требованию положительности функций распределения. Бесконечная цепочка уравнений моментов (3.2) в случае максвелловских молекул распадается на ряд последовательно решаемых замкнутых систем уравнений [6], так как при этом правые части $R_{i\{\alpha\}}^{(n)}$ выражаются через моменты $M^{(m)}$, $m \leq n$. Например, из системы (1.8) имеем $\partial p_{\alpha\beta}/\partial t = -p_{\alpha\beta}/\tau$, откуда $p_{\alpha\beta}(t) = p_{\alpha\beta}(0)\exp(-t/\tau)$, где время поступательной релаксации $\tau = \mu/\rho$ в данном случае постоянно. Интересные результаты были получены [10, 12–14] для релаксации бинарной смеси газов с резко различающимися массами молекул, когда параметр

$$\varepsilon = \sqrt{m_1/m_2} \quad (3.3)$$

много меньше единицы. Тогда при $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$, $T_1 \neq T_2$ процесс релаксации разделяется на качественно различные этапы (m_1, m_2 – массы частиц “легкого” и “тяжелого” ком-

понентов смеси). Своеобразие этого процесса описано во многих руководствах [15]. Однако существующий анализ процесса релаксации, как выяснилось, проведен при упрощающих предположениях. В результате упущены важные свойства процесса.

Рассмотрим бинарную смесь одноатомных газов, состоящих из максвелловских молекул, обозначая

$$\Delta = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad \Delta_T = T_1 - T_2 \quad (3.4)$$

Числовые плотности n_i и температура T постоянны в силу соотношений (1.4), (1.7). Используются определения (1.11). Для определения функций (3.4) имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial t} &= -A\rho\Delta, & \frac{\partial \Delta_T}{\partial t} &= -2An\mu_m\Delta_T - \frac{2}{3k}(\rho_2 - \rho_1)A\mu_m\Delta^2 \\ A &= \frac{2\pi A_1}{m_0} \left(\frac{\kappa_{12}}{\mu_m} \right)^{1/2}, & m_0 &= m_1 + m_2, & \mu_m &= \frac{m_1 m_2}{m_0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Предполагается, что межмолекулярные силы равны $\kappa_{ij}r^{-5}$, где $i, j = 1, 2$, r – расстояние между частицами.

Из первого уравнения (3.5) имеем

$$\Delta(t^*) = \Delta(0)\exp(-t^*), \quad t^* = \frac{t}{\tau_u}, \quad \tau_u = \frac{1}{A\rho} \quad (3.6)$$

Решение второго уравнения (3.5) запишем так:

$$\frac{\Delta_T(t^*)}{T} = \left[\frac{\Delta_T(0)}{T} - h\Delta^2(0) \right] \exp\left(-\frac{t^*}{\tau_T^*}\right) + h\Delta^2(0)\exp(-2t^*) \quad (3.7)$$

В решении (3.7) применены обозначения

$$\tau_T^* = \frac{\tau_T}{\tau_u} = \frac{\rho}{2n\mu_m} \approx \frac{x_2}{2\varepsilon^2}, \quad h = \frac{A\mu_m}{3kT}(\rho_2 - \rho_1)\tau_u \approx \frac{m_1}{3kT} \quad (3.8)$$

Величина τ_T^* равна отношению времен релаксации разностей температур и скоростей.

В правых частях формул (3.8) приводятся приближенные значения, получающиеся при $\varepsilon = \sqrt{m_1/m_2} \rightarrow 0$ и фиксированных остальных параметрах газов и начальных значениях (в частности, x_i). При этих условиях времена релаксации резко различаются: $\tau_T^* \gg 1$.

Ранее [13, 14] фактически величина $h\Delta^2(0)$ предполагалась пренебрежимо малой. Если, однако, $\Delta_T(0)/T \sim h\Delta^2(0) \sim 1$, то ею пренебрегать нельзя и при $t^* \sim \tau_T^*$, $\varepsilon \ll 1$, учитывая $\tau_T \gg \tau_u$, получаем

$$\Delta_T(t^*) \approx [\Delta_T(0) - Th\Delta^2(0)] \exp\left(-\frac{t^*}{\tau_T^*}\right) \quad (3.9)$$

Этот результат имеет большое значение при выводе уравнений двухжидкостной гидродинамики [16].

Обычно неявно предполагается, что релаксация носит чисто экспоненциальный характер. Однако при учете неоднородных частей уравнений переноса характер релаксации оказывается более сложным. Например, при определенных значениях параметров задачи одно из собственных чисел λ уравнений для напряжений равно ко-

эффиценту в экспоненте, входящей в неоднородную часть, и появляется слагаемое решения, пропорциональное $\text{texp}(-\lambda t)$.

Рассмотрим общую задачу о релаксации напряжений $p_{i\alpha\beta}$. Введем обозначения

$$\pi_i = \frac{P_{i\alpha\beta}}{p}, \quad U = 2h \left[\Delta_\alpha(0)\Delta_\beta(0) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\Delta^2(0) \right] \quad (3.10)$$

Тогда система уравнений для напряжений [9, 10] примет вид

$$\frac{d\pi_i}{dt^*} = \Gamma_{i1}\pi_1 + \Gamma_{i2}\pi_2 + \Gamma_{i3}U \exp(-2t^*)$$

$$\Gamma_{11} \equiv -\Gamma_{11}^* = -\gamma_1 \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{n^* + \varepsilon^2} - 2n^*\alpha(B + \varepsilon^2), \quad \alpha = \frac{1}{(n^* + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^2)} \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{12} = \alpha L \varepsilon^2, \quad \Gamma_{13} = \frac{3Ln^*}{2(1+n^*)(n^* - \varepsilon^2)}, \quad \Gamma_{21} = n^*\Gamma_{12}$$

$$\Gamma_{22} \equiv -\Gamma_{22}^* = -\gamma_2 n^* \varepsilon \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{n^* + \varepsilon^2} - 2\alpha \varepsilon^2 (1 + B\varepsilon^2), \quad \Gamma_{23} = \Gamma_{13} \varepsilon^2$$

Здесь

$$n^* = \frac{n_2}{n_1}, \quad B = \frac{3A_2}{4A_1}, \quad L = 2(1-B), \quad \gamma_i = B \left(\frac{2\kappa_{ii}}{\kappa_{12}} \right)^{1/2} \quad (3.12)$$

Согласно известным результатам [2], $A_1 = 0.422$, $A_2 = 0.436$. Собственные значения системы (3.11) таковы:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \{ \Gamma_{11}^* + \Gamma_{22}^* \pm [(\Gamma_{11}^* - \Gamma_{22}^*)^2 + 4\Gamma_{12}\Gamma_{21}]^{1/2} \} \quad (3.13)$$

Решение не будет чисто экспоненциальным, если, например, $\lambda_1 = 2$ (можно убедиться, что это равенство выполняется при различных значениях параметров задачи). При $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированных остальных параметрах задачи имеем

$$\lambda_1 \rightarrow \lambda_1^0 = 2B + \gamma_1/n^*, \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_2^0 = \varepsilon\gamma_2 \quad (3.14)$$

Верхним нулевым индексом обозначаются предельные значения. Равенство $\lambda_1^0 = 2$ имеет место при вполне реалистичном условии $\gamma_1 \approx 0.45n^*$. Параметр ε определен формулой (3.3).

Решение системы (3.11) запишем в виде

$$\pi_i = \left(\frac{C_{i1}^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_{i1}^{(2)} U \right) \exp(-\lambda_1 t^*) + \left(\frac{C_{i2}^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_{i2}^{(2)} U \right) \exp(-\lambda_2 t^*) + C_{i3} U \exp(-2t^*) \quad (3.15)$$

Пусть начальные значения $\pi_i(0) = \pi_i^0$. Введем обозначения

$$\alpha^{(1)} = \Gamma_{22}^* + \Gamma_{12} \varepsilon^2, \quad \alpha^{(2)} = \Gamma_{21} + \Gamma_{11}^* \varepsilon^2, \quad \alpha^{(3)} = \frac{\Gamma_{13}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (3.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (C_{13}; C_{23}) &= \frac{\Gamma_{13}}{(2-\lambda_1)(2-\lambda_2)}(\alpha^{(1)} - 2; \alpha^{(2)} - 2\varepsilon^2) \\ C_{11}^{(1)} &= \pi_1^{(0)}(\Gamma_{11}^* - \lambda_2) - \pi_2^0 \Gamma_{12}, \quad C_{12}^{(1)} = \pi_1^0(\lambda_1 - \Gamma_{11}^*) + \pi_2^0 \Gamma_{12} \\ C_{21}^{(1)} &= (\Gamma_{11}^* - \lambda_1) \left[\pi_1^0 \frac{\Gamma_{11}^* - \lambda_2}{\Gamma_{12}} - \pi_2^0 \right], \quad C_{22}^{(1)} = (\Gamma_{11}^* - \lambda_2) \left[\pi_1^0 \frac{\lambda_2 - \Gamma_{11}^*}{\Gamma_{12}} + \pi_2^0 \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Коэффициенты C_{i3} обращаются, естественно, в нуль при $\lambda_{1,2} = 2$. Коэффициенты $C^{(2)}$ запишем в двух формах, удобных для перехода к резонансным случаям,

$$\begin{aligned} C_{11}^{(2)} &= -\frac{\alpha^{(3)}}{2-\lambda_1}(\alpha^{(1)} - \lambda_1) = -C_{13} - \frac{\alpha^{(3)}}{2-\lambda_2}(\alpha^{(1)} - \lambda_2) \\ C_{12}^{(2)} &= -C_{13} + \frac{\alpha^{(3)}}{2-\lambda_1}(\alpha^{(1)} - \lambda_1) = \frac{\alpha^{(3)}}{2-\lambda_2}(\alpha^{(1)} - \lambda_2) \\ C_{21}^{(2)} &= -\frac{\alpha^{(3)}}{2-\lambda_1}(\alpha^{(2)} - \varepsilon^2 \lambda_1) = -C_{23} - \frac{\Gamma_{13}}{2-\lambda_2}(\alpha^{(2)} - 2\varepsilon^2) - \alpha^{(3)} \varepsilon^2 \\ C_{22}^{(2)} &= -C_{23} + \frac{\alpha^{(3)}}{2-\lambda_1}(\alpha^{(2)} - 2\varepsilon^2) + \alpha^{(3)} \varepsilon^2 = \frac{\alpha^{(3)}}{2-\lambda_2}(\alpha^{(2)} - \varepsilon^2 \lambda_2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Осуществим в (3.15)–(3.17) предельный переход (3.14) для случая $\lambda \neq 2$, используя первые равенства (3.18). При этом

$$\frac{C_{11}^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_2} \rightarrow \pi_1^0, \quad C_{11}^{(2)} \rightarrow \frac{3L}{2(1+n^*)(2-\lambda_1^0)}, \quad C_{12}^{(1)} \rightarrow O(\varepsilon^2), \quad \frac{C_{22}^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_2} \rightarrow \pi_2^0$$

