

УДК 539.375

© 2004 г. В. К. Лашенов, Б. М. Нуллер¹**СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОЙ ПОЛОСЕ
(ОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ)**

Рассматривается стационарная динамическая задача о движении в упругой полосе $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-h, h)$ с дорелеевской скоростью c центральной полубесконечной трещины $x \in (-\infty, 0)$, $y = 0$. При $x = -\infty$ заданы амплитуды распространяющихся волн (однородных решений). Вместе с задачей расщепления полосы решена в квадратурах родственная задача расслаивания двух полос $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-h, 0)$ и $y \in (0, h)$, не склеенных, но плотно прилегающих одна к другой при $x \geq 0$, $y = 0$. Найдены коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины. Исследованы случаи частичного перетекания энергии деформации по x из минус на плюс бесконечность в обход трещины. Сопоставлены незатухающие кусочно-однородные решения эластостатических и стационарных задач. В частности, показано, что не существует стационарных решений, переходящих при $c \rightarrow 0$ в известные эластостатические решения задач, в которых к расщепленным частям при $x = -\infty$ приложены изгибающие моменты и перерезывающие силы.

Во многих задачах квазистатического развития трещин главный показатель устойчивости трещины, коэффициент интенсивности напряжений (КИН), находят, не решая саму задачу. Соответствующую методику разработал Райс [1]. Она опирается на принцип сохранения потока энергии G , проходящего по упругому телу из бесконечности в вершину трещины, и на формулу Ирвина [2], связывающую КИН с величиной G . Были рассмотрены [3] задачи такого рода различной сложности. Если в качестве критерия развития трещины используется не критический для данного материала КИН K_C , а предельный сток энергии G_C , то для оценки состояния трещины подсчитывают приращение энергии G , используя элементарные механические соображения, соответствующие условиям на бесконечности, а также критерий неустойчивости трещины $G \geq G_C$.

Результаты проведенного ниже исследования позволяют заметить, что в стационарных задачах теории упругости для волноводов указанная методика исследования состояния трещины не работает, ибо энергия и инерция упругого тела на бесконечности неограниченно велики и невозможно заранее предугадать, каков будет поток. Однако еще более существенным препятствием для использования метода Райса в стационарных задачах, как это следует из данной работы, является невыполнение условия стационарного развития трещины $G = G_C$. Оказывается, что в ряде случаев мощность потока энергии распространяющихся волн E при $x = -\infty$ в несколько раз превышает предельную величину E_C , так как часть его, минуя вершину тре-

¹Борис Маркович Нуллер (1934–2002), доктор физико-математических наук, профессор, крупный специалист в области механики и прикладной математики. Выпускник Харьковского университета, работал во ВНИИ гидротехники им. Б.Е.Веденева и Лесотехнической академии (Санкт-Петербург). Автор метода кусочно-однородных решений для уравнений в частных производных со смешанными граничными условиями. Внес существенный вклад в развитие методов решения функциональных уравнений Барнса, Гильберта–Римана, Винера–Хопфа, в теорию нелинейной консолидации, построил математические модели процессов резания и пропитки уплотняемых клеточных и пористых материалов. Талантливый ученый, прекрасный педагог, опубликовал более двухсот печатных работ, воспитал многочисленных учеников и последователей.

щины $x \in (-\infty, 0)$, уходит на $+\infty$. Переносчиками этого потока служат распространяющиеся волны, изменяющие свою частоту после прохождения через сечение $x = 0$.

1. Постановка задачи. Наряду с упругой плоскостью упругая полоса, ослабленная полубесконечным разрезом, служит наиболее простой и информативной моделью состояния трещины в твердом теле. Она учитывает ограниченность реальных областей в одном направлении, описывает свойства распространяющихся волн, их вклад в приток (или отток) дополнительной энергии в вершину трещины.

Пусть полоса $x_1 \in (-\infty, +\infty)$, $y_1 \in (-h, h)$, обладающая упругими характеристиками λ , μ и плотностью ρ , движется с постоянной дорелеевской скоростью c относительно плоскости xOy в сторону, противоположную оси Ox , так что $x = x_1 - ct$, $y = y_1$, где t – время.

