

УДК 539.375

© 2004 г. В. Ф. Бакиров, Р. В. Гольдштейн

МОДЕЛЬ ЛЕОНОВА–ПАНАСЮКА–ДАГДЕЙЛА ДЛЯ ТРЕЩИНЫ НА ГРАНИЦЕ СОЕДИНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается плоская задача о предельном равновесии трещины-расслоения на границе раздела различных материалов. Предполагается, что при приложении на бесконечности равномерно распределенных нормальных напряжений в концевых областях действуют постоянные нормальные и касательные напряжения сцепления между берегами трещины. Исследован общий случай, когда размеры концевых областей не малы по сравнению с характерным размером трещины. Получены аналитические выражения для компонент вектора раскрытия берегов трещины, распределения напряжений на продолжении трещины, коэффициентов интенсивности напряжений, а также соотношения между внешней нагрузкой, длиной трещины и параметрами концевой области в состоянии предельного равновесия. Отдельно рассмотрен случай, когда концевые области малы по сравнению с длиной трещины.

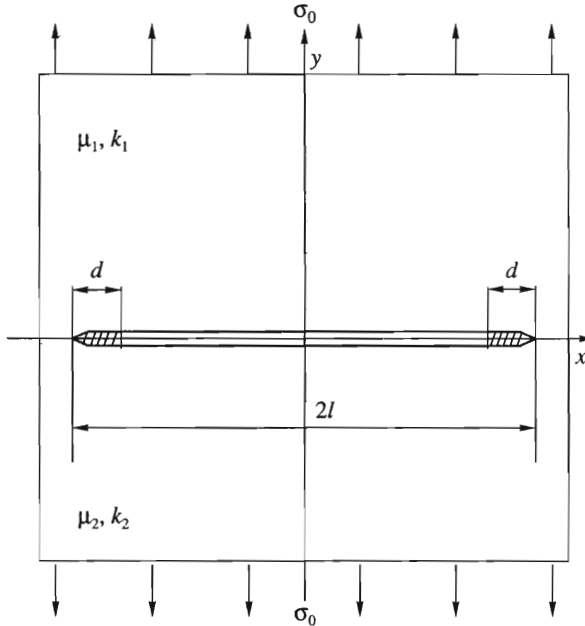
Оценка сопротивления адгезионного соединения росту трещин по границе предполагает или иное моделирование процессов деформирования и подготовки разрушения в концевых областях трещин-расслоений с учетом механических свойств и геометрических характеристик промежуточного адгезионного слоя.

Для этой цели можно рассмотреть модель трещины [1, 2] на границе двух сред со связями, действующими между ее поверхностями в концевых областях трещины. Был подробно рассмотрен случай линейно деформируемых связей [3]. В развитие моделей Г.И. Баренблатта [4–6] для трещин в однородных телах Р.Л. Салганика [7] для трещин на границе двух сред принимается, что концевые области, занятые связями, могут быть и не малы в сравнении с размером трещины. Задача о трещине-расслоении под действием внешней нормальной нагрузки и возникающих нормальных и касательных напряжений в связях, препятствующих ее раскрытию, сводится к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядрами типа Коши, которая решается численно.

В то же время представляет интерес построение модели, допускающей, с одной стороны, учет процессов в концевых областях трещины на границе двух сред и, с другой – аналитическое решение задачи о предельном равновесии трещины. Подобная модель предложена в данной работе и представляет собой по сути обобщение модели Леонова – Панасюка – Дагдейла [8, 9] для трещин в однородных средах. Принимается, что при действии на бесконечности равномерно распределенных нормальных напряжений взаимодействие между поверхностями в концевых областях трещины характеризуется постоянными нормальными и касательными напряжениями сцепления. Это предположение, в частности, позволяет моделировать пластическое течение в промежуточном адгезионном слое в концевых областях трещины.

Заметим, что в то время как в однородных телах гипотеза о тонкой пластической зоне в конце трещины хорошо описывает процессы роста трещины в тонких пластинках, в случае кусочно-однородного тела при малой в сравнении с длиной трещины толщине адгезионного слоя пластические зоны могут быть локализованы в пределах него не только в условиях плоского напряженного состояния. Это заведомо имеет место, если адгезионный слой более пластичен, чем соединенные им материалы.

