

УДК 539.375:534.1

© 2004 г. А. О. Ватульян

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНФИГУРАЦИИ ТРЕЩИНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В рамках линейного подхода исследуются обратные геометрические задачи анизотропной теории упругости для тел с трещинами произвольной конфигурации. Изучаются вопросы единственности решения возникающих обратных задач и строятся эффективные схемы их решения на основе сочетания метода граничных элементов и регуляризованной итерационной процедуры. Рассматривается пример реконструкции прямолинейной трещины в ортотропном слое.

Создание эффективных математических моделей дифракции упругих волн на трещинах – проблема, весьма актуальная при разработке ультразвуковых методов обнаружения внутренних и поверхностных дефектов (полостей, трещин) с последующим определением их характерных размеров и конфигурации по измеренному на границе тела полю перемещений. Если размеры дефекта соизмеримы с длиной волны зондирующего поля или меньше ее, то использование надежных математических моделей становится особенно важным в силу того, что в этом случае регистрируемое на поверхности тела поле мало изменяется при наличии дефекта. При решении возникающих при этом обратных геометрических задач теории упругости необходим строгий подход, базирующийся на достаточно точном решении соответствующих краевых задач динамической теории упругости. Наиболее популярной моделью трещины в настоящее время является математический разрез, на котором перемещения терпят конечные скачки на некоторой поверхности, а берега трещины раскрыты и не взаимодействуют [1]. Такая концепция исторически проистекает из постановок для статических задач теории упругости, причем скачки определяются либо из условия отсутствия напряжений на берегах, либо (в рамках принципа суперпозиции) из условия постоянства нормальных напряжений на них.

Одним из наиболее эффективных методов исследования прямых и обратных задач для упругих тел с дефектами в условиях установившихся колебаний является метод сведения к системам граничных интегральных уравнений (ГИУ), позволяющий понизить размерность прямых задач и сформулировать систему нелинейных операторных уравнений для решения обратных. Подобный подход для дефектов типа полостей в неограниченной среде и при наличии прямолинейной границы был реализован ранее (см. например, [2, 3]). Что касается процедуры определения конфигурации трещин в твердом теле по информации о физических полях на границе тела, то в последние годы исследования ведутся в трех направлениях:

- 1) изучение обратных задач для уравнения Лапласа и моделирование процедуры идентификации трещины при помощи изучения особенностей строения либо тепловых, либо электростатических полей в телах с дефектами [4–8] с использованием некоторого функционала “невозможности”;

- 2) реконструкция трещины в бесконечной среде по диаграммам направленности упругих волн (аналогично описанным ранее подходам [2]) в дальней зоне [9–11] и формулировкой систем ГИУ первого рода;

- 3) изучение месторасположения трещин, находящихся на границе раздела двух упругих материалов [12], сочетающее как процедуру решения прямой задачи на основе метода конечных элементов, так и решение задачи продолжения полей.

В рамках изотропной теории упругости методом ГИУ получены решения широкого класса задач о колебаниях упругих тел с трещинами без взаимодействия берегов. Были разработаны методы [13], позволяющие изучать колебания тел с одиночной трещиной, а также тел с системой параллельных трещин в полупространстве или слое, и получать решение интегральных

уравнений в полуаналитической форме, что не требует больших вычислительных затрат. Если же трещина наклонена по отношению к прямолинейной границе или же не является плоской, то единственно эффективным средством исследования прямых и обратных задач теории трещин является общий метод ГИУ, а при численной реализации – основанный на нем метод граничных элементов.