Полоса расщепляется полубесконечной центральной трещиной $x < 0$, $y = 0$, вершина которой движется в ней со скоростью c в направлении O_1x_1 и остается на месте в координатах xOy .

Благодаря зеркальной симметрии расщепляемой полосы $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-h, h)$ исходная задача распадается на симметричную (задача А) и косимметричную (задача Б). Эти задачи можно сформулировать в виде двух задач для верхней полосы $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (0, h)$ при смешанных граничных условиях

для обеих задач

$$\sigma_y(x, h) = \tau_{xy}(x, h) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (1.1)$$

для задачи А

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= -P_1 \delta(x + \xi), \quad x \in (-\infty, 0); \quad v(x, 0) = 0, \quad x \in (0, +\infty) \\ \tau_{xy}(x, 0) &= 0, \quad x \in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \quad (1.2)$$

для задачи Б

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= P_2 \delta(x + \xi), \quad x \in (-\infty, 0); \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, +\infty) \\ \sigma_y(x, 0) &= 0, \quad x \in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $P_1 \geq 0$ и $P_2 \geq 0$ – величины сжимающих нормальных и направленных против оси Ox касательных сосредоточенных сил, приложенных к берегам трещины в точке $x = -\xi$, $y = 0$; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Кроме того, ставятся некоторые волновые условия при $x = -\infty$ и условия непересечения берегов трещины $v(x, 0) \geq 0$, $x < 0$ в задаче А. При рассмотрении задач расщепления А и Б должно выполняться условие ограниченности энергии упругих деформаций в окрестности вершины трещины. В задаче расслоения А необходимы ограниченность сжимающих нормальных напряжений $\sigma_y(0, 0) \leq 0$ и отсутствие растягивающих напряжений $\sigma_y(x, 0) > 0$ при $x > 0$.

2. Общее решение. Решение строится при помощи функций Папковича–Нейбера в интегралах Лапласа [4]

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[p\Phi(p, y) + \frac{2}{(a^2 - b^2)p} \Psi'(p, y) \right] e^{px} dp \quad (2.1)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\Phi'(p, y) - \frac{2}{a^2 - b^2} \Psi(p, y) \right] e^{px} dp \quad (2.2)$$

$$\Phi(p, y) = A \cos apy + B \sin apy, \quad \Psi(p, y) = C \cos bpy + D \sin bpy \quad (2.3)$$

$$a = \sqrt{1 - c^2 c_1^{-2}}, \quad b = \sqrt{1 - c^2 c_2^{-2}}, \quad c_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}, \quad c_2^2 = \mu\rho^{-1} \quad (2.4)$$

c_1, c_2 – скорости волн сжатия и сдвига.

Воспользовавшись формулами Коши и подставив функции (2.1) – (2.4) в основные условия (1.1) – (1.3), получим общие для задач А и Б формулы

$$u_k(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L G(p) U_k(p, y) e^{px} dp, \quad k = 1, 2, \dots, 5 \quad (2.5)$$

$$U_1(p, y) = p(As_a + Bs_a) + \frac{2b}{a^2 - b^2}(-Cs_b + Dc_b) \quad (2.6)$$

$$U_2(p, y) = ap(-As_a + Bc_a) - \frac{2}{a^2 - b^2}(Cc_b + Ds_b) \quad (2.7)$$

$$U_3(p, y) = 2\mu p \left[ap(-As_a + Bc_a) - \frac{1+b^2}{a^2 - b^2}(Cc_b + Ds_b) \right] \quad (2.8)$$

$$U_4(p, y) = p \left\{ p[\lambda(1 - a^2) + 2\mu](As_a + Bs_a) + \frac{4b\mu}{a^2 - b^2}(-Cs_b + Dc_b) \right\} \quad (2.9)$$

$$U_5(p, y) = -\mu p \left[p(1 + b^2)(As_a + Bs_a) + \frac{4b}{a^2 - b^2}(-Cs_b + Dc_b) \right] \quad (2.10)$$

где $U_k(p, y)$ – трансформанты Лапласа перемещений $u(x, y) = u_1(x, y)$, $v(x, y) = u_2(x, y)$ и напряжений $\tau_{xy}(x, y) = u_3(x, y)$, $\sigma_x(x, y) = u_4(x, y)$, $\sigma_y(x, y) = u_5(x, y)$, $G(p)$ – произвольная функция, $c_r = \cos rpy$, $s_r = \sin rpy$.