Заметим также, что хотя решение краевой задачи теории упругости, к которой в рамках предложенной модели сводится отыскание раскрытия поверхностей трещины на границе двух



Фиг. 1

сред, в простейшем варианте полуплоскостей имеет, как и в случае трещины – расслоения без пластических зон, осциллирующие особенности вблизи концов трещины, это не мешает получить содержательные соотношения между параметрами концевой области, длиной трещины и внешней нагрузкой в состоянии ее предельного равновесия. Последнее связано с тем, что рассматриваемая краевая задача по существу является внешней по отношению к исходной задаче о трещине при наличии адгезионного слоя, наличие которого во внутренней задаче исключает нефизичную необходимость взаимного перехлеста поверхностей трещины при осциллирующей особенности решения вблизи конца трещины.

В ряде работ [10–14] специально исследовались возможности модификации постановки задачи о трещине на границе двух сред, позволяющие снять осциллирующую особенность путем введения зон контакта с проскальзыванием без трения [10–13] или с предельным трением [14].

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Рассмотрим плоскую задачу о трещине длины $2l$, расположенной на границе раздела двух упругих безграничных полуплоскостей из различных материалов $|x| \leq l, y = 0$. Пусть верхнюю полуплоскость ($y > 0$) заполняет среда с параметрами $\mu = \mu_1, k = k_1$, а нижнюю ($y < 0$) – среда с параметрами $\mu = \mu_2, k = k_2$, где $k_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$ – плоской деформации, $k_{1,2} = (3 - \nu_{1,2}) / (1 + \nu_{1,2})$ – для плоского напряженного состояния; μ_1, μ_2 и ν_1, ν_2 – модули сдвига и коэффициенты Пуассона материалов. Положим, что на удаленной границе ($x^2 + y^2 \rightarrow \infty$) приложены равномерно распределенные нормальные напряжения σ_0 , в то время как в концевых областях размеры d , примыкающих к вершинам трещины ($l - d \leq |x| \leq l, y = 0$), действуют постоянные нормальные и касательные напряжения сцепления между берегами трещины σ_* и τ_* (фиг. 1), отвечающие пластическому течению адгезионного материала в тонком промежуточном слое и удовлетворяющие некоторому критерию пластичности:

$$f(\sigma_*, \tau_*) = 0$$

где f – монотонно возрастающая функция от абсолютных значений σ_* и τ_* , зависящая от свойств адгезионного материала. Отметим, что условие ограниченности на-

пряжений у вершины трещины при $x = \pm l$ (см. ниже) дает второе соотношение для определения значений σ_* и τ_* .

Пользуясь линейностью задачи, рассматриваемое состояние можно представить суперпозицией следующих двух состояний: 1) адгезионное соединение материалов без трещины под действием постоянного растягивающего напряжения σ_0 на бесконечности, 2) адгезионное соединение материалов с трещиной на границе раздела, при этом на берега трещины сносится растягивающее напряжение σ_0 .

Введем безразмерные величины

$$x' = x/l, \quad d' = d/l$$

Опуская штрихи и учитывая сказанное выше, будем рассматривать задачу о трещине единичной полудлины со следующими граничными условиями на ее берегах:

$$\sigma_{yy}(x) = \begin{cases} -\sigma_0 + \sigma_*, & 1-d \leq |x| \leq 1 \\ -\sigma_0, & |x| < 1-d \end{cases}, \quad \sigma_{xy}(x) = \begin{cases} \tau_*, & 1-d \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| < 1-d \\ -\tau_*, & -1 \leq |x| \leq -(1-d) \end{cases} \quad (1.1)$$

Рассмотрим безразмерный (отнесенный к l) вектор раскрытия берегов трещины

$$\mathbf{u}(u_x(x), u_y(x)) = \mathbf{u}^+(u_x^+(x), u_y^+(x)) - \mathbf{u}^-(u_x^-(x), u_y^-(x)) \quad (1.2)$$