Отметим, что во многих случаях для построения адекватной модели отражения упругих волн от трещины необходим учет анизотропии, которой обладают многие реальные конструкционные материалы и сплавы, а также горные породы, что в значительной степени усложняет расчет отраженных от дефекта волновых полей.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω упругого анизотропного тела V , ограниченного кусочно-гладкой поверхностью $S = S_1 \cup S_2$. Колебания вызываются нагрузкой p_i , приложенной на части границы $S_{20} \subset S_2$, а часть границы S_1 закреплена. Считаем, что тело V ослаблено трещиной, расположенной на гладкой внутренней двусторонней поверхности S_0^\pm , на которой компоненты вектора перемещений терпят скачки $\chi_i = u_i|_{S_0^+} - u_i|_{S_0^-}$; примем также, что в процессе колебаний берега трещины не взаимодействуют. Краевая задача имеет вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij} n_j|_{S_2} = p_i, \quad u_i|_{S_1} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j^\pm|_{S_0^\pm} = 0 \tag{1.2}$$

причем нагрузки p_i отличны от нуля на S_{20} . Здесь c_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных, удовлетворяющие обычным условиям симметрии и положительной определенности, n_j^\pm – компоненты единичных векторов нормалей к поверхностям S_0^\pm . Обратная задача об идентификации трещины состоит в том, чтобы по заданному (измеренному) полю смещений на части границы S_{21} , свободной от нагрузок ($S_{20} \cap S_{21} = \emptyset$), найти форму поверхности S_0^+ из условия

$$u_i|_{S_{21}} = g_i \tag{1.3}$$

Замечание. В случае учета взаимодействия берегов необходимо в граничных условиях на трещине учесть процесс смыкания берегов при колебаниях, однако при этом прямая задача сразу становится нелинейной. Эти условия могут быть сформулированы в виде неравенства $\chi_n = \chi_j n_j^+ \geq 0$, причем если неравенство строгое, то имеет место условие $\sigma_{ij} n_j^+|_{S_0^+} = 0$, если же на некотором участке трещины $\chi_n = 0$ (берега сомкнуты), то на этом же участке трещины должно выполняться условие $\sigma_{ij} n_j^+ n_i^+ < 0$, что соответствует его сжатию. При этом оказывается, что в силу нелинейности граничных условий изучать установившийся режим колебаний нельзя и необходимо рассматривать задачу в нестационарной постановке.

2. О единственности решения задачи о реконструкции трещины. Как известно, проблема единственности – одна из ключевых при исследовании обратных геометрических задач. В случае, когда тело V ослаблено полостью, схема доказательства теоремы единственности аналогична схемам доказательства в акустическом случае [2]. Отметим, что теоремы единственности были сформулированы в рамках первого [4] и второго направления [7, 9]. В случае трещин в ограниченном анизотропном упругом теле проблема доказательства единственности ее идентификации требует иных математических средств.

Сформулируем условия, обеспечивающие единственность решения обратной задачи о восстановлении поверхности S_0^+ .

Теорема. Пусть в условиях постановки обратной задачи (1.1)–(1.3) данные (1.3) известны на некотором отрезке изменения частоты $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ в нерезонансной области. Тогда задача о нахождении поверхности S_0^+ имеет единственное решение в классе C^2 гладких поверхностей с гладким краем, содержащихся строго внутри объема V .

Доказательство этого утверждения проведем, предполагая, что существуют два решения сформулированной обратной задачи, характеризующиеся векторами перемещений с компонентами $u_j^{(1)}$, $u_j^{(2)}$ и поверхностями $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$.

Введем в рассмотрение вектор с компонентами $v_j = u_j^{(1)} - u_j^{(2)}$ и тензор с компонентами $T_{ij} = c_{ijkl}v_{k,l}$. Имеют место однородные уравнения движения

$$T_{ij,j} + \rho\omega^2 v_i = 0 \quad (2.1)$$

в области $V_{12} = V \setminus (S_0^{(1)} \cup S_0^{(2)})$ и однородные граничные условия

$$v_i|_{S_1} = 0, \quad T_{ij}n_j|_{S_2} = 0, \quad v_i|_{S_{21}} = 0 \quad (2.2)$$