и т.д. Оставляя слагаемые с коэффициентами порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} p_{1\alpha\beta} &= \left[p_{1\alpha\beta}(0) - \frac{E}{\lambda_1^0 - 2} \right] \exp(-\lambda_1^0 t^*) + \frac{E}{\lambda_1^0 - 2} \exp(-2t^*) \\ p_{2\alpha\beta} &= p_{2\alpha\beta}(0) \exp(-\gamma_2 \varepsilon t^*), \quad E = \frac{3LpU}{2(1+n^*)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Величины λ_1^0, λ_2^0 даются формулами (3.14).

Рассмотрим теперь случай $\lambda_1 = 2, \lambda_2 \neq 2$. Линеаризуем

$$\exp(-\lambda_1 t^*) \approx \exp(-2t^*) [1 + (2 - \lambda_1) t^*] \quad (3.20)$$

Подставляем это выражение в равенство (3.15) с учетом вторых равенств (3.18), затем устремляем $\lambda_1 \rightarrow 2$. Получим

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{2-\lambda_2} \{ [C_{11}^{(1)} - G] e^{-2t^*} + [C_{12}^{(1)} + G] e^{-\lambda_2 t^*} \} - \alpha^{(3)} (\alpha^{(1)} - 2) U t^* e^{-2t^*} \\ G &= \alpha^{(3)} (\alpha^{(1)} - \lambda_2) U \end{aligned} \quad (3.21)$$

и аналогичное выражение для π_2 .

В выражении (3.21) все коэффициенты рассчитываются при тех значениях n^* , γ_i , ϵ , при которых $\lambda_1 = 2$.

В предельном случае (3.14) находим

$$p_{1\alpha\beta} \approx p_{1\alpha\beta}(0) \exp(-2t^*) + Et^* \exp(-2t^*) \quad (3.22)$$

Такой же результат получаем из первого уравнения (3.19) при использовании процедуры (3.20). Выражение для $p_{2\alpha\beta}$ совпадает со вторым выражением (3.19).

Перейдем к анализу результатов для случая $\epsilon \rightarrow 0$ и фиксированных остальных параметрах задачи. Пусть величины $h\Delta^2(0)$ и $E/p_{1\alpha\beta}(0)$ пренебрежимо малы [13, 14]. Тогда из формул (3.7) и (3.19) получаем

$$\Delta_T \approx \Delta_T(0) \exp\left(-\frac{2\epsilon^2 t^*}{x_2}\right) \quad (3.23)$$

$$p_{1\alpha\beta} \approx p_{1\alpha\beta}(0) \exp(-\lambda_1^0 t^*), \quad p_{2\alpha\beta} \approx p_{2\alpha\beta}(0) \exp(-\epsilon\gamma_2 t^*)$$

Имеем известную картину качественно различных этапов релаксации [10, 12–15]. Напряжения легкого компонента $p_{1\alpha\beta}$ релаксируют вместе с разностью скоростей Δ на этапе $t^* \sim 1$, затем имеет место этап релаксации напряжений тяжелого компонента $p_{2\alpha\beta}$ ($t^* \sim 1/\epsilon$), после чего выравниваются температуры компонентов ($t^* \sim 1/\epsilon^2$). На последнем этапе $\pi_i \ll 1$, т.е. напряжения пренебрежимо малы. Аналогично ведут себя и тепловые потоки. Это дает основание предполагать, что функции распределения на третьем этапе близки к максвелловским с разными T_i и справедлива модель двухтемпературной газодинамики [16].

Релаксация напряжений $p_{1\alpha\beta}$ обусловлена столкновением легких частиц с легкими и тяжелыми, релаксация же $p_{2\alpha\beta}$ – только тяжелых с тяжелыми. Действительно, λ_1^0/τ_u зависит от $n^* = n_2/n_1$, κ_{11} , κ_{12} , в то время как λ_2^0/τ_u – только от κ_{12} .

Ситуация меняется, если $h\Delta^2(0) \approx \Delta_T(0)/T$, $E \approx p_{1\alpha\beta}(0)$. Тогда формулы (3.23) качественно меняются: вместо $\Delta_T(0)$ будет $\Delta_T(0) - h\Delta^2(0)T$, справедливы соотношения (3.19). Система “помнит” о первом этапе. В “резонансном” случае (3.22) релаксация не является чисто экспоненциальной, решение включает слагаемое $Et^* \exp(-2t^*)$.

Важно иметь в виду, что сказанное выше о функциях распределения относится к их “куполам”, т.е. к значениям f_i для тепловых скоростей молекул. Именно эти “купола” определяют величины низших моментов $M^{(n)}$ функций распределений, а именно эти моменты входят в уравнения газодинамики! “Хвосты” функций распределения релаксируют тем медленнее, чем больше ξ_i^2 (см. разд. 4).

В уравнениях для более высоких моментов число неоднородных слагаемых увеличивается и, следовательно, растет возможность неэкспоненциальной релаксации. Например, в уравнение для \mathbf{q}_i входят произведения вектора Δ на π_i , π_j , Δ^2 , Δ_T , T_i . Аналогичный анализ для $\epsilon \ll 1$ показывает, что новый эффект здесь обусловлен слагаемым $\Delta\Delta^2$. Вместо условия $\lambda_1^0 = 2$ (см. соотношение (3.14)) имеем условие $1 + (2/3)\gamma_1/n^* = 3$.

Выше, как обычно, при переходе $\epsilon \rightarrow 0$ предполагались фиксированными значения γ_i . Выразим κ_{ii} через коэффициент вязкости i -го газа [2]

$$\mu_i = \left(\frac{2m_i}{\kappa_{ii}}\right)^{1/2} \frac{kT}{3\pi A_2} \quad (3.24)$$

и используем простейшее комбинационное правило

$$\kappa_{12} = \sqrt{\kappa_{11}\kappa_{22}} \quad (3.25)$$

Тогда

$$\gamma_1 = \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{\mu_1}{2\mu_2} \right)^{1/2} \varepsilon^{-1/2} \quad (3.26)$$

Для инертных газов μ_2/μ_1 слабо зависит от отношения масс, величины γ_i зависят от $\varepsilon^{1/2}$ [17]. Выше предполагалось, что $\varepsilon^{1/2}$ порядка единицы. Если же $\varepsilon^{1/2} \ll 1$, то $p_{2\alpha\beta}$ убывают быстрее: этапом релаксации напряжений тяжелого компонента будет $t^* \sim \varepsilon^{-1/2}$ вместо $t^* \sim \varepsilon^{-1}$. При этом $\lambda_1^0 = 2B \neq 2$.

С помощью приведенных соотношений могут быть рассмотрены и другие асимптотики по параметрам задачи (например, $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном ρ_1/ρ_2).

4. Пространственно-однородная релаксация бинарной смеси (функции распределения). Представленные в разд. 3 результаты для низших моментов получены для произвольных начальных условий и параметров смеси (при требовании положительности f_i). Явные решения для функции распределения получаются, естественно, при больших ограничениях [18–21]. Тем не менее они демонстрируют важнейшую особенность процесса поступательной релаксации: резкое замедление процесса релаксации с ростом w_i^2 (т.е. на “хвостах” f_i). Обычно используемые определения времени релаксации относятся к “куполу” f_i (для $w_i^2 \approx 1$) [15].

Решения для простого газа [18, 19] обобщены на бинарные [20] и многокомпонентные [21] смеси газов. Для упрощения рассеяние максвелловских молекул при их столкновениях предполагалось изотропным (при этом $A_2/A_1 = 2/3$ вместо 1.03). Сделан вывод [21], что были ошибочно получены две связи параметров смеси вместо одной [20]. Цель данного раздела – точное решение для бинарной смеси одноатомных газов без предположения об изотропности, проверка вывода [21], более полный анализ решения.

Ищем решение в виде [20, 21]

$$f_i = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k T \theta(t)} \right)^{3/2} \exp(-w_i^2) [1 + \alpha_i(t) S_{1/2}^{(1)}(w_i^2)] \quad (4.1)$$

$$\alpha_i = \frac{\theta - 1}{\theta} \beta_i, \quad w_i^2 = \frac{m_i \xi_i^2}{2k T \theta(t)}, \quad S_{1/2}^{(1)}(w_i^2) = \frac{3}{2} - w_i^2$$

Здесь β_i не зависят от t . Также постоянны плотности n_i и температура смеси T (в силу уравнений сохранения).

Необходимо найти θ , β_i и связи параметров, которые будем называть условиями совместности.

По определению, температуры компонентов смеси

$$T_i = \left(\frac{3}{2} n_i k \right)^{-1} \int \frac{m_i \xi_i^2}{2} f_i d\xi_i = T \theta (1 - \alpha_i), \quad T = \sum x_i T_i = \text{const}$$

(последнее следует из соотношения (1.12) при $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$), поэтому

$$x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 = 1, \quad T_i/T = \theta - (\theta - 1) \beta_i \quad (4.2)$$

Из последней формулы следует, что релаксация будет двухтемпературной ($T_1 \neq T_2$), если $\beta_1 \neq \beta_2$.