где $\mathbf{u}^+(u_x^+(x), u_y^+(x))$ и $\mathbf{u}^-(u_x^-(x), u_y^-(x))$ – векторы безразмерных перемещений верхнего и нижнего берега трещины. Производные по x от компонент вектора раскрытия берегов трещины при наличии произвольных нормальных $\sigma_{yy}(x)$ и касательных $\sigma_{xy}(x)$ напряжений на берегах трещины длины 2, расположенной на границе раздела материалов, получим, следуя описанному ранее подходу [3]:

$$u'_y(x) - iu'_x(x) = \frac{\gamma}{4(1+\alpha)} \left[(1-\alpha)(\sigma_{xy}(x) + i\sigma_{yy}(x)) - \frac{1+\alpha}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1-|x|}{1+|x|} \right)^{-i\beta \operatorname{sign} x} \int_{-1}^1 \frac{(\sigma_{yy}(\xi) - i\sigma_{xy}(\xi))d\xi}{(\xi-x)\varphi(\xi)} \right] \quad (1.3)$$

где

$$i^2 = -1, \quad \alpha = \frac{\mu_2 k_1 + \mu_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2}, \quad \beta = \frac{\ln \alpha}{2\pi}, \quad \gamma = \frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-i\beta}$$

Подставив выражения (1.1) в равенство (1.3), получим

$$u'_y(x) - iu'_x(x) = \frac{\gamma\varphi(x)}{4} \left[\frac{2i\beta - x}{\operatorname{ch}\pi\beta} \sigma_0 + (\sigma_* - i\tau_*)Q_1(x) - (\sigma_* + i\tau_*)Q_2(x) \right] \quad (1.4)$$

где

$$Q_1(x) = \begin{cases} R(x, 2/d-1, \beta) - (2i\beta - x)/\operatorname{ch}\pi\beta, & 1-d < x < 1 \\ R\left(-x, \frac{1}{2/d-1}, -\beta\right), & 0 < x < 1-d \end{cases}$$

$$Q_2(x) = R\left(x, \frac{1}{2/d-1}, \beta\right)$$

$$R(x_1, x_2, \beta) = \frac{2x_2^{1/2-i\beta}}{\pi(1-2i\beta)} \left\{ \frac{1}{1+x_2} \left[1-2i\beta + (-x_1+2i\beta)F\left(1, 1, 3/2-i\beta, \frac{x_2}{1+x_2}\right) \right] - \right. \\ \left. - (1-x_1)F\left(1, 1/2-i\beta, 3/2-i\beta, \frac{1-x_1}{1+x_1}x_2\right) \right\} \quad (1.5)$$

Через $F(a, b, c, z)$ обозначена гипергеометрическая функция комплексного переменного z , которая в круге $|z| < 1$ представляется рядом

$$F(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!} z^k, \quad (\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1), \quad (\lambda)_0 = 1$$

$c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

а в области, не принадлежащей кругу сходимости, определяется путем аналитического продолжения этого ряда. Функция $F(a, b, c, z)$ регулярна в комплексной плоскости с разрезом $(1, \infty)$.

Из условия равенства нулю вектора раскрытия берегов трещины при $x = 1$

$$u_x(1) = 0, \quad u_y(1) = 0 \quad (1.6)$$

по формуле

$$u_y(x) - iu_x(x) = \int_1^x (u'_y(\xi) - iu'_x(\xi))d\xi$$

найдем для $1-d \leq x \leq 1$ компоненты вектора раскрытия берегов трещины

$$u_y(x) - iu_x(x) = \frac{\gamma}{4\text{ch}\pi\beta} (1-x^2)\varphi(x) [\sigma_0 - (\sigma_* - i\tau_*)P_1(x) - (\sigma_* + i\tau_*)P_2(x)] \quad (1.7)$$

где

$$P_1(x) = 1 - S(x, 2/d-1, \beta), \quad P_2(x) = S\left(x, \frac{1}{2/d-1}, \beta\right)$$

$$S(x_1, x_2, \beta) = \frac{2\text{ch}\pi\beta x_2^{1/2-i\beta}}{\pi(1-2i\beta)(1+x_2)} \times \left[F\left(1, 1, 3/2-i\beta, \frac{x_2}{1+x_2}\right) - F\left(1, 1, 3/2-i\beta, \frac{(1-x_1)x_2}{(1-x_1)x_2 - (1+x_1)}\right) \right] \quad (1.8)$$