Тогда для эллиптического оператора теории упругости (2.1), как было показано ранее [14], фактически имеем задачу Коши с нулевыми данными на S_{21} и в силу единственности ее решения $v_i \equiv 0$ всюду в области V_{12} вплоть до ее границы; в частности,

$$T_{ij}n_j^{(2)}|_{S_0^{(2)}} = 0 \quad (2.3)$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай $S_0^{(1)} \cap S_0^{(2)} = \emptyset$. Введем в рассмотрение область $V_0^{(2)} \subset V$, содержащую $S_0^{(2)}$ строго внутри себя, такую, что $V_0^{(2)} \cap S_0^{(1)} = \emptyset$. Внутри этой области выполнены уравнения движения

$$\sigma_{ij,j}^{(1)} + \rho\omega^2 u_i^{(1)} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(1)} = c_{ijkl}u_{k,l}^{(1)} \quad (2.4)$$

и условие

$$\sigma_{ij}^{(1)}n_j^{(2)}|_{S_0^{(2)}} = 0 \quad (2.5)$$

для всех $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ в силу соотношения (2.3). Поскольку решения эллиптической системы (2.4) $u_i^{(1)}$ – аналитические функции координат (и частоты ω) [15] в области $M = V_0^{(2)} \times [\omega_1, \omega_2]$, то в силу того, что условие (2.5) выполняется на некоторой гиперповерхности $S_0^{(2)} \times [\omega_1, \omega_2]$, находящейся внутри M , функция $u_i^{(1)}$ тождественно равна нулю в области $V_0^{(2)}$ и продолжается аналитически нулем вплоть до границы S_{21} , что противоречит граничному условию (1.3).

Случай $S_0^{(1)} \cap S_0^{(2)} \neq \emptyset$. В этом случае область $V_0^{(2)} \subset V$ выбирается таким образом, что она содержит часть $S_1^{(2)} \subset S_0^{(2)}$, причем $S_1^{(2)} \cap S_0^{(2)} = \emptyset$.

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично первому случаю. Теорема доказана.

3. Формулировка системы операторных уравнений. На первом этапе исследования проблемы идентификации строится решение прямой задачи о расчете волновых полей в упругом теле, ослабленном трещиной известной конфигурации S_0^+ . Для этого используются основные идеи теории потенциала, позволяющие свести исходную краевую задачу к системе интегральных уравнений относительно введенных выше скачков перемещений на трещине. Наиболее эффективный подход связан с предварительным сведением исходной задачи (1.1), (1.2) для тела с трещиной в рамках теории дислокаций [16] к системе уравнений теории упругости с фиктивными массовыми силами $f_i = -[c_{ijkl}n_k^+ \chi_l \delta(\xi)]_{,j}$ для однородного тела V . Далее на основании теоремы взаимности для упругого анизотропного тела поле упругих смещений внутри $V(\xi \in V)$ может быть найдено при помощи формул Сомильяны [1]

$$u_m(\xi) = \int_S \sigma_{ij} n_j U_i^{(m)}(x, \xi) dS_x - \int_S \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j u_i dS_x + \int_V U_i^{(m)}(x, \xi) f_i dV_x \quad (3.1)$$

где $U_i^{(m)}(x, \xi)$, $\sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)$ – соответственно фундаментальные и сингулярные решения для анизотропной среды; их явные представления построить нельзя, однако можно построить их интегральные представления, что оказывается вполне достаточным при численной реализации метода граничных элементов (как, например, было указано в [17]).

Учитывая выражение для f_i и выбирая в соотношении (3.1) в качестве $U_i^{(m)}(x, \xi)$ матричную функцию Грина для оператора анизотропной теории упругости (1.1) с граничными условиями

$$U_i^{0(m)}(x, \xi)|_{S_1} = 0, \quad \sigma_{ij}^{0(m)}(x, \xi) n_j|_{S_2} = 0 \quad (3.2)$$