В симметричной задаче А

$$A = (1 + b^2)(4ab - c_+)p^{-1}, \quad B = (1 + b^2)d_-p^{-1} \quad (2.11)$$

$$C = a(a^2 - b^2)d_-, \quad D = a(a^2 - b^2)[c_- + (1 + b^2)^2] \quad (2.12)$$

В кососимметричной задаче Б

$$A = -4bd_+p^{-1}, \quad B = 4b[c_- + (1 + b^2)^2]p^{-1} \quad (2.13)$$

$$C = (a^2 - b^2)(1 + b^2)(c_+ - 4ab), \quad D = (a^2 - b^2)(1 + b^2)d_+ \quad (2.14)$$

Здесь

$$\alpha_{\pm} = [4ab \pm (1 + b^2)^2]/2$$

$$c_{\pm} = \alpha_- \cos(a + b)ph \pm \alpha_+ \cos(a - b)ph$$

$$d_{\pm} = \pm \alpha_- \sin(a + b)ph - \alpha_+ \sin(a - b)ph$$

3. Однородные задачи. Полагая в смешанных условиях (1.2) и (1.3) $P_1 = P_2 = 0$ и подставляя вместо их трансформант соответственно функции (2.10), (2.7), (2.11), (2.12) и (2.8), (2.6), (2.13), (2.14), для однородных задач получим равенства

для задачи А

$$\sigma^+(p) = G(p)N_1(p), \quad v^-(p) = G(p)N_2(p), \quad p \in L \quad (3.1)$$

$$N_1(p) = 4\mu p \left(\alpha_-^2 \sin^2 \frac{a+b}{2} ph - \alpha_+^2 \sin^2 \frac{a-b}{2} ph \right), \quad N_2(p) = -a(1-b^2)d_- \quad (3.2)$$

для задачи Б

$$\tau^+(p) = G(p)N_3(p), \quad u^-(p) = G(p)N_4(p), \quad p \in L \quad (3.3)$$

$$N_3(p) = -2N_1(p), \quad N_4(p) = -2b(1-b^2)d_+ \quad (3.4)$$

Верхние индексы плюс и минус обозначают аналитичность трансформант функций $\sigma_y(x, 0)$, $\tau_{xy}(x, 0)$ и $v(x, 0)$, $u(x, 0)$ соответственно в правой $\text{Re } p > 0$ и левой $\text{Re } p < 0$ частях комплексной плоскости p . Исключив в (3.1) и (3.3) функции $G(p)$, получим уравнения Винера–Хопфа:

для задачи А

$$\sigma^+(p) = K(p)v^-(p), \quad K(p) = N_1(p)/N_2(p), \quad p \in L \quad (3.5)$$

для задачи Б

$$\tau^+(p) = K(p)u^-(p), \quad K(p) = N_3(p)/N_4(p), \quad p \in L \quad (3.6)$$

В данном случае представляют интерес те кусочно-однородные решения рассматриваемых задач, которые описывают упругие волны, распространяющиеся без затухания на бесконечность или из бесконечности. Очевидно, они порождаются только нулями функций N_k (3.2), (3.4), лежащими на мнимой оси. Изучим эти нули.

Поскольку величины a , b , $a-b$, α_{\pm} положительны, $\sin(a \pm b)ph > 0$ на мнимой оси $p = i\beta$ при $\beta > 0$; следовательно, функция $N_2(p)$ имеет простой нуль $p = 0$ и не имеет других чисто мнимых нулей при $\beta \in (-\infty, +\infty)$.