Подставим выражения (4.1) в систему уравнений Больцмана–Максвелла. После стандартных преобразований для случая максвелловских молекул [2] получим

$$S_{1/2}^{(1)} \frac{\beta_i - 1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - 2S_{1/2}^{(2)} \frac{\alpha_i}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = 4\pi S_{1/2}^{(1)} \phi_{12}^{(1)} n M_1 M_2 (1 - \beta_i) \frac{\theta - 1}{\theta} +$$

$$+ 2S_{1/2}^{(2)} \alpha_i n \pi \left\{ \phi_{ii}^{(2)} \frac{x_i \alpha_i}{2} + x_j \alpha_j 4M_1 M_2 [\phi_{12}^{(2)} 2M_1 M_2 + \phi_{12}^{(1)} (M_1 - M_2)^2] \right\} \quad (4.3)$$

$$\phi_{ii}^{(2)} = \left(\frac{2\kappa_{ii}}{m_i} \right)^{1/2} A_2 = \frac{2kT}{3\pi\mu_i}, \quad [\phi_{12}^{(1)}, \phi_{12}^{(2)}] = \left(\frac{m_0 \kappa_{12}}{m_1 m_2} \right)^{1/2} [A_1, A_2] \quad (4.4)$$

$$i = 1, 2, \quad j \neq i = 1, 2, \quad M_i = m_i/m_0, \quad m_0 = m_1 + m_2$$

Правая часть равенства (4.3) обусловлена интегралами столкновений. В ее первом члене использовано равенство

$$x_j(\beta_j - \beta_i) = 1 - \beta_i$$

следующее из первой формулы (4.2) и $x_1 + x_2 = 1$. В первой формуле (4.4) использована формула (3.24), $S_{1/2}^{(n)} = S_{1/2}^{(n)}(w_i^2)$ – полиномы Сонина, $n = 1, 2$. Введем

$$t^* = \frac{\pi n}{2} \phi_{22}^{(2)} t = \frac{1}{3} \frac{p}{\mu_2} t \quad (4.5)$$

(отношение μ_2/p пропорционально времени релаксации тяжелого простого газа, равного μ_2/p_2). Обозначим

$$\Lambda = B(1 + \delta), \quad B = 8M_1 M_2 \frac{A_1}{A_2} G, \quad \delta = 2M_1 M_2 \left(\frac{A_2}{A_1} - 2 \right) \quad (4.6)$$

$$G = \left(\frac{\kappa_{12}}{2M_1 \kappa_{22}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\mu^*}{2} \right)^{1/2} (M_1 M_2)^{-1/4}, \quad \mu^* = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

В выражении для G применены простейшее комбинационное правило (3.25) и формула (3.24).

Приравняем нулю выражение при $S_{1/2}^{(2)}$ в (4.3), предполагая конечными θ и β_i , причем $\theta \neq 1$, $x_i \neq 0$, $M_i \neq 0$. С учетом соотношений (4.4)–(4.6) найдем

$$\frac{1}{1 - \theta} \frac{d\theta}{dt^*} = x_i \beta_i \frac{\mu_2}{\mu_i} + x_j \beta_j \Lambda \quad (4.7)$$

Вычитая и складывая уравнения (4.7) при $i = 1$ и $i = 2$, получим

$$x_1 \beta_1 (\mu^* - \Lambda) = x_2 \beta_2 (1 - \Lambda) \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{1 - \theta} \frac{d\theta}{dt^*} = \lambda^*, \quad \lambda^* = \frac{1}{2} [x_1 \beta_1 (\mu^* + \Lambda) + x_2 \beta_2 (1 + \Lambda)] \quad (4.9)$$

откуда

$$\theta = 1 + (\theta_0 - 1) \exp(-\lambda^* t^*), \quad \theta_0 = \theta(t = 0) > 0 \quad (4.10)$$

Из первой формулы (4.2) следует, что $\beta_1 = 1$, если $\beta_2 = 1$, и наоборот. В случае $\beta_i = 1$ коэффициенты при $S_{1/2}^{(2)}$ в (4.3) равны нулю, из равенства (4.8) получаем условие совместности, аналогичное полученному ранее [20, 21] и допускающее случай $M_1 \ll 1$, когда $x_1 \mu^* \approx x_2$.

Перейдем к случаю $\beta_i \neq 1$. После сокращения на $1 - \beta_i$ коэффициенты при $S_{1/2}^{(1)}$ в (4.3) сводятся к одному уравнению

$$\frac{1}{1 - \theta} \frac{d\theta}{dt^*} = B \quad (4.11)$$

В силу равенств (4.9), (4.11)

$$\lambda^* = 2B \quad (4.12)$$

Для определения $x_1\beta_1$, $x_2\beta_2$ имеем три уравнения (4.2), (4.8), (4.12) (с учетом определения λ^* (4.9)). Исключая, например, $x_2\beta_2$ с помощью первой формулы (4.2), из уравнений (4.8), (4.12) соответственно найдем

$$x_1\beta_1 = \frac{\Lambda - 1}{\chi} = \frac{2B - \Lambda - 1}{\mu^* - 1}, \quad \chi = 2\Lambda - 1 - \mu^* \quad (4.13)$$

Из последнего равенства находим $\Lambda^2 - \mu^* = B\chi$, откуда с учетом обозначений (4.6) имеем квадратное уравнение для B

$$(1 - \delta^2)B^2 - (1 + \mu^*)B + \mu^* = 0 \quad (4.14)$$

Таким образом, имеем следующие условия совместности при $\beta_i \neq 1$:

$$B = \left\{ \begin{matrix} B_+ \\ B_- \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{\sigma} \left[1 \pm \left(1 - \frac{\mu^* \sigma^2}{1 - \delta^2} \right)^{1/2} \right], \quad \sigma = 2 \frac{1 - \delta^2}{1 + \mu^*} \quad (4.15)$$

$$\chi \neq 1, \quad \mu^* \neq 1 \quad (4.16)$$

Они связывают параметры κ_{ii} , κ_{12} , M_i и не зависят от x_i . Из положительности f_i следуют также требования

$$1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{\theta_0} \right) \beta_i > 0 \quad \left(1 - \frac{1}{\theta_0} \right) \beta_i < 0 \quad (4.17)$$

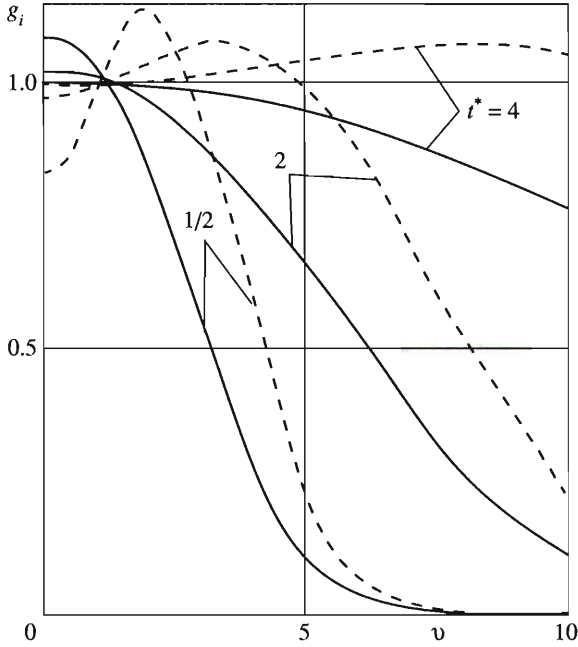
Величина θ_0 определена вторым соотношением (4.10).

Из неравенств (4.17) следует, что β_i должны иметь одинаковые знаки.

С учетом этого требования проанализируем условие (4.15). Оно заведомо противоречиво при $M_1 \ll 1$: например, при соизмеримых κ_{12} и κ_{22} и $\mu^* > 1$ из второго выражения (4.6) имеем $B \ll 1$, а правая часть выражения для B (4.15) больше или порядка единицы. Сначала будем считать справедливым комбинационное правило (3.25). Подставляя соответствующую формулу (4.6) для B в условие (4.15), получаем уравнения, связывающие M_1 и μ^* ,

$$8[M_1(1 - M_1)]^{3/4} \frac{A_1(\mu^*)}{A_2} \left(\frac{\mu^*}{2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sigma} \left[1 \pm \left(1 - \frac{\mu^* \sigma^2}{1 - \delta^2} \right)^{1/2} \right]$$

Их численные решения показывают, что β_i имеют одинаковые знаки для $B = B_-$. Такой же вывод получается, если не использовать правило (3.25): задавая значения μ^* и M_1 на отрезках $[0.25, 4]$, $[0.1, 0.5]$ соответственно, находим κ_{12}/κ_{22} и т.д. Например, для смеси He-Ne при $T = 300$ К имеем $M_1 = 0.165$, $\mu^* = 1.593$, $B_+ = 1.879$, $B_- = 0.913$. При $B = B_+$ коэффициенты β_i обладают разными знаками. При $B = B_-$ получаем $(\kappa_{12}/\kappa_{22})^{1/2} = 0.491$, $x_1\beta_1 = 0.264$, $\chi = -1.254$, $0.688 < \theta_0 < 1$ (последнее для $x_i = 1/2$); эти данные использованы на фиг.1 при $x_i = 1/2$, $\theta_0 = 0.8$.



Фиг. 1

Обозначим (см. (4.1), (4.5))

$$g_i = \frac{f_i}{f_i(t = \infty)} = \theta^{-3/2} \left[1 - \beta_i \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(\frac{3}{2} - \frac{v^2}{\theta} \right) \right] \exp \left[v^2 \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) \right], \quad v^2 = \frac{m_i \xi_i^2}{2kT}$$

где $f_i(t = \infty)$ – максвелловская функция. При $t \rightarrow \infty$ функции g_i стремятся к единице тем медленнее, чем больше v^2 .