получим следующее представление для расчета полей смещений внутри тела V :

$$u_m(\xi) = u_m^s(\xi) + \int_{S_0^+} \sigma_{kl}^{0(m)}(x, \xi) \chi_l(x) n_k(x) dS_x \quad (3.3)$$

$$u_m^s(\xi) = \int_{S_{20}} p_i(x) U_i^{0(m)}(x, \xi) dS_x$$

где $u_m^s(\xi)$ – поле в среде без дефекта (эталонное поле). Если известны функции раскрытия, то на основании формул (3.3) можно рассчитывать поле смещений всюду внутри области, в том числе и на границе S_2 . Для определения функций раскрытия обычным способом формулируется система граничных уравнений путем удовлетворения граничным условиям на трещине (1.2):

$$K\chi = \int_{S_0^+} k_{jl}(x, y) \chi_l(x) dS_x = F_j(y), \quad y \in S_0^+ \quad (3.4)$$

Ядра $k_{jl}(x, y)$ – гиперсингулярные, имеют подвижную особенность второго порядка, а соответствующие интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару [18]; функции $F_j(y)$ выражаются через эталонное поле смещений.

На основании соотношений (3.3), (3.4) и решения прямой задачи на втором этапе исследования в обратной задаче с учетом условия (1.3) формулируется система операторных уравнений относительно $\chi_l(x)$ и S_0^+

$$\int_{S_0^+} k_{ml}^0(x, \xi) \chi_l dS_x = g_m^*(\xi) = g_m(\xi) - u_m^s(\xi), \quad m = 1, 2, 3, \quad \xi \in S_{21} \quad (3.5)$$

$$\int_{S_0^+} k_{jl}(x, y) \chi_l(x) dS_x = F_j(y), \quad j = 1, 2, 3, \quad y \in S_0^+$$

причем $k_{ml}^0(x, \xi) = \sigma_{kl}^{0(m)}(x, \xi) n_k(x)$. Интегральные операторы в системе ГИУ (3.5) распространяются только на границу трещины, что в значительной степени снижает объем вычислительной работы при решении как прямой, так и обратной задачи. Если же в качестве ядер фигурируют фундаментальные решения соответствующих операторов, то система ГИУ содержит ряд промежуточных неизвестных, в частности смещения на поверхности тела. К сожалению, построение функций Грина даже в виде интегральных представлений не встречает трудности лишь для канонических областей типа слоя, бесконечного цилиндра и полупространства.

Заметим, что система операторных уравнений (3.5) наряду с гиперсингулярными операторами содержит и операторы Фредгольма первого рода с гладкими ядрами, поскольку $S_{21} \cap S_0^+ = \emptyset$. В силу этого задача нахождения S_0^+ из системы (3.5) некорректна и, следовательно, неустойчива по отношению к малым возмущениям заданных функций $g_j(x)$, что характерно для обратных геометрических задач. В силу этого процедура численного исследования системы (3.5) требует регуляризации [19] в той или иной форме.

4. Способы решения задачи идентификации. Наиболее эффективной схемой численного анализа нелинейной системы (3.5) является следующая, состоящая из двух этапов.

Этап 1. На первом этапе способ нахождения простейшей конфигурации S_0^+ основан на использовании принципа регуляризации на компактных множествах, в частности на предварительной параметризации этой поверхности при помощи описания ее конечным числом параметров c_k . Например, для плоской эллиптической трещины таковыми являются семь параметров (координаты центра, компоненты вектора нормали и полуоси эллипса); для туннельной трещины, перпендикулярной к границе слоя, таких параметров всего два: длина трещины и расстояние от ближайшей вершины трещины до границы слоя. Заметим, что в качестве определяемых параметров лучше всего выбирать некоторые инвариантные характеристики трещины, не связанные с выбором системы координат, такие, как площадь, длина контура трещины, расстояние до свободной границы и т.д. Способ нахождения этих параметров основан на дискретном представлении интегральных операторов в системе (3.5) через узловые значения функций раскрытия и определения параметров c_k из условия минимума неквадратичного функционала невязки $\Phi(c_k)$, порожденного вторым соотношением (3.5). При отыскании минимума функционала невязки используются, как правило, итерационные схемы.