При $p = i\beta$, $\beta > 0$ функция $N_4(p)$ имеет, очевидно, только те же нули, что и функция $f(\beta) - \alpha_- \alpha_+^{-1}$, где

$$f(\beta) = \text{sh}(a-b)\beta h [\text{sh}(a+b)\beta h]^{-1}$$

Так как

$$(a \text{sh} 2b\beta h - b \text{sh} 2a\beta h)'_{\beta} = -4abh \text{sh}(a+b)\beta h \text{sh}(a-b)\beta h < 0, \quad \beta \in (0, \infty)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} (a \text{sh} 2b\beta h - b \text{sh} 2a\beta h) = 0$$

то

$$f'(\beta) = h(a \text{sh} 2b\beta h - b \text{sh} 2a\beta h) [\text{sh}(a+b)\beta h]^{-2} < 0, \quad \beta \in (0, \infty)$$

Следовательно, функции $f(\beta)$ и $f(\beta) - \alpha_- \alpha_+^{-1}$ монотонно убывают по β в интервале $(0, \infty)$. Согласно равенствам

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} f(\beta) = (a-b)(a+b)^{-1}, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} f(\beta) = 0$$

последняя функция на концах этого интервала принимает противоположные знаки:

$$f(0) - \frac{\alpha_-}{\alpha_+} = \frac{a(1-b^2)^2}{\alpha_+(a+b)} > 0, \quad f(\infty) - \frac{\alpha_-}{\alpha_+} = -\frac{\alpha_-}{\alpha_+} < 0$$

Таким образом, в интервале $(0, \infty)$ функции $f(\beta) - \alpha_- \alpha_+^{-1}$ и $N_4(i\beta)$ имеют единственный простой нуль $\beta = \beta_0$. Кроме этого, функция $N_4(p)$ на мнимой оси имеет простые нули $p = 0$ и, в силу ее нечетности, $p = -i\beta_0$.

Функцию $N_1(p)$ можно представить в виде произведения уже исследованных функций

$$N_1(p) = -\frac{2\mu p}{ab(1-b^2)^2} N_2\left(\frac{p}{2}\right) N_4\left(\frac{p}{2}\right)$$

Отсюда следует, что при одинаковых параметрах во всех $N_k(p)$ функции $N_1(p)$ и $N_3(p)$ имеют на мнимой оси два простых нуля $p = \pm 2i\beta_0$ и трехкратный нуль $p = 0$.

Функции $N_k(p)$ имеют также счетное множество комплексных и вещественных нулей $p = p_n (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$, расположенных симметрично относительно осей $\text{Re } p = 0, \text{Im } p = 0$. Опираясь на известную теорию [5], можно показать, что их асимптотика имеет вид

$$p_n = \frac{\pi n}{(a+b)h} + r_n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

где n – номер нуля в полуплоскости $\text{Re } p > 0$ в порядке неубывания модуля p_n , r_n – ограниченные по всем n и по модулю в общем случае комплексные числа.

Решение задачи (3.5) будем искать в виде произведения решений двух задач Римана [6]:

$$\sigma_j^+(p) = K_j(p) v_j^-(p), \quad j = 1, 2, \quad p \in L \tag{3.7}$$

$$\sigma^+(p) = \sigma_1^+(p) \sigma_2^+(p), \quad v^-(p) = v_1^-(p) v_2^-(p)$$

$$K_1(p) = H p \text{tg} p \text{tg} \pi(p - 2i\beta_0) \text{tg} \pi(p + 2i\beta_0), \quad K_2(p) = K(p)/K_1(p) \tag{3.8}$$

$$H = -2\mu \alpha_- [a(1-b^2)]^{-1}$$

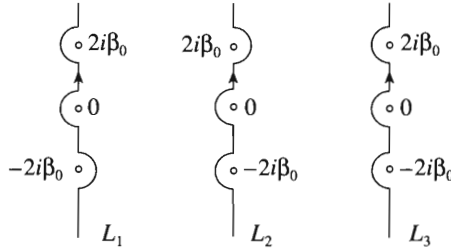
Здесь коэффициент $K_1(p)$ взят таким, что функция $K_2(p)$ на всей мнимой оси $p = i\beta$ удовлетворяет условию Гёльдера, четна, строго положительна и, следовательно, имеет индекс, равный нулю, $K_2(i\beta) \rightarrow 1$ при $\beta \rightarrow \pm\infty$. Факторизация $K_1(p)$ зависит от формы контуров L , которые будем выбирать так, чтобы они проходили по мнимой оси, огибая по дугам полуокружностей малого радиуса слева и справа точки $p = 0$ и $p = \pm 2i\beta_0$. Всего таких контуров $L_q (q = 1, 2, \dots)$ имеется 2^3 , первые три изображены на фиг.1.