Это иллюстрирует фиг. 1, где сплошными кривыми даны значения g_1 при $\beta_1 = 0.528$, штриховыми – g_2 при $\beta_2 = 1.472$ для $t^* = 1/2, 2, 4$ (величина t^* определена формулой (4.5)). При $t^* = 8$ и $v < 10$ значения g_i близки к единице.

При $\beta_i = 1$ зависимости g_i от $\lambda^* t^*$ такие же, как и для однокомпонентного газа [15, 19] (при одинаковом значении θ_0).

5. Гомоэнергетические аффинные течения. Бесконечная система уравнений моментов (1.3) в случае максвелловских молекул распадается на рекуррентные замкнутые системы линейных неоднородных уравнений с переменными коэффициентами, если $M_{i\{\alpha\}}^{(n)}$ зависят только от t , и следовательно,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sum \rho_i \mathbf{F}_i \tag{5.1}$$

Коэффициенты уравнения (1.1) должны быть функцией t , так что для данного класса течений

$$u_\alpha = \Psi_{\alpha\beta}(t)r_\beta + \Phi_\alpha(t), \quad M_{i\{\alpha\}}^{(n)} = M_{i\{\alpha\}}^{(n)}(t), \quad n \geq 0 \tag{5.2}$$

(напомним, что $M_{i\{\alpha\}}^{(1)} = 0$). Уравнение (1.1) приводится к виду

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} - \frac{\partial f_i}{\partial C_{i\beta}} C_{i\gamma} \Psi_{\beta\gamma} + \frac{\partial f_i}{\partial C_{i\beta}} \left[F_{i\beta} - \frac{1}{\rho} (\rho_1 F_{1\beta} + \rho_2 F_{2\beta} + \dots + \rho_N F_{N\beta}) \right] = J_i \quad (5.3)$$

$$f_i = f_i(C_i, t), \quad f_i(C_i, 0) = g_i(C_i) > 0$$

g_i – заданные функции C_i . Если отнесенные к m_i парциальные внешние силы \mathbf{F}_i одинаковы и равны \mathbf{F} , то коэффициент при третьем слагаемом левой части равен нулю (последнее слагаемое в (1.7) обращается в нуль вследствие равенства $\sum \rho_i \mathbf{V}_i = 0$). Величина \mathbf{F} представляется линейной функцией координат, необходимые связи между коэффициентами находятся из уравнения (5.1) с учетом первой формулы (5.2).

Более интересен случай, когда \mathbf{F}_i различны. Тогда $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(t)$. Функции $\varphi_\alpha(t)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} + \Psi_{\alpha\beta} \varphi_\beta = \sum \frac{\rho_i(t)}{\rho(t)} F_{i\alpha}(t)$$

а коэффициенты $\Psi_{\alpha\beta}(t)$ даются формулами [22]

$$\Psi_{\alpha\beta} = \{ |a_{\gamma\delta}| t^2 \delta_{\alpha\beta} + (a_{\gamma\gamma} a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma}) t + a_{\alpha\beta} \} H^{-1}, \quad a_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}(0) \quad (5.4)$$

$$H \equiv |\delta_{\gamma\delta} + a_{\gamma\delta} t| = |a_{\gamma\delta}| t^3 + 1/2 (a_{\gamma\gamma} a_{\delta\delta} - a_{\gamma\delta} a_{\delta\gamma}) t^2 + a_{\gamma\gamma} t + 1$$

Здесь $|a_{\gamma\delta}|$ – определитель из элементов $a_{\gamma\delta}$, a $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, применяется правило суммирования по повторяющимся индексам $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3$. Формулы (5.4) находятся из системы уравнений $D(\Psi_{\alpha\beta} r_\beta) / Dt = 0$.

Из уравнения неразрывности получаем

$$\rho = \rho(0) H^{-1} \quad (5.5)$$

Если $\varphi = 0$, то $\sum \rho_i \mathbf{F}_i = 0$. В этом случае, пренебрегая операторами столкновений J_i , находим [23] “свободномолекулярное” решение задачи (5.3)

$$f_i = g_i(E_{ix}, E_{iy}, E_{iz}) \quad (5.6)$$

$$E_{i\alpha} = (\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} t) C_{i\beta} - \int_0^t (\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} t) F_{i\beta} dt$$

Перейдем к обзору моментных решений. Первостепенный интерес представляют решения, позволяющие рассмотреть вопросы применимости приближений Навье–Стокса, Барнетта и т.д. Основная часть работ посвящена напряжениям в простом газе. В случае бинарной смеси газов получены [22] решения уравнений для диффузионных скоростей, обусловленных различием \mathbf{F}_i .

В дальнейшем ограничиваемся простым газом из максвелловских молекул в отсутствие внешних сил, полагая $\varphi = 0$.

Уравнение энергии запишем в виде

$$\frac{dp}{dt} + \frac{5}{3} \Psi_{\alpha\alpha} p + \frac{2}{3} \Psi_{\alpha\beta} p_{\beta\alpha} = 0 \quad (5.7)$$

Для напряжений $p_{\alpha\beta}$ и моментов третьего порядка $Q_{\alpha\beta\gamma}$ получим

$$\frac{dp_{\alpha\beta}}{dt} + p_{\alpha\beta} \Psi_{\gamma\gamma} + 2 \langle p_{\alpha\gamma} \Psi_{\beta\gamma} \rangle + 2p \langle \Psi_{\alpha\beta} \rangle + \frac{1}{Ht} p_{\alpha\beta} = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{dQ_{\alpha\beta\gamma}}{dt} + \Psi_{\gamma\delta}Q_{\alpha\beta\delta} + \Psi_{\beta\delta}Q_{\alpha\delta\gamma} + \Psi_{\alpha\delta}Q_{\delta\beta\gamma} + \Psi_{\delta\delta}Q_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{3H\tau} \left(\frac{9}{2}Q_{\alpha\beta\gamma} - q_{\alpha}\delta_{\beta\gamma} - q_{\beta}\delta_{\alpha\gamma} - q_{\gamma}\delta_{\alpha\beta} \right) = 0 \tag{5.9}$$

$$\tau = \frac{\mu_0}{Rp(0)} = \frac{\mu(0)}{p(0)}, \quad R = \frac{k}{m}$$

Здесь использованы соотношения (1.8)–(1.10), R – газовая постоянная.

При $t = 0$ заданы начальные значения $p(0)$, $p_{\alpha\beta}(0)$, $Q_{\alpha\beta\gamma}(0)$. Величина τ – время попутательной релаксации, вычисленное по начальным значениям.

Система (5.7), (5.8) замыкает задачу определения газодинамических переменных, т.е. p при заданных ρ , u . Полезно определить

$$\Pi_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}/p, \quad \Pi_{\alpha\alpha} = 0 \tag{5.10}$$

Из уравнения (5.7) следует

$$p = p(0)H^{-5/3}\Pi, \quad \Pi = \exp\left(-\frac{2}{3}\int_0^t \Psi_{\alpha\beta}\Pi_{\beta\alpha}dt\right) \tag{5.11}$$

Полагая $\Pi = 1$, получим p в приближении Эйлера. Для $\Pi_{\alpha\beta}$ найдем замкнутую, но более сложную систему уравнений

$$\frac{d\Pi_{\alpha\beta}}{dt} - \frac{2}{3}\Pi_{\alpha\beta}(\Psi_{\gamma\delta}\Pi_{\delta\gamma} + \Psi_{\gamma\gamma}) + 2\langle\Pi_{\alpha\gamma}\Psi_{\gamma\beta}\rangle + 2\langle\Psi_{\alpha\beta}\rangle + \frac{\Pi_{\alpha\beta}}{H\tau} = 0 \tag{5.12}$$

Начало данному направлению было положено исследованиями сдвигового течения [24, 25]. После этого изучались решения с нестационарной скоростью [26–32, 22, 23]. Многие результаты суммированы и дополнены в книге [1] (см. также [32]). Были доказаны [4] (с учетом условия $\mathbf{F} = \text{const}$) теоремы существования и единственности решения данной начальной задачи для уравнения Больцмана–Максвелла.

Уравнения (5.7)–(5.12) решаются, вообще говоря, численно. В цитированных статьях удалось найти частные решения систем этих уравнений в элементарных функциях, когда они приводятся к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Особый интерес вызвали так называемые доминантные [24] точные решения (ДР), т.е. решения при таких начальных условиях, когда начальный пограничный (кинетический) слой исчезает. Для таких решений наглядны сравнения отдельных приближений метода Чепмена – Энскога (ЧЭ) и Гильберта друг с другом и с точным решением.

Начальный пограничный слой обусловлен тем, что уравнения (5.12) при числе Кнудсена $\text{Kn} = \tau/t_0 \ll 1$ являются уравнениями с малым параметром при производной, где t_0 – характерное время. Для указанных частных решений ряд ЧЭ является степенным рядом с постоянными коэффициентами, поэтому ДР определяются требованием $\Pi_{\alpha\beta} = \text{const}$. Из системы (5.12) получаем алгебраические уравнения, определяющие $\Pi_{\alpha\beta}$ при любых t и Kn . Доказано [1], что, разлагая по $\text{Kn} \ll 1$, находим ряд ЧЭ для $\Pi_{\alpha\beta}$, сходящийся при достаточно малом Kn . Подставляя этот ряд в выражение (5.11), находим решение газодинамической задачи при помощи уравнений метода ЧЭ. Разлагая функцию Π по Kn при фиксированном t , находим решение методом Гильберта.