Реализация этого подхода требует многократного решения прямой задачи (1.1), (1.2), которое осуществляется в рамках простейшего варианта метода граничных элементов. В этом случае решение системы гиперсингулярных уравнений (3.4) сво-

дится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений χ_{lq} (при фиксированных значениях параметров c_k)

$$\sum_{q=1}^N A_{jlqp} \chi_{lq} = F_{jp}, \quad p = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

$$A_{jlqp} = \int_{S_q} k_{jl}(x, y_p) dS_x, \quad F_{jp} = F_j(y_p)$$

$\cup_{q=1}^N S_q$ – аппроксимация поверхности S_0^+ многогранником с треугольными гранями, y_p – центр тяжести треугольника S_p (в плоском случае $n = 2$, контур трещины аппроксимируется N -звенной ломаной, а y_p – середина p -го звена).

Этап 2. На втором этапе происходит уточнение конфигурации трещины на основе метода линеаризации. Линеаризация системы операторных уравнений проводится в окрестности простейшей конфигурации, найденной на первом этапе, с последующей дискретизацией на основе сочетания идей метода граничных элементов и метода регуляризации А.Н. Тихонова [19].

Будем отыскивать поверхность S_0^+ на множестве гладких поверхностей класса C^2 , звездных относительно некоторого центра, причем будем считать, что граница ∂S_0^+ поверхности S_0^+ – гладкая кривая. Осуществим отображение S_0^+ на сегмент единичной сферы. Q_1 , которое задается уравнением $x = R(u)$, $u = (u_1, u_2) \in Q_1$.

Пусть вектор-функция $R_0(u)$ отвечает плоской круговой трещине, найденной на 1-м этапе. Осуществим линеаризацию первого из интегральных уравнений системы (3.5) в окрестности $R_0(u)$, вводя $z(u) = R(u) - R_0(u) = \{z_j(u)\}$, $j = 1, 2, 3$ и используя следующие разложения:

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}^{0(m)}(R(u), \xi) &= \sigma_{kl}^{0(m)}(R_0(u), \xi) + \sigma_{kl,j}^{0(m)}(R_0(u), \xi_1) z_j(u) + o(z(u)) \\ \chi_l(R(u)) &= \chi_l(R_0(u)) + \chi_{l,j}(R_0(u)) z_j(u) + o(z(u)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$n_k^+(x) dS_x = \varepsilon_{kst} [R_{s0,1}(u) R_{t0,2}(u) + R_{s0,1}(u) z_{t,2}(u) + R_{t0,2}(u) z_{s,1}(u) + o(\nabla z(u))] du_1 du_2$$

(здесь ε_{kst} – символы Леви-Чевиты). Процедура линеаризации дает следующую систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами

$$L_{mj} z_j = G_m, \quad m = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} L_{mj} z_j &= \int_{Q_1} \varepsilon_{kjl} \left[\sigma_{kl,j}^{0(m)}(R_0, \xi) \chi_l(R_0) + \sigma_{kl}^{0(m)}(R_0, \xi) \chi_{l,j}(R_0) - \right. \\ &\left. - \left(\frac{\partial R_{t0}}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial R_{t0}}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) (\sigma_{kl}^{0(m)}(R_0, \xi) \chi_l(R_0)) \right] z_j(u_1, u_2) du_1 du_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $G_m(\xi) = g_m^*(\xi) - g_m^0(\xi)$, а $g_m^0(\xi)$ соответствует конфигурации $R_0(u)$.

После решения системы (4.3) на основе метода регуляризации и нахождения функций $z_j(u_1, u_2)$ можно перейти к новой конфигурации трещины и далее строить линеаризацию в ее окрестности на основе соотношений (3.4), (4.3).

5. Численный эксперимент. В качестве иллюстрации предлагаемого подхода рассмотрим задачу реконструкции поперечной трещины в ортотропной полосе толщины H с жестко заземленной нижней гранью. Колебания в полосе вызываются нормальной нагрузкой, приложенной к ее верхней грани на конечном промежутке, а остальная часть границы свободна от нагрузок. Замыкают постановку задачи условия излучения, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [20]. Координаты вершин трещины определяются по известному полю перемещений на части свободной границы.