Покажем, что решения на L_1, L_2 охватывают все кусочно–однородные решения, удовлетворяющие поставленным граничным и энергетическим условиям, решения на L_3 являются линейными комбинациями решений на L_1 и L_2 ; при $q > 3$ решения не существуют в классе заданных функций.

Положим $g_{r,q}(p) = g_r(p)$ при $p \in L_q$. Разлагая тангенсы в произведения гамма-функций, из соотношений (3.7) и (3.8) при $q = 1, 2$ получим

$$\sigma_{1,q}^+(p) = H [p - 2(-1)^q i\beta_0] Q(p), \quad v_{1,q}^-(p) = \{p^2 [p + 2(-1)^q i\beta_0] Q(-p)\}^{-1}$$

$$Q(p) = \frac{\Gamma(1/2 + p) \Gamma(1/2 + p - 2i\beta_0) \Gamma(1/2 + p + 2i\beta_0)}{\Gamma(1 + p) \Gamma(1 + p - 2i\beta_0) \Gamma(1 + p + 2i\beta_0)}$$



Фиг. 1

Отсюда следует, что

$$\sigma_1^+(p) \sim Hp^{-1/2}, \quad v_1^-(p) \sim p^{-3/2}, \quad p \rightarrow \infty; \quad \sigma_1^+(0) = (-1)^{q+1} iH\sqrt{\pi} \operatorname{th} 2\pi\beta_0 \quad (3.9)$$

Аналогично при $p \in L_3$

$$\sigma_1^+(p) = HQ(p), \quad v_1^-(p) = [p^2(p^2 + 4\beta_0^2)Q(-p)]^{-1}$$

$$\sigma_1^+(p) \sim Hp^{-3/2}, \quad v_1^-(p) \sim p^{-5/2}, \quad p \rightarrow \infty; \quad \sigma_1^+(0) = H\sqrt{\pi} \operatorname{th} 2\pi\beta_0(2\beta_0)^{-1}$$

На контуре, обходящем точку $p = 0$ слева, а точки $p = \pm 2i\beta_0$ справа, имеем

$$\sigma_1^+(p) = H(p^2 + 4\beta_0^2)Q(p); \quad \sigma_1^+(p) \sim Hp^{1/2}, \quad v_1^-(p) \sim p^{-1/2}, \quad p \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

На остальных четырех контурах, очевидно,

$$\sigma_1^+(p) \sim O(p^\gamma), \quad \gamma > 0, \quad p \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

Используя формулы Сохоцкого и вычисляя интегралы по дугам полуокружностей, равные полувычетам соответствующих функций, нетрудно показать, что контуры L_q при $j = 2$ и всех q можно сдвинуть на мнимую ось. Таким образом, каноническое решение σ_{20}^+ задачи (3.7), (3.8) при $j = 2$ не зависит от q и, с учетом свойств функции $K_2(p)$, определяется формулами Гахова [6]

$$\sigma_{20}^+(p) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln K_2(t)}{t-p} dt\right\}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_{20}^+(p) = 1, \quad \operatorname{Re} p > 0 \quad (3.12)$$

$$\sigma_{20}^+(i\beta) = \sqrt{K_2(i\beta)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln K_2(t)}{t-i\beta} dt\right\} \quad (3.13)$$

В силу нечетности подынтегральной функции (3.13) при $\beta = 0$

$$\sigma_{20}^+(0) = \sqrt{K_2(0)} = \frac{(1-b^2)\sqrt{ah}}{\operatorname{th} 2\pi\beta_0 \sqrt{2\pi\alpha_-}} > 0$$