Интересно найти и исследовать ДР для частного случая, когда ряд ЧЭ для $\Pi_{\alpha\beta}$ зависит от t и является асимптотическим. Таков случай плоского разлета–слета [22], когда отличны от нуля только $a_{11} = a_{22}$, т.е.

$$u_1 = \frac{x_1}{t+c}, \quad u_2 = \frac{x_2}{t+c}, \quad u_3 = 0, \quad H = (1+t^*)^2, \quad \rho = \frac{\rho(0)}{(1+t^*)^2} \quad (5.13)$$

$$c = \frac{1}{a_{11}}, \quad t^* = \frac{t}{c} = a_{11}t, \quad t \in [0, t_f], \quad t_f = \begin{cases} \infty, & a_{11} > 0 \\ 1/|a_{11}|, & a_{11} < 0 \end{cases}$$

Из соотношений (5.11) имеем

$$p = p(0)(1+t^*)^{-10/3} \Pi, \quad \Pi = \exp\left(\frac{2}{3} \int_0^{t^*} \frac{\Pi_{33}}{1+t^*} dt^*\right) \quad (5.14)$$

Для решения газодинамической задачи достаточно определить величину Π_{33} , для которой из уравнений (5.12) следует

$$\frac{d\Pi_{33}}{dt} + \frac{2}{3(1+t^*)}(\Pi_{33}^2 - \Pi_{33} - 2) + \frac{\Pi_{33}}{\beta(1+t^*)^2} = 0 \quad (5.15)$$

$$\beta = \text{Knsign} a_{11}, \quad \text{Kn} = |a_{11}| \tau, \quad \tau = \mu_0 / (R\rho(0))$$

В качестве характерного времени выбрана величина c . Напомним, что в данном случае коэффициент вязкости $\mu = \mu_0 T$, $\mu_0 = \text{const}$.

Гидродинамический предел получаем при $\text{Kn} \rightarrow 0$ и фиксированных t^* , $p(0)$, $\Pi_{\alpha\beta}(0)$. При фиксированных t , a_{11} этот предел достигается путем уменьшения τ , т.е. кинематической вязкости $\mu_0/\rho(0)$.

Вводя переменные

$$\zeta = (1+t^*)\beta, \quad u(\zeta) = \exp\left(\frac{2}{3} \int \Pi_{33} \frac{d\zeta}{\zeta}\right)$$

а затем

$$z = 1/\zeta, \quad u = z^{2/3} y(z)$$

приводим уравнение (5.15) к стандартному виду

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + (3-z) \frac{dy}{dz} - \frac{2}{3} y = 0 \quad (5.16)$$

Общее решение уравнения (5.16)

$$y = C_1 \Phi(2/3, 3; z) + C_2 \Psi(2/3, 3; z)$$

где Φ , Ψ – вырожденные гипергеометрические функции от второго целого аргумента [33] (в принятых ранее обозначениях [34] это функции M , U соответственно). Следовательно,

$$\Pi_{33} = -1 - \frac{3}{2} z \frac{C\Phi' + \Psi'}{C\Phi + \Psi}, \quad \Phi' = \frac{d\Phi(2/3, 3; z)}{dz} \quad (5.17)$$

произвольная постоянная C определяется из условия $\Pi_{33}(z=1/\beta) = \Pi_{33}(0)$.

Найдем ДР сначала для разлета ($a_{11} > 0$). При $\beta \rightarrow 0$ функция Π_{33} должна стремиться к навье-стоксовскому значению $4/(3z)$. Для данного решения при $\beta \rightarrow 0$ имеем $z \rightarrow \infty$. В окрестности бесконечно удаленной точки Φ и Ψ разлагаются в асимптотические ряды [33]

$$\Phi = e^z z^{-7/3} [1 + O(1/z)], \quad \Psi = z^{-2/3} [1 + O(1/z)]$$

Далее, фактически следуя принципу минимальной особенности, полагаем $C = 0$, тогда

$$\Pi_{33}^d = -1 - \frac{3}{2} z \frac{d}{dz} \ln \Psi \left(\frac{2}{3}, 3; z \right), \quad z^{-1} = \text{Kn}(1 + t^*) \tag{5.18}$$

Верхним индексом d обозначаем ДР. Разложение величины (5.18) по большим z (малым β) таково:

$$\Pi_{33}^d = \frac{4}{3} z^{-1} - \frac{4}{9} z^{-2} - \frac{16}{27} z^{-3} + \frac{176}{81} z^{-4} + \dots, \quad z^{-1} = \beta(1 + t^*) \tag{5.19}$$

Ряд (5.19) асимптотический, отношение $(n + 1)$ -го члена к n -му порядка $n z^{-1}$. Аналогичный анализ для случая слета ($\beta < 0$) показывает, что здесь

$$\Pi_{33}^d = -1 - \frac{3}{2} z \frac{d}{dz} \ln \Phi \left(\frac{2}{3}, 3; z \right), \quad z^{-1} = -\text{Kn}(1 + t^*) \tag{5.20}$$

Разложение (5.20) по большим z дается, естественно, формулой (5.19) при $\beta = -\text{Kn}$.

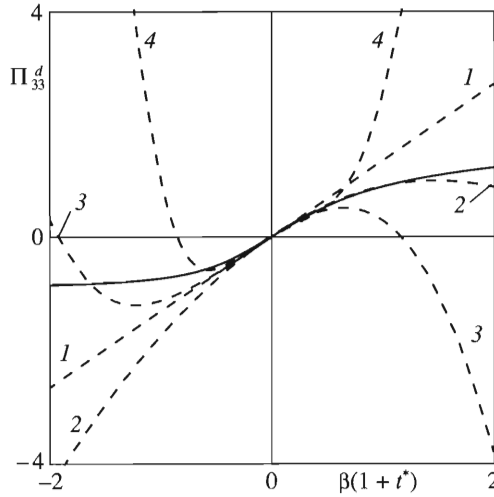
Правая часть фиг. 2 соответствует разлету ($\beta > 0$), левая – слету ($\beta < 0$). Сплошной кривой даны точные значения Π_{33}^d (5.18), (5.20). Полученные с помощью ряда (5.19) приближенные значения Π_{33}^d представлены штриховыми кривыми. Первый член разложения (5.19) дается приближением Навье–Стокса (линия 1 на фиг.2), первые два – приближением Барнетта (2), три – супербарнеттовым приближением (3), учтенным в (5.19) членам соответствует кривая 4.

В случае разлета наилучшее согласие с точным решением обеспечивает приближение Барнетта, однако для слета приближение Барнетта хуже согласуется с точным решением, чем приближение Навье–Стокса.

Впервые аналогичный пример высокой точности приближения Барнетта был указан в [27] (точное решение для одномерного разлета), для других решений – в [31, 32]. Эволюция взглядов на значимость уравнений Барнетта, примеры барнеттовых эффектов описаны в обзоре [35] (см. также [36]).

Теперь можно найти давление, т.е. функцию Π . Подставляя разложение (5.19) в выражение (5.14), найдем решение по ЧЭ

$$\begin{aligned} \Pi = \exp \left\{ \frac{8}{9} \beta t^* - \frac{4}{27} \beta^2 t^{*2} (2 + t^*) - \frac{32}{81} \beta^3 t^{*3} \left(1 + t^* + \frac{1}{3} t^{*2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{176}{243} \beta^4 t^{*4} (2 + t^*) \left(1 + t^* + \frac{1}{2} t^{*2} \right) + \dots \right\} \end{aligned} \tag{5.21}$$



Фиг. 2

Важно подчеркнуть, что ряд ЧЭ для $p_{33} = p\Pi_{33}$ не является степенным рядом по Kn . Это общее свойство метода ЧЭ в отличие от метода Гильберта [4]. Решение методом Гильберта получаем, разлагая правую часть соотношения (5.21) в ряд

$$\begin{aligned} \Pi = & 1 + \frac{8}{9}\beta t^* + \frac{4}{81}\beta^2 t^{*2}(5t^* - 6) - \\ & - \frac{32}{2187}\beta^3 t^{*3}[27 + 5t^*(9 + 2t^*)] + \frac{16}{19683}\beta^4 t^{*4}[1782 + \dots] \end{aligned} \quad (5.22)$$

Подставляя выражение (5.18) или (5.20) в соотношение (5.14), находим ДР для давления p . Например, для слета

$$\Pi^d = (1+t^*)^{-2/3} z\Phi\left(\frac{2}{3}, 3; -\frac{1}{|\beta|(1+t^*)}\right)\Phi^{-1}\left(\frac{2}{3}, 3; -\frac{1}{|\beta|}\right) \quad (5.23)$$

Разлагая выражение (5.23) по $\text{Kn} \ll 1$, приходим к соотношению (5.22).

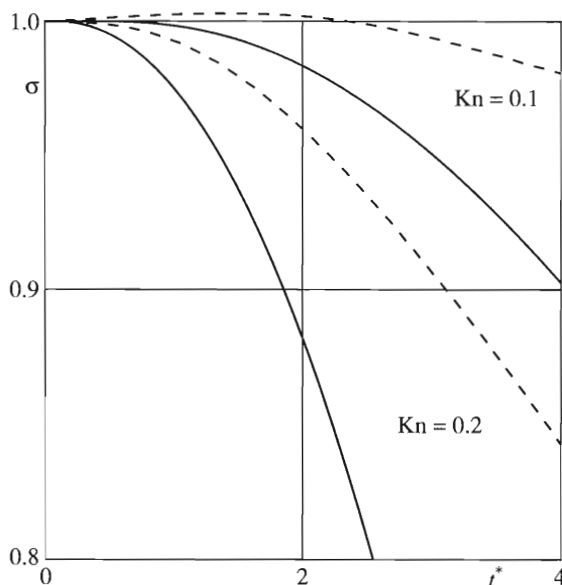
Отнесем значения Π , даваемые уравнениями Навье–Стокса и соответствующим приближением метода Гильберта, к величине Π^d . В случае слета соответственно получим

$$\sigma_1 = \frac{1}{\Pi^d} \exp\left(-\frac{8}{9}\text{Kn}t^*\right), \quad \sigma_2 = \frac{1}{\Pi^d} \left(1 - \frac{8}{9}\text{Kn}t^*\right), \quad t^* = \frac{t}{c}$$

функция Π^d дается формулой (5.23). Значения отношений σ_1 и σ_2 представлены соответственно штриховыми и сплошными кривыми на фиг. 3.