Представление волнового поля в полосе найдено путем построения матричной функции Грина для полосы с граничными условиями типа (3.2), которая строится методом интегрального преобразования Фурье и представима в виде однократных интегралов по некоторому контуру σ в комплексной плоскости, выбирающемуся в соответствии с принципом предельного поглощения. Система гиперсингулярных интегральных уравнений (3.3) относительно скачков χ_j в рассматриваемом случае поперечной трещины распадается на два независимых уравнения

$$\int_a^b \chi_j(\xi_3) k_{jj}(\xi_3, x_3) d\xi_3 = F_j(x_3), \quad j = 1, 3, \quad x_3 \in [a, b] \quad (5.1)$$

причем их ядра представимы в виде

$$k_{jj}(\xi_3, x_3) = \int_{\sigma} \frac{D_{jj}(a_1, \xi_3, x_3)}{D(\alpha_1)} d\alpha_1 \quad (5.2)$$

а $D_{jj}(\alpha, \xi_3, x_3)$, $D(\alpha_1)$ – известные функции своих аргументов, которые из-за громоздкости не приводятся. В отличие от рассмотренного ранее случая [13] ядра $k_{jj}(\xi_3, x_3)$ оказываются неразностными, однако имеют подвижную особенность при $x_3 = \xi_3$.

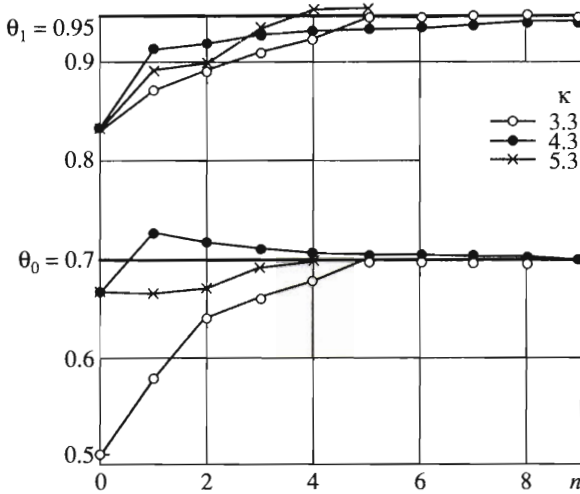
Решение ГИУ вида (5.1), (5.2) проводилось на основании метода граничных элементов, который для изучаемого типа уравнений описан ранее [21]. Рассчитанное на основе представления (3.3) поле перемещений на верхней грани слоя в точках x_1^j служило исходной информацией при решении обратной задачи.

Обратная задача состояла в отыскании вершин трещины a и b по известным смещениям u_k^{0j} , заданным в точках x_1^j на части границы $x_3 = H$, и сводилась к совместному решению системы граничных интегральных уравнений (5.1) и минимизации соответствующего функционала невязки

$$\Phi(a, b) = \sum_j |u_k(x_1^j, H) - u_k^{0j}|^2$$

При численной реализации предлагаемого подхода ГИУ сводились к системе нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров трещины a , b и узловых значений χ_k^j . Построен итерационный процесс определения значений a и b , причем в качестве начального приближения выбирается либо внутренняя трещина максимального размера, либо та конфигурация трещины, которой соответствуют значения параметров, доставляющие минимум функционалу невязки при его нахождении на некоторой равномерной сетке внутри треугольника поиска $0 \leq a < b < H$.

В качестве примера реконструкции ниже приведены результаты расчетов при решении модельной задачи для ортотропной полосы из аустенитной стали, ослабленной поперечной трещиной, координаты вершин которой $\theta_0 = a/H = 0.7$; $\theta_1 = b/H = 0.95$ при



разных значениях безразмерной частоты $\kappa = H\omega\sqrt{\rho/c_{33}} \in [3.3, 5.3]$, когда в слое имеется различное число распространяющихся мод. Отметим достаточную эффективность нахождения идентифицируемых вершин трещины, что иллюстрирует фигура, где изображены зависимости восстановления координат трещины (θ_0, θ_1) от числа итераций n для разных значений параметра κ . Результаты численных экспериментов по предлагаемой методике показали, что в области низких и средних частот для определения только размера заглубленной трещины с погрешностью порядка одного процента достаточно 5–8 итераций, а для идентификации координат ее концов требуется 4–12 итераций.