Найдем общее решение $\sigma^+(p)$ задач А при $q = 1, 2, 3$. Согласно соотношениям (3.5) на контуре L_q выполняются равенства

$$\frac{\sigma^+(p)}{\sigma_0^+(p)} = \frac{v^-(p)}{v_0^-(p)}, \quad \sigma_0^+(p) = \sigma_1^+(p)\sigma_{20}^+(p), \quad v_0^-(p) = v_1^-(p)v_{20}^-(p) \quad (3.14)$$

В задаче расщепления в классе решений с ненулевой ограниченной энергией упругих деформаций в окрестности вершины трещины имеем

$$\sigma_y(x, 0) \sim K_I / \sqrt{2\pi x}, \quad x \rightarrow 0$$

где K_I – коэффициент интенсивности напряжений (КИН). По теореме абелева типа, отсюда следует, что

$$\sigma^+(p) \sim K_I / \sqrt{2p}, \quad p \rightarrow \infty \tag{3.15}$$

По формулам (3.9), (3.12) при $q = 1, 2$

$$\sigma_0^+(p) \sim Hp^{-1/2}, \quad p \rightarrow \infty \tag{3.16}$$

Поскольку отношение этих функций (3.14) равно постоянной, по обобщенной теореме Лиувилля общее решение имеет вид

$$\sigma^+(p) = M\sigma_0^+(p), \quad \operatorname{Re} p > 0 \tag{3.17}$$

где M – произвольная постоянная.

Аналогичные оценки для контура L_3 показывают, что $\sigma_0^+(p) = O(p^{-3/2})$, $p \rightarrow \infty$, следовательно,

$$\sigma^+(p) / \sigma_0^+(p) = O(p), \quad p \rightarrow \infty; \quad \sigma^+(p) = (Mp + N)\sigma_0^+(p), \quad \operatorname{Re} p > 0$$

M и N – произвольные постоянные.

В силу (3.10)–(3.12) для обеих задач расщепления и отслаивания при $q > 3$ и $p \rightarrow \infty$ имеем

$$\sigma^+(p) / \sigma_0^+(p) = O(p^\gamma), \quad \gamma < 0$$

Отсюда по теореме Лиувилля $\sigma^+(p) \equiv 0$, следовательно, нетривиальные решения рассматриваемых задач при $q > 3$ не существуют.

Из общих решений $\sigma^+(p)$ по формулам (3.1) определяются функции

$$G(p) = \sigma^+(p) / N_1(p), \quad \operatorname{Re} p > 0; \quad G(p) = v^-(p) / N_2(p), \quad \operatorname{Re} p < 0$$

и соответствующие решения (2.5) – (2.12).

Представим эти решения при $x < 0$ в виде рядов по вычетам в нулях функции $N_1(p)$. Замыкая контуры L_1, L_2 направо полуокружностями большого радиуса, получим

$$\begin{aligned} u_k(x, y) = u_{kq}(x, y) &\equiv \frac{M}{2\pi i} \int_{L_q} \frac{\sigma_{0q}^+(p)}{N_1(p)} U_k(p, y) e^{px} dp = \\ &= M \left\{ \frac{\sigma_{0q}^+(0)r(y)}{\mu h(1-b^2)} \delta_{1k} + \frac{\sigma_{0q}^+(0)x + \sigma_{0q}^{+*}(0)}{\mu h(1-b^2)} \delta_{2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sigma_{0q}^+(a_n)}{N_1'(a_n)} U_k(a_n, y) e^{a_n x} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\sigma_{0q}^+(\bar{a}_n)}{N_1'(\bar{a}_n)} U_k(\bar{a}_n, y) e^{\bar{a}_n x} \varepsilon_n \right] - \frac{\sigma_{0q}^+(2(-1)^{q+1}i\beta_0)}{N_1'(2(-1)^{q+1}i\beta_0)} U_k(2(-1)^{q+1}i\beta_0, y) \times \\ &\left. \times (\cos 2\beta_0 x + i(-1)^{q+1} \sin 2\beta_0 x) \right\} \tag{3.18} \end{aligned}$$