Для значений $0 \leq x \leq 1-d$ компоненты вектора раскрытия берегов трещины определяются с учетом условия непрерывности вектора раскрытия при $x = 1-d$ по формуле

$$u_y(x) - iu_x(x) = \int_{1-d}^x (u'_y(\xi) - iu'_x(\xi))d\xi + u_y(1-d) - iu_x(1-d) \quad (1.9)$$

Под интегралом производные по x от компонент вектора раскрытия берегов трещины берутся в соответствии с выражением (1.4), а компоненты вектора раскрытия на краю конечной области $x = 1 - d$ определяются по формуле (1.7). Имеем

$$u_y(1-d) - iu_x(1-d) = \gamma \left\{ (1-d/2)^{1/2+i\beta} (d/2)^{1/2-i\beta} \frac{\sigma_0}{2\operatorname{ch}\pi\beta} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \left[(1-d/2)d/2F(1, 1, 3/2+i\beta, d/2) \frac{\sigma_* - i\tau_*}{1+2i\beta} + (1-d/2)^{1+2i\beta} (d/2)^{1-2i\beta} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(F(1, 1, 3/2-i\beta, d/2) - F\left(1, 1, 3/2-i\beta, \frac{-1}{(2/d-1)^2-1}\right) \right) \frac{\sigma_* + i\tau_*}{1-2i\beta} \right] \right\} \quad (1.10)$$

и для $0 \leq x \leq 1-d$ находим

$$u_y(x) - iu_x(x) = \frac{\gamma}{4\operatorname{ch}\pi\beta} (1-x^2)\varphi(x) \times \\ \times \left[\sigma_0 - (\sigma_* - i\tau_*)S\left(-x, \frac{1}{2/d-1}, -\beta\right) - (\sigma_* + i\tau_*)S\left(x, \frac{1}{2/d-1}, \beta\right) \right] \quad (1.11)$$

Функция $S(x_1, x_2, \beta)$ определяется формулой (1.8).

Компоненты вектора перемещений верхнего и нижнего берегов трещины связаны следующими соотношениями [15]:

$$\frac{u_y^-(x)}{u_y^+(x)} = \frac{u_x^-(x)}{u_x^+(x)} = -\frac{\mu_1(k_2\alpha + 1)}{\mu_2(k_1 + \alpha)} \quad (1.12)$$

Тогда по вектору раскрытия $u(u_x(x), u_y(x))$ найдем векторы перемещений верхнего и нижнего берега трещины $u^+(u_x^+(x), u_y^+(x))$ и $u^-(u_x^-(x), u_y^-(x))$ по формулам

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{c}^+ \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^- = \mathbf{c}^- \mathbf{u} \quad (1.13)$$

где

$$\mathbf{c}^+ = \left[1 + \frac{\mu_1(k_2\alpha + 1)}{\mu_2(k_1 + \alpha)} \right]^{-1}, \quad \mathbf{c}^- = -\left[1 + \frac{\mu_2(k_1 + \alpha)}{\mu_1(k_2\alpha + 1)} \right]^{-1}$$

Распределение напряжений на продолжении трещины ($x > 1$) при произвольном распределении нормальных $\sigma_{yy}(x)$ и касательных $\sigma_{xy}(x)$ напряжений на берегах трещины длины 2 имеет вид [15]:

$$\sigma_{xy}(x) + i\sigma_{yy}(x) = \frac{\operatorname{ch}\pi\beta}{\pi} \Psi(x) \int_{-1}^1 \frac{(\sigma_{xy}(\xi) + i\sigma_{yy}(\xi))}{(\xi-x)\varphi(\xi)} d\xi \quad (1.14)$$

где

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-i\beta}$$

Подставив выражение (1.1) в равенство (1.14), получим

$$\sigma_{xy}(x) + i\sigma_{yy}(x) = i\sigma_0[-1 + (x - 2i\beta)\psi(x)] - \\ - ich\pi\beta\psi(x)\left[(\sigma_* - i\tau_*)R\left(-x, \frac{1}{2/d-1}, -\beta\right) - (\sigma_* + i\tau_*)R\left(x, \frac{1}{2/d-1}, \beta\right)\right] \quad (1.15)$$

Функция $R(x_1, x_2, \beta)$ определяется формулой (1.5).