Уравнения Навье–Стокса имеют значительно большую точность, так как σ_1 существенно ближе к единице, чем σ_2 .

На примере сдвигового течения показано [32], что решения в первом (навье-стоксовском) и третьем приближениях ЧЭ гораздо лучше согласуются с точным, чем решения в соответствующих приближениях Гильберта. Некоторыми авторами [4] предлагалось модифицировать метод Гильберта таким образом, чтобы в нулевом приближении получать уравнения Навье–Стокса (а не Эйлера), а далее – последова-



Фиг. 3

тельность неоднородных линеаризованных уравнений Навье–Стокса. Такая модификация действительно приводит к уточнению метода Гильберта [32].

В общем случае постоянная C отлична от нуля и определяется начальным значением $\Pi_{33}(0)$, от которого зависит, вообще говоря, сравнительная точность различных приближенных методик. Отличие C от нуля при малых Kn – мера влияния начального кинетического (кнудсеновского) слоя. Разложение C в ряд при $\beta \rightarrow 0$ находится методом сращиваемых асимптотических разложений, причем ряд Гильберта является внешним разложением. Было дано сравнение результатов методов ЧЭ и Гильберта на примере недоминантного точного решения для одномерного разлета [30].

Большое внимание уделялось [1, 24] построению итерационных схем, отличных от той, которая дает разложение ЧЭ. Получающаяся при этом перегруппировка ряда ЧЭ может оказаться эффективной: несколько членов “перегруппированного” ряда лучше аппроксимируют точное решение для сдвигового течения, чем соответствующий отрезок ряда ЧЭ [1]. Однако этот результат носит частный характер [30].

В цитированных работах основное внимание уделялось газодинамическому пределу $\beta \rightarrow 0$, однако рассматривались и другие асимптотики [1, 22–24]: разложения решений около свободномолекулярного, по малым $a_{\text{вб}}$ (влияние малых градиентов скорости на процесс поступательной релаксации) и т.д. Интересные результаты получены [28, 29, 31] при анализе асимптотического поведения некоторых точных и приближенных решений при $t \rightarrow \infty$. Рассмотренные в этих работах точные решения асимптотически устойчивы ($p \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$), однако их навье-стоксовы приближения асимптотически неустойчивы ($p \rightarrow \infty$). Барнеттовы приближения исправляют навье-стоксовы, давая качественно правильный результат ($p \rightarrow 0$) [31]. Это еще один пример эффективности уравнений Барнетта.

Большая серия работ по сдвиговому течению

$$u_1 = a_{12}x_2, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \rho = \text{const}, \quad a_{12} > 0$$

выполнена авторами статей [37–39] и их коллегами. Однако вместе или по отдельности применялись дополнительные допущения: использовались приближенные модели

оператора столкновений, считалось, что внешняя сила пропорциональна собственной скорости молекул (такая сила была введена для того, чтобы температура сдвигового течения была конечной при $t \rightarrow \infty$). Как отмечалось в вводной части статьи, такого рода работы здесь не рассматриваются из-за ограничений объема.

Значительный интерес [1, 37–39] вызвала своеобразная “неустойчивость” моментов третьего порядка в сдвиговом течении [24]: при числах $Kn = a_{12}\tau > 3/\sqrt{2}$ и $t/\tau \rightarrow \infty$ тепловой поток q_3 стремится к бесконечности, а при $Kn < 3/\sqrt{2}$ – к нулю. Однако аналогичные особенности поведения негидродинамических моментов присущи и другим течениям данного класса.

Рассмотрим одномерный разлет–слет

$$u_1 = \frac{x_1}{t+c}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \rho = \frac{\rho(0)}{1+t^*} \quad (5.24)$$

Величины c , t^* , β определены в соотношениях (5.13), (5.15).

Получаем, например, [32]

$$p_{13} = p_{13}(0)(1+t^*)^{-2-1/\beta}, \quad p_{23} = p_{23}(0)(1+t^*)^{-1-1/\beta} \quad (5.25)$$

Для разлета ($\beta > 0$) p_{13} и p_{23} убывают с ростом t^* , однако для слета ($\beta < 0$) это имеет место лишь для $\beta < -1/2$ и $\beta < -1$ соответственно.

Обратимся к моментам третьего порядка. Для течения (5.24) введем переменную $\eta = \ln(1+t^*)$. Из уравнений (5.9) имеем

$$Q_{123} = Q_{123}(0) \exp\left[-\left(2 + \frac{3}{2\beta}\right)\eta\right]$$

Для (Q_{k11} , Q_{k22} , Q_{k33}) при $k = 1, 2$ получим две однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Записывая решение через $\exp(-\lambda\eta)$, для собственных значений λ получим соответственно формулы

$$3 - k + \frac{3}{2\beta}, \frac{1}{12\beta} \{13 + 12(4-k)\beta \mp [25 + 24(4k-5)\beta + 144\beta^2]^{1/2}\}$$

где $k = 1, 2$. Представленные выражения при $k = 2$ справедливы и для системы (Q_{311} , Q_{322} , Q_{333}).

При $\beta > 0$ все λ положительны. При $\beta < 0$ собственные значения обращаются в нуль при следующих значениях $|\beta|$ соответственно: (0.75, 0.196, 0.637) для собственных значений при $k = 1$ и (1.5, 0.365, 0.912) – при $k = 2$.

Таким образом, в случае слета моменты третьего порядка убывают при достаточно больших Kn , а при малых Kn – растут (аналогично напряжениям (5.25)).

6. Сферический разлет–слет. Преобразование А.А. Никольского. Течение (2.5) описывается локально-максвелловской функцией (2.6) при условии, что состояние – локально-максвелловское и в начальный момент времени.

Это течение – единственное из класса, указанного в разд.2, принадлежащее к го-моэнергетическим аффинным течениям (однородным по терминологии А.А. Никольского [40–42]). В отличие от других течений (5.2) давление удовлетворяет уравнению Эйлера

$$p = p(0)(1+t^*)^{-5}$$

В случае максвелловских молекул из системы (5.8) находим [22]

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\alpha\beta}(0)\exp\{[(1+t^*)^{-2} - 1]/(2\beta)\}$$

Здесь использованы обозначения (5.10), (5.15).

Зафиксируем $\Pi_{\alpha\beta}(0)$, β . Тогда для разлета ($\beta > 0$) при $t^* \rightarrow \infty$ имеем

$$\Pi_{\alpha\beta} \rightarrow \Pi_{\alpha\beta}(0)\exp\{-1/(2\beta)\} \neq 0$$

т.е. $\Pi_{\alpha\beta}$ стремится к конечному значению, а не к локально-максвелловскому значению $\Pi_{\alpha\beta} = 0$. В случае слета ($c < 0$, $\beta < 0$, $t^* = -t/|c|$) при $t^* \rightarrow -1$ имеем $\Pi_{\alpha\beta} \rightarrow 0$.

В приближениях Навье–Стокса, Барнетта и т.д. $\Pi_{\alpha\beta} = 0$. Последнее делает сферический разлет–слет менее интересным (с газодинамической точки зрения) по сравнению с остальными течениями (5.2), для которых в приближении Навье–Стокса некоторые $\Pi_{\alpha\beta} \neq 0$. Однако в этом случае удастся найти интересные результаты для функции распределения.

Решение (2.6) подсказывает, что вместо C_i следует ввести переменную $C_i^* = (1+t^*)C_i$. В переменных t^* , C_i^* в левой части кинетического уравнения остается только слагаемое с частной производной от $f_i(t^*, C_i^*)$ по t^* , а перед оператором столкновений появляется множитель, зависящий от v и t^* . Устраняя его путем введения новой переменной вместо t^* , приводим уравнение (5.3) к виду [42]

$$\partial f_i^*/\partial Y = J_i^*, \quad f_i^* = f_i(Y, C_i^*), \quad Y = Y(v, t^*) \quad (6.1)$$

(внешние силы не учитываются).

Предполагается [42], что межмолекулярная сила равна $\kappa_{ij}r^{-v}$, $\kappa_{ij} = \text{const}$, r – межмолекулярное расстояние, показатель $v > 2$ одинаков для всех межмолекулярных взаимодействий частиц сортов i и j , где $i, j = 1, 2, \dots, N$ (ранее рассмотрен случай молекул – упругих сфер [41]). В случае разлета при $t^* \rightarrow \infty$ и $v > 7/3$ функция Y стремится к конечному пределу Y_∞ , при $v \leq 7/3$ имеем $Y \rightarrow \infty$ (для максвелловских молекул $v = 5$). В случае слета $Y_\infty = \infty$ при $v \geq 7/3$ и $Y_\infty \neq \infty$ при $v < 7/3$.

В результате справедливо утверждение [42]: пусть дано решение задачи (3.1) $f_i = f_i(t, \xi_i)$, которое при $t \rightarrow \infty$ стремится к максвелловской функции $f_i(\infty, \xi_i) = f_i^M(\xi_i^2)$. Тогда при тех же начальных условиях известно решение задачи (6.1) $f_i^* = f_i^*(Y, C_i^*)$. При $t \rightarrow \infty$ функция распределения $f_i(Y, C_i^*) \rightarrow f_i(Y_\infty, C_i^*)$, т.е. не стремится к локально-максвелловской функции f_i^M , если $v > 7/3$ (разлет) и $v < 7/3$ (слет), так как $Y_\infty \neq \infty$, и $f_i \rightarrow f_i^M$ в остальных случаях, когда $Y_\infty = \infty$.

Для течений класса (5.2) не выполняются, вообще говоря, условия применимости H -теоремы [1, 6].

Используя результаты разд. 4 [18–21, 43, 44], находим явные выражения для функций распределения в случае течений разлета–слета.