Здесь

$$r(y) = -y + [4a^2 - (a^2 + 1)(b^2 + 1)]h\alpha^{-1}$$

$$\sigma_{02}^+(0) = -\sigma_{01}^+(0) = i\mu\sqrt{2h\alpha}a^{-1}, \quad \sigma_{02}^{+*}(0) = -\sigma_{01}^{+*}(0) + \frac{\sigma_{01}^+(0)}{i\beta_0}$$

$$\sigma_{01}^+(2i\beta_0) = 4i\beta_0 HQ(2i\beta_0)\sqrt{K_2(2i\beta_0)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln K_2(t)}{t - 2i\beta_0} dt\right\}$$

$$\sigma_{02}^+(-2i\beta_0) = \overline{\sigma_{01}^+(2i\beta_0)}, \quad \alpha = 4a^2 - (1 + b^2)^2$$
(3.19)

δ_{qk} – символ Кронекера; если a_n – комплексное число, то $\varepsilon_n = 1$, если a_n – вещественное число, то $\varepsilon_n = 0$, $\text{Re} a_n > 0$; звездочкой обозначена производная по p , черточкой – комплексное сопряжение.

Первые два слагаемых в правой части равенства (3.18) – вычеты в нуле – определяют полиномиальное решение (незатухающую волну), в котором перемещение $u(x, y)$ – ограничено, $u(x, y)$ растет линейно по x , $\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0$. Вычеты в точках $p = \pm 2i\beta_0$ – это незатухающие тригонометрические упругие волны, ряд определяет волны, экспоненциально убывающие по x при $x \rightarrow -\infty$. КИН в соответствии с соотношениями (3.15) – (3.17) независимо от $q = 1, 2$ выражается формулой

$$K_I = -M \frac{2\sqrt{2}\mu\alpha}{a(1 - b^2)}$$
(3.20)

$K_I > 0$ при $M < 0$; $K_I \rightarrow K_I^0 = -2\sqrt{2}M\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}$ при $c \rightarrow 0$.

Рассмотрим асимптотику реальных волн при $x \rightarrow -\infty$. Складывая и вычитая решения (3.18) с множителем $1/2$ при $q = 1, 2$, получим соответственно

$$u_{k+}(x, y) = M \frac{\sigma_{01}^+(0)}{2i\beta_0\mu h(1 - b^2)} \delta_{2k} - M \text{Re} T_k(x, y)$$
(3.21)

$$u_{k-}(x, y) = \frac{M}{\mu h(1 - b^2)} \{-i\sigma_{01}^+(0)r(y)\delta_{1k} + [-i\sigma_{01}^+(0)x + \text{Im}\sigma_{01}^{+*}(0)]\delta_{2k}\} - M \text{Im} T_k(x, y)$$
(3.22)

$$T_k(x, y) = \frac{\sigma_{01}^+(2i\beta_0)}{N_1'(2i\beta_0)} U_k(2i\beta_0, y) (\cos 2\beta_0 x + i \sin 2\beta_0 x)$$

При этом решение $u_{k+}(x, y)$ имеет КИН (3.20), для $u_{k-}(x, y)$ $K_I = 0$.

Первое слагаемое в правой части равенства (3.21) – положительная постоянная величина, ибо, согласно (3.20), в данной задаче расщепления $K_I > 0$ для $M < 0$, второе слагаемое пропорционально величине $\cos(2\beta_0 x + \phi)$, где ϕ – некоторый сдвиг по фазе. Отсюда следует, что периодически функция $u(x, 0)$ на определенных промежутках x может принимать отрицательные значения, и тогда берега трещины взаимно пересекаются. Таким образом, асимптотика (3.21) и соответствующее полное решение (3.18), исходя из требований механики, должны быть проверены на условие $u(x, 0) > 0$.

Решение $u_{k-}(x, y)$, в котором $K_I = 0$, относится к задаче расслаивания. При больших x , за счет второго слагаемого в правой части равенства (3.22), величина $u(x, 0) > 0$, если

$M < 0$, и берега не пересекаются. Для произвольных x необходима дополнительная проверка решения.