Для трещины длины $2l$, расположенной на границе раздела двух материалов, при произвольном распределении нормальных и касательных напряжений имеет место выражение для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) [3]

$$K_I + iK_{II} = l^{1/2-i\beta} \lim_{s=x-1 \rightarrow +0} \sqrt{2\pi s}(\sigma_{yy}(s) + i\sigma_{xy}(s))s^{-i\beta} = \\ = \frac{-ch\pi\beta}{2^{1/2+i\beta}\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{1/2+i\beta} (\sigma_{yy}(\xi) + i\sigma_{xy}(\xi))d\xi \quad (1.16)$$

Подставив выражения (1.1) в равенство (1.16), получим итоговые КИН от действия внешних растягивающих напряжений и внутренних напряжений сцепления в концевых областях трещины

$$K_I + iK_{II} = \frac{1 + 2i\beta}{2^{i\beta}} \sqrt{\pi}\sigma_0 l^{1/2-i\beta} - \frac{ch\pi\beta}{2^{i\beta}\sqrt{\pi}} l^{1/2-i\beta} \left[(\sigma_* - i\tau_*) \frac{3/2 - i\beta}{2(9/4 + \beta^2)} \times \right. \\ \times d^{3/2+i\beta} (2-d)^{1/2-i\beta} F(1, 2, 5/2 + i\beta, d/2) + \\ \left. + (\sigma_* + i\tau_*) \frac{1 + 2i\beta}{1 + 4\beta^2} d^{1/2-i\beta} (2-d)^{3/2+i\beta} F(1, 2, 3/2 - i\beta, d/2) \right] \quad (1.17)$$

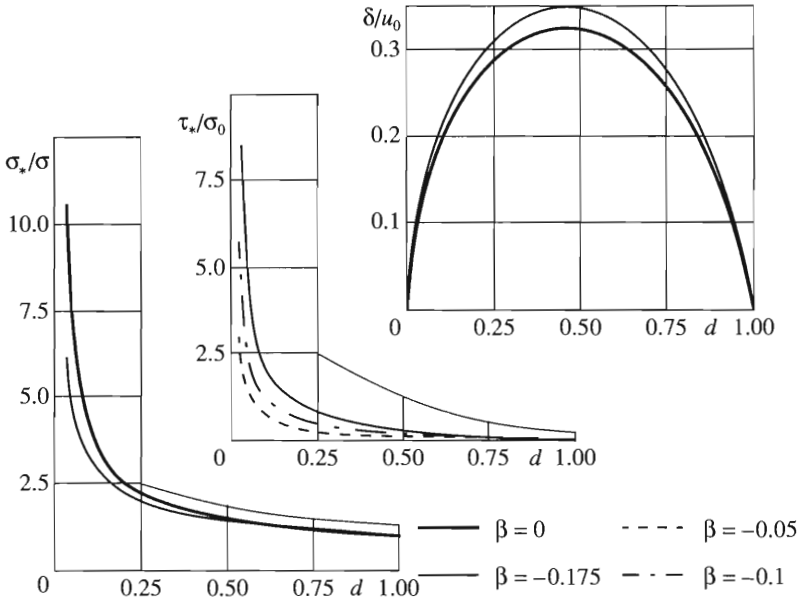
2. Анализ состояния предельного равновесия. Рассмотрим состояние предельного равновесия трещины-расслоения на границе раздела различных материалов, характеризующееся действием таких сил сцепления в концевой области трещины, при которых поток энергии через точки $x = \pm 1$ при росте трещины будет отсутствовать. Этому состоянию отвечает случай, когда итоговые КИН равны нулю. Приравнивая выражение (1.17) к нулю, получим соотношение, связывающее внешнюю нагрузку, напряжения сцепления, длину и размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия. Состояние предельного равновесия описывается следующими формулами:

$$\frac{\sigma_*}{\sigma_0} = \frac{\pi}{\Delta} \cos(\beta \ln(2/d - 1)), \quad \frac{\tau_*}{\sigma_0} = -\frac{\pi}{\Delta} \sin(\beta \ln(2/d - 1)) \quad (2.1) \\ \Delta = 2ch\pi\beta(d(2-d))^{1/2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 + 2i\beta} F(1, 1, 3/2 + i\beta, d/2) \right]$$

откуда также следует

$$\frac{\tau_*}{\sigma_*} = -\operatorname{tg}(\beta \ln(2/d - 1))$$

При заданных значениях β и d из соотношений (2.1) и критерия пластического течения материала в тонком промежуточном адгезионном слое в концевой области трещины можно определить значения предельной нагрузки σ_0 и напряжения сцепле-



Фиг. 2

ния σ_* , τ_* . Если подставить σ_* , τ_* согласно выражениям (2.1) в критерий пластического течения $f(\sigma_*, \tau_*) = 0$, то можно построить функцию d от σ_0/σ_{*T} (значение σ_{*T} , определяемое из критерия пластического течения $f(\sigma_{*T}, 0) = 0$, есть предел текучести для адгезионного материала) и сравнить с экспериментальной кривой, которую можно построить по измерениям размера пластической области d и предельной нагрузки σ_0 , как это было сделано [9] для трещин в однородных материалах.

На фиг. 2 представлены графики зависимости отношений нормальных σ_* и касательных τ_* напряжений сцепления к нагрузке σ_0 от безразмерной длины концевой области d при разных значениях параметра β , построенные по формулам (2.1). (Отметим, что так как параметр α заключен в пределах $1/3 < \alpha < 3$, то параметр β заключен в пределах $-0.175 < \beta < 0.175$). В частности, при заданном отношении d графики демонстрируют перераспределение нормальных σ_* и касательных τ_* напряжений сцепления в зависимости от изменения значения параметра β .

Подставив в равенство (1.7) нормальные σ_* и касательные τ_* напряжения сцепления по формуле (2.1), получим компоненты вектора раскрытия берегов трещины в концевой области $1 - d \leq x \leq 1$. Далее из условия $u_y(x) > 0$ определим, что раскрытие трещины положительно на интервале $|x| < 1 - \epsilon$, где параметр ϵ зависит от β и d . На интервалах $1 - \epsilon < |x| < 1$ раскрытие трещины имеет осциллирующую особенность и принимает неограниченное число раз отрицательные значения. Поэтому для применимости рассматриваемой модели необходимо, чтобы размер концевой области был значительно больше области осцилляции решения, т.е.

$$d \gg \epsilon(\beta, d) \quad (2.2)$$

Для реальных адгезионных соединений с трещинами на границе раздела это условие хорошо выполняется. Рассмотрим, например, соединение сталь – плексиглас (модуль Юнга и коэффициент Пуассона для стали $E_1 = 210$ ГПа и $\nu_1 = 0.3$, для плексигласа $E_2 = 3$ ГПа и $\nu_2 = 0.4$) с толщиной эпоксидного клеяющего слоя $h \sim 0.1$ мм [16]. Тогда для $l \sim 1$ см и $d \sim h/l$ имеем: $d \sim 10^{-2}$ и в случае плоской деформации ($\beta \approx -0.05$)

получим $\varepsilon \sim 10^{-12}$, а в случае плоского напряженного состояния ($\beta \approx -0.1$) получим $\varepsilon \sim 10^{-6}$.