Более общая постановка задачи такова [45]: при наличии внешних сил в простом газе указать преобразования, сводящие кинетическое уравнение Больцмана–Максвелла к виду (6.1). Получающиеся течения – суперпозиция сферического разлета–слета и вращения газа. В отсутствие внешних сил получаются результаты А.А. Никольского [42].

7. Доминантные (нормальные) решения. Продолжим (см. разд. 5) обсуждение доминантных точных решений (ДР). Для наглядности рассмотрим течения (5.24), ког-

да, согласно соотношению (5.11), давление p выражается через отношение Π_{11} , удовлетворяющее уравнению

$$3\beta \frac{d\Pi_{11}}{d\ln(1+t^*)} = 2\beta\Pi_{11}^2 - (2\beta + 3)\Pi_{11} - 4\beta \quad (7.1)$$

где β выражается через число Кнудсена (5.15). Его решение

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= -\frac{5+r_1}{2} \left[1 + \frac{5+r_2}{5+r_1} Q \right] [1+Q]^{-1} \\ Q &= \left[\frac{r_2-r_1}{5+r_2+2\Pi_{11}(0)} - 1 \right] (1+t^*)^q, \quad q = \frac{r_2-r_1}{3} \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$r_{1,2} = -\frac{3}{2\beta} \left[1 + 4\beta \mp \sqrt{1 + 4\beta \left(\frac{1}{3} + \beta \right)} \right]$$

При любом $t^* \geq 0$ справедливо ДР

$$\Pi_{11}^d = \Pi_{11}(0) = -\frac{5+r_1}{2} \quad (7.3)$$

Для разлета $\beta > 0$ и $q < 0$, для слета $\beta < 0$ и $q > 0$. Соответственно при $t^* \rightarrow \infty$ и $t^* \rightarrow -1$ имеем $\Pi_{11} \rightarrow \Pi_{11}^d$, т.е. решение стремится к ДР тем быстрее, чем меньше $|\beta|$. Разлагая выражение (7.3) по малым β , получаем ряд ЧЭ (внешнее разложение решения уравнения (7.1)), в данном случае с постоянными коэффициентами, который абсолютно сходится для $|\beta| < 1/2$. (Строгое доказательство см., например, в [1]). Поэтому ДР можно найти также, предполагая величину Π_{11} постоянной: из уравнения (7.1) получаем квадратное уравнение для Π_{11} , выбор корня определяется тем, что первый член разложения должен быть навье-стоксовым.

Аналогичны свойства решений для некоторых других течений [24, 25, 31, 32]. В случае (5.13) члены ряда ЧЭ зависят от t^* , сам ряд – асимптотический. Согласно решению (5.18), Π_{33}^d зависят только от $z = \zeta^{-1}$, величину ζ можно записать в виде

$$\zeta = \frac{3\rho_{33}^{(1)}}{4p} = \frac{\mu}{2p} \nabla \mathbf{u}$$

Напряжение $\rho_{33}^{(1)}$ дается приближением Навье–Стокса.

Таким образом, ДР (5.18) зависит от t через газодинамические переменные, поэтому его (как и решение (7.3)) можно назвать нормальным в смысле Гильберта. Однако обычно в кинетической теории под нормальными понимаются приближенные решения кинетических уравнений в виде внешних асимптотических разложений, каждый член которых выражается через газодинамические переменные и их пространственные производные [1, 4, 6]. Алгоритмы разложений известны в отличие от алгоритмов построения доминантных решений.

Важнейшее свойство ДР – существование нелинейных локальных выражений для переносных свойств. Их точность и область применимости зависят от конкретных условий. Началу исследований для реальных течений положило обнаружение случаев вырождения рядов ЧЭ. По-видимому, первым случаем были медленные стационарные течения, описываемые линеаризованным кинетическим уравнением Больцмана–Максвелла (см. историю вопроса в [46]). Позже были даны нелинейные при-

меры для газа из максвелловских молекул: теплопередача между параллельными пластинами [47] и плоское течение Куэтта с теплопередачей [48]. Был дан обзор и проведено обобщение на смесь газов [49].

Путем анализа бесконечной цепочки уравнений переноса для коэффициентов разложения f по полиномам Эрмита при $\text{Kn} \ll 1$ показано [47], что в случае теплопередачи уравнения сохранения в любом порядке по Kn сводятся к уравнениям в приближении Навье–Стокса – Фурье (как и в [46])

$$p = \text{const}, \quad p_{\alpha\beta} = 0, \quad q_y = q_y^{(1)} = -\lambda_0 T \frac{dT}{dy} = \text{const}, \quad \lambda_0 = \text{const}$$

дающим ДР.

В случае течения Куэтта [48] установлена структура разложения по $\text{Kn} \ll 1$, в частности

$$p_{xy}^* \equiv \frac{p_{xy}}{p^{(1)}} = g_1(\varepsilon^2), \quad q_y^* \equiv \frac{q_y}{q_y^{(1)}} = g_2(\varepsilon^2), \quad \varepsilon = \frac{\mu du_x}{p dy} = \text{const} \quad (7.4)$$

Здесь x, y – координаты вдоль и поперек пластин, напряжение $p_{xy}^{(1)}$ и тепловой поток $q_y^{(1)}$ даются приближением Навье–Стокса – Фурье, g_1 и g_2 – степенные ряды по ε^2 с постоянными коэффициентами. Из этих результатов при $u_x = 0$ следуют результаты для задачи о теплопередаче [47].

В рамках модельного кинетического уравнения (БГКВ-модель) удалось получить доминантные (нормальные по терминологии ряда авторов [50–54]) решения задачи о теплопередаче [50] и о течении Куэтта [51] для функции распределения при диффузном отражении молекул от стенок. Для “ликвидации” кнудсеновских слоев температуры пластин полагались равными нулю и бесконечности [50] и 0 [51].

Результаты расчетов этого течения методом прямого статистического моделирования показали [52, 53], что вне кнудсеновских слоев в широких диапазонах значений определяющих параметров величины p_{xy}^* и q_y^* с весьма высокой точностью являются функцией только от $\varepsilon^2 \in [0, 2.8]$. Найдены функции g_1 и g_2 , которые менялись от единицы (приближение Навье–Стокса) до ≈ 0.2 .

Качественно существование нелинейных локальных выражений для переносных свойств (значительное отличие g_1, g_2 от единицы) в случае течения Куэтта объясняется следующим образом. Путем уменьшения температур пластин кнудсеновские слои можно сделать достаточно тонкими. Однако при большом числе Маха движущейся пластины температура газа вне слоев будет высокой, параметр ε порядка единицы ($p = \text{const}$), так что здесь переносные свойства будут локальными и сильно отличаться от навье-стоксовых.

Этот результат – одно из подтверждений необходимости поиска моделей, отличных от навье-стоксовой. На этом пути на основе анализа профилей макропараметров в сильной ударной волне в одноатомном газе, рассчитанных методом прямого статистического моделирования, удалось установить [54] приближенные локальные соотношения для переносных свойств

$$\frac{p_{xx}}{p} = F_p \left(\frac{\mu(T) du_x}{p dx}, \frac{\lambda(T) dT}{pc dx} \right), \quad \frac{q_x}{pc} = F_q \left(\frac{\mu(T) du_x}{p dx}, \frac{\lambda(T) dT}{pc dx} \right), \quad c = \sqrt{2 \frac{k}{m} T}$$

обладающих весьма высокой точностью. Здесь ось x направлена по потоку, μ и λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, F_p и F_q – функции указанных переменных.

8. Степенные решения. Единственным решением уравнения

$$J = 0 \quad (8.1)$$

является максвеллиан. Однако при этом накладываются известные [4, 5] условия интегрируемости функции распределения в пространстве скоростей. В противном случае удается получить степенные решения [55].

Интеграл столкновений записывается в виде

$$J = \int w(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)F(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)d\tau$$

$$F(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3) = f f_1 - f_2 f_3, \quad d\tau = d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3$$

Здесь \mathbf{p} – импульс, $E(\mathbf{p})$ – энергия сталкивающихся частиц, $w(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3) = U(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)\delta(E + E_1 - E_2 - E_3)$ – вероятность перехода, $U(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)$ – матричный элемент, δ – дельта-функция. В данном разделе используются обозначения [55]. Функции w , F обладают следующими свойствами:

$$w(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3) = w(\mathbf{p}_1\mathbf{p}|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3) = w(\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3|\mathbf{p}\mathbf{p}_1)$$

$$F(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3) = F(\mathbf{p}_1\mathbf{p}|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3) = -F(\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3|\mathbf{p}\mathbf{p}_1)$$

Кроме того, предполагается, что $E(\mathbf{p})$ и $U(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)$ – однородные функции

$$E(\lambda\mathbf{p}) = \lambda^\beta E(\mathbf{p}), \quad U(\lambda\mathbf{p}\lambda\mathbf{p}_1|\lambda\mathbf{p}_2\lambda\mathbf{p}_3) = \lambda^m U(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)$$

а система изотропна, т.е. функции w , E инвариантны относительно произвольных вращений \hat{g} :

$$E(\hat{g}\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}), \quad w(\hat{g}\mathbf{p}\hat{g}\mathbf{p}_1|\hat{g}\mathbf{p}_2\hat{g}\mathbf{p}_3) = w(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)$$

Решение уравнения (8.1) ищется в виде

$$f \sim E^s \quad (8.2)$$

где s – постоянная. Используя свойства симметрии столкновений, преобразования поворота и растяжения, удается привести интеграл столкновений к виду

$$J = \frac{1}{4}E^v \int w(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)F(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)[E^{-v} + E_1^{-v} - E_2^{-v} - E_3^{-v}]d\tau$$

Максвелловскому решению соответствует обращение в нуль $F(\mathbf{p}\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)$, обращение в нуль выражения в квадратных скобках дает искомые решения: $s = s_0$ при $v(s) = 0$ за счет сохранения числа частиц, $s = s_1$ при $v(s) = -1$ за счет сохранения энергии.