Следует отметить, что при уменьшении размера трещины по сравнению с длиной волны функционал невязки имеет множественные локальные минимумы, и в этом диапазоне частот следует применять более тонкие средства минимизации. Для поверхностной трещины с уменьшением частоты колебаний разрешающая способность метода ухудшается. Через некоторое количество итераций наблюдается медленное стремление рассчитываемых значений вершин a и b к точным; с ростом частоты колебаний и числа распространяющихся мод скорость сходимости предлагаемого способа реконструкции увеличивается. При небольшом количестве точек регистрации поля перемещений x_1^j иногда возможно появление фантомного – зеркального отображения трещины относительно срединной поверхности слоя, однако при этом ее размер восстанавливается верно. Для исключения фантомного решения использовалась дополнительная информация о поле на поверхности слоя, причем в качестве таковой служила информация о поле либо при большем числе точек регистрации x_1^m , либо информация о поле перемещений при изменении частоты колебаний в соответствии с теоремой единственности. Учет дополнительной информации позволил избавиться от фантомного решения.

Автор благодарит И.В. Баранова за проведение расчетов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01124) и в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-2113.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 239 с.
2. *Colton D., Kress R.* Integral Equation Methods in Scattering Theory. N. Y., etc.: Wiley, 1983 = *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
3. *Ватульян А.О., Коренский С.А.* Метод линеаризации в геометрических обратных проблемах теории упругости // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 639–646.
4. *Vui H.D.* Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction. Boca Raton, FL: CRC Press, 1994. 204 p.
5. *Santosa F., Vogelius M.* A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements // Intern. J. Eng. Sci. 1991. V. 29. № 8. P. 917–937.
6. *Andrieux S., Abda A.B.* Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // Inverse Problems. 1996. V. 12. № 5. P. 553–563.
7. *Bannour T., Abda A.B., Jaoua M.* A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks // Inverse Problems. 1997. V. 13. № 4. P. 899–917.
8. *Andrieux S., Abda A.B., Jaoua M.* On the inverse emergent plane crack problem // Math. Methods Appl. Sci. 1998. V. 21. № 10. P. 895–906.
9. *Alves C.J.S., Ha Duong T.* On inverse scattering by screens // Inverse Problems. 1997. V. 13. № 5. P. 1161–1176.
10. *Kress R.* Inverse elastic scattering from a crack // Inverse Problems. 1996. V. 12. № 5. P. 667–684.
11. *Alves C.J.S., Ha Duong T.* Inverse scattering for elastic plane cracks // Inverse Problems. 1999. V. 15. № 1. P. 91–97.
12. *Weigl W., Andrä H., Schnack E.* An alternating iterative algorithm for the reconstruction of internal cracks in a three-dimensional solid body // Inverse Problems. 2001. V. 17. № 6. P. 1957–1975.
13. *Бабешко В.А.* Тела с неоднородностями; случай совокупностей трещин // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 2. С. 191–193.
14. *Ватульян А.О., Ворович И.И., Соловьев А.Н.* Об одном классе граничных задач в динамической теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 373–380.
15. *Hormander L.* The Analysis of Linear Differential Operators. Bd. 2. Berlin, etc.: Springer, 1983 = *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1986. 456 с.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
17. *Ватульян А.О., Красников В.В.* Колебания ортотропной полуплоскости с криволинейной трещиной // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 83–90.
18. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
19. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
20. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
21. *Ватульян А.О., Баранов И.В., Гусева И.А.* Идентификация трещиноподобного дефекта в ортотропном слое // Дефектоскопия. 2001. № 10. С. 48–52.