Равенство нулю итоговых КИН (1.17) приводит к ограниченности напряжений у вершины трещины. Принимая во внимание соотношения (2.1), получим распределение напряжений на продолжении трещины ($x > 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x) + i\sigma_{yy}(x) = & -i\sigma_0 + i\sigma_0 \frac{\pi}{\Delta} (2/d - 1)^{i\beta} \left\{ 1 - \frac{2\text{ch}\pi\beta}{\pi(1 - 2i\beta)} \times \right. \\ & \times \left(\frac{x-1}{x+1} (2/d - 1) \right)^{1/2 - i\beta} \left[F\left(1, 1/2 - i\beta, 3/2 - i\beta, -\frac{x-1}{x+1} (2/d - 1) \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2/d - 1} F\left(1, 1/2 - i\beta, 3/2 - i\beta, -\frac{x-1}{x+1} \frac{1}{2/d - 1} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Одним из условий, которым пользуются для оценки размера концевой области d , является условие предельной вытяжки δ на краю концевой области, где δ – постоянная, характеризующая материал адгезионного слоя. Будем использовать безразмерную величину $\delta' = \delta/l$, опуская штрих в дальнейшем. Тогда имеем

$$|u_y(1 - d) - iu_x(1 - d)| = \delta \quad (2.4)$$

Подставив в формулы (1.10) выражения для нормальных σ_* и касательных τ_* напряжений сцепления (2.1) и затем используя условие (2.4), получим соотношение, связывающее предельную вытяжку, нагрузку, длину трещины и размер концевой области в состоянии предельного равновесия. На фиг. 2 представлены зависимости предельной вытяжки, нормированной на раскрытие в центре трещины

$$u_0 = \frac{\gamma}{4\text{ch}\pi\beta} \sigma_0$$

при нулевой концевой области, от параметра d при минимальном и максимальном (по абсолютной величине) значениях параметра β .

В случае, когда материалы одинаковы ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $k_1 = k_2 = k$, $\beta = 0$), выражения (2.1), (2.3) и (2.4) переходят в соотношения, аналогичные соотношениям модели Леонова – Панасюка – Дагдейла для трещин в однородных средах

$$\frac{\sigma_*}{\sigma_0} = \frac{\pi}{2\arccos(1 - d)}, \quad \tau_* = 0$$

$$\sigma_{yy}(x) = -\sigma_0 + \frac{\sigma_0}{\arccos(1 - d)} \arctg \sqrt{\frac{(1 - d)^{-2} - 1}{1 - x^{-2}}}, \quad \sigma_{xy}(x) = 0$$

$$\frac{-(1 - d) \ln(1 - d)k + 1}{\arccos(1 - d)} \frac{\sigma_0}{2\mu} = \delta$$

В этих соотношениях значение σ_* , определяемое из критерия пластичности $f(\sigma_*, 0) = 0$, имеет смысл предела текучести для адгезионного материала.

3. Случай малого параметра d . Рассмотрим предельный переход в полученных выше соотношениях в случае, когда размер концевой области мал по сравнению с дли-

ной трещины. Из выражения (1.17) имеем главный член асимптотического разложения при $d \rightarrow 0$

$$K_I + iK_{II} = \frac{1 + 2i\beta}{2^{i\beta}} \sqrt{\pi} \sigma_0 l^{1/2 - i\beta} - 2^{3/2 + i\beta} \frac{1 + 2i\beta}{1 + 4\beta^2} \frac{\text{ch} \pi \beta}{2^{i\beta} \sqrt{\pi}} d^{1/2 - i\beta} l^{1/2 - i\beta} (\sigma_* + i\tau_*) \quad (3.1)$$

Приравнявая это выражение к нулю, получим соотношение

$$\sigma_* + i\tau_* = \frac{\pi(1 + 4\beta^2)}{2\sqrt{2} \text{ch} \pi \beta \sqrt{d}} (d/2)^{i\beta} \sigma_0 \quad (3.2)$$

связывающее внешнюю нагрузку, напряжения сцепления, длину и размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия.