Для частиц со степенным межмолекулярным потенциалом $V(r) = V_0 r^{-\alpha}$

$$s = \begin{cases} s_1 = -(m + 3d)/(2\beta), & m = -4 + 2\beta(1 - \alpha^{-1}) \\ s_0 = s_1 + 1/2 \end{cases}$$

Здесь d – размерность импульсного пространства. Для максвелловских молекул, когда $\alpha = 4$, $m = -1$, имеем

$$s_0 = -3/2, \quad s_1 = -2 \quad (8.3)$$

Согласно соотношениям (8.2), (8.3), функция распределения $f \rightarrow \infty$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$, интеграл для плотности (энергии) частиц расходится либо в нуле, либо на бесконечно-

сти, т.е. данные решения справедливы не во всем пространстве скоростей. Они являются примерами промежуточных асимптотик для открытых систем.

Поиск [55] этих решений был стимулирован работами по кинетической теории слаботурбулентной плазмы [56], где кинетическое уравнение формулируется для “плотности” волн в пространстве волновых векторов. Указаны [55] различные примеры степенных решений (в частности, для изотропной турбулентности), справедливых в областях существования автомодельных решений.

Следует отметить, что решения, описывающие возникновение малых потоков вблизи равновесного или стационарного распределений, по-видимому, реализуются чаще, чем степенные однопоточные решения. Были приведены [55] варианты приближенных решений, являющихся малым отклонением от описанных выше степенных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00501), программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1984.2003.1) и Министерства образования РФ (Е02-40-52).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Truesdell C., Muncaster R.G.* Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a Simple Monoatomic Gas. N.Y.: Acad. Press, 1980. 593 p.
2. *Chapman S., Cowling T.Y.* The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge: Univ. Press, 1939. 404 p.
3. *Ельяшевич М.А., Протьюко Т.С.* Вклад Максвелла в развитие молекулярной физики и статистических методов // Успехи физ. наук. 1981. Т. 135. Вып. 3. С. 381–423.
4. *Cercignani C.* The Boltzmann Equation and its Applications. N.Y.: Springer, 1988. 455 p.
5. *Cercignani C., Illner R., Pulvirenti M.* The Mathematical Theory of Dilute Gases. N.Y.: Springer, 1994. 347 p.
6. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
7. *Перминов В.Д., Фридлендер О.Г.* Моменты интеграла столкновений для максвелловских молекул // ПМТФ. 1965. № 6. С. 114–116.
8. *Чусов М.А.* К выводу гидродинамических уравнений гредовского типа (Расчет транспортных коэффициентов произвольного порядка) // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 6. С. 1132–1139.
9. *Walker E.L., Tanenbaum B.S.* Investigation of kinetic models for gas mixtures // Phys. Fluids. 1968. V. 11. № 9. P. 1951–1954.
10. *Goebel C.J., Harris S.M., Johnson E.A.* Two-temperature disparate – mass gas mixtures: A thirteen moment description // Phys. Fluids. 1976. V. 19. № 5. P. 627–635.
11. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefied gases // Commun. Pure and Appl. Math. 1949. V. 2. № 4. P.331–407.
12. *Morse T.F.* Energy and momentum exchange between nonequipartition gases // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 10. P. 1420–1427.
13. *Hamel B.B.* Two-fluid hydrodynamic equations for a neutral, disparate – mass, binary mixture // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 1. P. 12–22.
14. *McCormack F.J., Williams A.M.* Anisotropic relaxation in binary mixture of Maxwell molecules // Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 6. P. 995–998.
15. Физико-химические процессы в газовой динамике. Справочник. Т. 2: Физико-химическая кинетика и термодинамика / Под ред. Г.Г. Черного и С.А. Лосева. М: Научно-издательский центр механики, 2002. 367 с.
16. *Галкин В.С., Макашев Н.К.* Условия применимости и молекулярно-кинетический вывод уравнений многотемпературной многоскоростной газодинамики // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 6. С. 1443–1453.

17. Johnson E.A. Effect of cross-sectional mass dependence in the theory of disparate-mass gas mixtures // *Phys. Fluids*. 1978. V. 21. № 7. P. 1239–1240.
18. Бобылев А.В. О точных решениях уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 6. С. 1296–1299.
19. Krook M., Wu T.T. Exact solutions of the Boltzmann equation // *Phys. Fluids*. 1977. V. 20. № 10. P. 1589–1595.
20. Krook M., Wu T.T. Exact solution of Boltzmann equations for multicomponent systems // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 38. № 18. P. 991–993.
21. Grigoryev Yu. N., Meleshko S.V. Bobylev – Krook – Wu modes for multicomponent gas mixtures // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. № 1. P. 93–95.
22. Галкин В.С. О точных решениях уравнений кинетических моментов смеси одноатомных газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 41–50.
23. Борисов А.С., Галкин В.С. Некоторые свойства однородных течений разреженных газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 3. С. 64–69.
24. Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in gas according to Maxwells kinetic theory // *J. Ration. Mech. and Analysis*. 1956. № 1. P. 55–127.
25. Галкин В.С. Об одном решении кинетического уравнения Больцмана // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 445–446.
26. Галкин В.С. Об одном классе решений уравнений кинетических моментов Грэда // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 386–389.
27. Галкин В.С. Одномерное нестационарное решение уравнений кинетических моментов одноатомного газа // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 186–188.
28. Борисов А.С. Асимптотическое поведение некоторых решений системы кинетических моментов Грэда // Инж. журн. 1965. Т. 5. Вып. 6. С. 1051–1057.
29. Борисов А.С. Асимптотика решений системы уравнений кинетических коэффициентов в случае однородных течений максвеллова газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 137–140.
30. Галкин В.С. Об однородных течениях разреженного газа при малых числах Кнудсена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 2. С. 57–62.
31. Рудяк В.Я. К вопросу об изучении точных решений системы уравнений кинетических моментов // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 369–372.
32. Галкин В.С. Точное решение системы уравнений кинетических моментов второго порядка для двухмасштабного гомоэнергетического аффинного течения одноатомного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 156–166.
33. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. V. 1. N. Y., etc.: McGraw-Hill. 1955 = Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965. 294 с.
34. Handbook of Mathematical Functions / Eds M. Abramovitz, I.A. Stegan. N.Y.: Dover Publ., 1964 = Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
35. Галкин В.С., Шавалиев М.Ш. Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена–Энскога // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 3–28.
36. Бузыкин О.Г., Галкин В.С. О модификациях газодинамических уравнений высших приближений метода Чепмена–Энскога // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 185–199.
37. Santos A., Garzó V., Brey J.J., Dufty J.W. Singular behavior of shear flow far from equilibrium // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 71. № 24. P. 3971–3974.
38. Santos A., Garzó V. Exact moment solution of the Boltzmann equation for uniform shear flow // *Physica A*. 1995. V. 213. № 3. P. 409–425.
39. Montanero J.M., Santos A., Garzó V. Singular behavior of the velocity moments of a dilute gas under uniform shear flow // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 53. № 1. P. 1269–1272.
40. Никольский А.А. Об общем классе однородных движений сплошных сред и разреженных газов // Инж. журн. 1965. Т. 5. Вып. 6. С. 1044–1050.
41. Никольский А.А. Простейшие точные решения уравнения Больцмана для движений разреженного газа // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 2. С. 299–301.

42. *Никольский А.А.* Трехмерное однородное расширение – сжатие разреженного газа со степенными функциями взаимодействия // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 522–524.
43. *Muncaster R.G.* On generating exact solutions of the Maxwell-Boltzmann equation // Archive Ration. Mech. and Analysis. 1979. V. 70. № 1. P. 79–90.
44. *Бобылев А.В.* Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1987. 251 с.
45. *Nishitani T.* Similarity transformation of the Boltzmann equation // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 2. P. 349–355.
46. *Галкин В.С.* Вырождение рядов Чепмена–Энскога для переносных свойств в случае медленных стационарных течений слаборежеженных газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 157–163.
47. *Асмолов Е.С., Макашев Н.К., Носик В.И.* Теплопередача между плоскими параллельными пластинами в газе максвелловских молекул // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3. С. 577–580.
48. *Макашев Н.К., Носик В.И.* Стационарное течение Куэтта (с теплопередачей) газа максвелловских молекул // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 5. С. 1077–1081.
49. *Nosik V.I.* Degeneration of the Chapman–Enskog expansion in one-dimensional motions of Maxwellian molecule gases // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 13th Intern. Symp. Novosibirsk, 1982. N. Y.: Plenum Press, 1985. V. 1. P. 237–244.
50. *Santos A., Brey J.J., Kim C.S., Dufty J.W.* Velocity distribution for a gas with steady heat flow // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. № 1. P. 320–327.
51. *Brey J.J., Santos A., Dufty J.W.* Heat and momentum transport far from equilibrium // Phys. Rev. A. 1987. V. 36. № 6. P. 2842–2849.
52. *Erofeev A.I., Friedlander O.G.* Macroscopic relations in rarefied shear flows // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 22nd Intern. Symp. / Eds T.J. Bartel, M.A. Gallis. N. Y.: Amer. Inst. Phys., 2001. P. 164–168.
53. *Montanero J.M., Santos A., Garzó V.* Monte Carlo simulation of nonlinear Couette flow in dilute gas // Phys. Fluids. 2000. V. 12. № 11. P. 3060–3073.
54. *Ерофеев А.И., Фридлиндер О.Г.* Перенос импульса и энергии в ударной волне // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 120–130.
55. *Кац А.В., Конторович В.М., Моисеев С.С., Новиков В.Е.* Точные степенные решения кинетических уравнений для частиц // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. Вып. 1(7). С. 177–192.
56. *Захаров В.Е.* Слабая турбулентность в средах с распадным спектром // ПМТФ. 1965. № 4. С. 35–39.

Жуковский

Поступила в редакцию
25.XII.2002