Компоненты вектора раскрытия берегов трещины на краю концевой области $x = 1 - d$ определяются формулой (1.10). Главный член асимптотического разложения при $d \rightarrow 0$ равен

$$u_y(1 - d) - iu_x(1 - d) = \gamma \left[\frac{\sqrt{d/2} (d/2)^{-i\beta}}{2 \text{ch} \pi \beta} \sigma_0 - \frac{d}{2\pi(1 + 2i\beta)} (\sigma_* - i\tau_*) \right] \quad (3.3)$$

Используя соотношение (3.2), получим

$$u_y(1 - d) - iu_x(1 - d) = \frac{\gamma d}{2\pi} \frac{1 + 2i\beta}{1 + 4\beta^2} (\sigma_* - i\tau_*) \quad (3.4)$$

В случае условия предельной вытяжки (2.4) получим для размера концевой области

$$d = \frac{2\pi \sqrt{1 + 4\beta^2}}{\gamma \sqrt{\sigma_*^2 + \tau_*^2}} \delta \quad (3.5)$$

Определим критическую величину скорости поглощения энергии в вершине трещины, необходимой для роста трещины. Для скорости высвобождения упругой энергии при продвижении вершины трещины имеем выражение [15]

$$G = \frac{\gamma K_0^2}{16 \text{ch}^2 \pi \beta} \quad (3.6)$$

где $K_0 = \sqrt{(K_{I0})^2 + (K_{II0})^2}$ – модуль КИН, обусловленного действием внешней нагрузки σ_0 . В состоянии предельного равновесия справедливо равенство

$$G = G_*$$

При этом критическая величина скорости поглощения энергии в вершине трещины определяется формулой

$$G_* = \frac{\gamma K_*^2}{16 \text{ch}^2 \pi \beta}$$

где $K_* = \sqrt{(K_{I*})^2 + (K_{II*})^2}$ – модуль КИН, обусловленного напряжениями сцепления, действующими в концевой области трещины в состоянии предельного равновесия.

Из соотношения (3.1) находим

$$K_0^2 = \pi(1 + 4\beta^2) \sigma_0^2 l, \quad K_*^2 = \frac{8 \text{ch}^2 \pi \beta}{\pi(1 + 4\beta^2)} (\sigma_*^2 + \tau_*^2) dl$$

Тогда получим

$$G_* = \frac{\gamma}{2\pi(1+4\beta^2)}(\sigma_*^2 + \tau_*^2)dl \quad (3.7)$$

В случае условия предельной вытяжки из выражений (3.5) и (3.7) следует соотношение

$$G_* = \sqrt{\frac{\sigma_*^2 + \tau_*^2}{1+4\beta^2}} \delta l \approx \sqrt{\sigma_*^2 + \tau_*^2} \delta l \quad (3.8)$$

связывающие критическую величину скорости поглощения энергии (адгезионную энергию разрушения) с напряжениями, действующими в концевых областях, и с предельной вытяжкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Трещина со связями в концевой зоне на границе раздела материалов и адгезионная энергия разрушения // Тр. 9-й конф. по прочности и пластичности. М.: 1996. Т. 2. С. 78–85.
2. Goldstein R.V., Perelmuter M.N. An interface crack with bonding in its end regions and the adhesion fracture energy // Mechanisms and Mechanics of Damage and Failure. Proc. 11th Biennial Europ. Conf. on Fracture/ Ed. J. Petit. Warley: Engineering Materials Advisory Services LTD., 1996. V. 1. P. 263–268.
3. Goldstein R.V., Perelmuter M. Modeling of bonding at an interface crack // Intern. J. Fracture. 1999. V. 99. № 1–2. P. 53–79.
4. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные задачи // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 432–444.
5. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 706–721.
6. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 893–900.
7. Салганик Р.Л. О хрупком разрушении склеенных тел // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 957–962.
8. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі // Прикл. механіка. 1959. Т. 5. Вып. 4. С. 391–401.
9. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.
10. Comninou M. The interface crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. № 4. P. 631–636.
11. Comninou M. Interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. № 4. P. 780–781.
12. Дундурс Дж., Комниноу И. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитных материалов. 1979. № 3. С. 387–396.
13. Симонов И.В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Механика композитных материалов. 1985. № 6. С. 969–976.
14. Захаров В.В., Никитин Л.В. Влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов // Механика композитных материалов. 1983. № 1. С. 20–25.
15. Слепян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
16. Malyshev V.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of cracks // Intern. J. Fract. Mech. 1965. V. 1. № 2. P. 114–128.