Исследуем потоки энергии, переносимые незатухающими волнами. Вычислим вначале поток энергии полиномиальной волны (P -волны) (3.22), возбуждаемой на $-\infty$. Так как в ней

$$\frac{\partial u^P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v^P}{\partial x} = -M \frac{i\sigma_{01}^+(0)}{\mu h(1-b^2)}, \quad \tau_{xy}^P = \sigma_x^P = \sigma_y^P = 0 \quad (3.23)$$

то в сечении $x = \text{const} < 0$, $y \in (-h, h)$ поток определяется только кинетической энергией скоростей перемещений полосы

$$E^P = \rho c \int_0^h \left[\left(\frac{\partial u^P}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^P}{\partial t} \right)^2 \right] dy$$

и согласно соотношениям (3.23), (3.19) находим

$$E^P = 2M^2 \frac{\mu c \alpha_-}{a(1-b^2)} \quad (3.24)$$

Из выражения (3.20) имеем

$$M = -K_I \frac{a(1-b^2)}{2\sqrt{2}\mu\alpha_-} \quad (3.25)$$

Подставив выражение (3.25) в соотношение (3.24), получим равенство, связывающее поток энергии и КИН,

$$E^P = K_I^2 \frac{2ac(1-b^2)}{4\mu\alpha_-}$$

которое совпадает с формулой Кострова – Никитина – Флитмана [7] для потока, вытекающего из вершины трещины при расщеплении упругой области в стационарном режиме. Поскольку функция $N_2(p)$ не имеет чисто мнимых нулей, при $x \rightarrow +\infty$ незатухающих волн, а значит, и потока на $+\infty$ в полосе нет. Учитывая, что при этом $K_I = 0$ и, следовательно, общий поток в вершину при расслаивании, определяемый решением (3.22), равен нулю, можно заключить, исходя из закона сохранения потока энергии и из условий на гранях полосы, что поток E^P полиномиальной волны компенсируется встречным потоком энергии E^T уединенной тригонометрической волны (T -волны) (3.22) и энергии E^{PT} взаимодействия этих волн. Эти потоки могут быть найдены по формуле [8]

$$E = -2 \int_0^h \left[\sigma_{i1} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sigma_{ij} u_{i,j} \right) c \right] dy \quad (3.26)$$

где первое слагаемое в квадратных скобках (в тензорных обозначениях) определяет мощность внешней нагрузки, приложенной к торцу полосы и движущейся в направлении x со скоростью $\partial u/\partial t$, второе и третье слагаемые учитывают кинетическую и внутреннюю энергию деформаций соответственно. Поскольку в силу соотношений (3.26), (3.23) и (3.19)

$$E^{PT} = -2\rho c \int_0^h \frac{\partial v^P}{\partial t} \frac{\partial v^T}{\partial t} dy = 2M\mu c \sqrt{\frac{2\alpha_-}{ah}} \int_0^h \frac{\partial v^T}{\partial x} dy$$

потоки E^P и E^{PT} содержат только кинетическую составляющую. Практически ее нельзя задать, не деформируя полосу на $-\infty$. Поэтому механическая трактовка решения состоит в следующем. В задаче расслаивания на $-\infty$ задаются на торцах полос напряжения σ_x^T и τ_{xy}^T . Вызываемый ими поток энергии E^T полностью компенсируется встречным потоком кинетической энергии E^P в полосе, как твердом теле, и кинетической энергией взаимодействия волн E^{PT} . Нагрузка на торцах полос $x = \text{const}$, $y \in (0, h)$ и $y \in (-h, 0)$ приводит к их разбеганию, пропорциональному x . Решение не имеет аналога в квазистатическом случае, где нагрузка на торцах полос вызывает перемещения $u(x, y)$ в виде полинома третьей степени от x .

Для определения произвольной постоянной M требуется дополнительное условие, но полученное решение (3.22) не может быть реализовано самостоятельно ни при каких M . В нем, очевидно, не выполняется необходимое в задаче расслаивания неравенство: $\sigma_y(x, 0) < 0$ при любом $x > 0$. Однако если задана какая-либо сжимающая пригрузка на полосу, то M можно найти из различных механических условий: типа $\sigma_y(x, 0) \leq \sigma_c$ при $x > 0$, где σ_c – минимальное допустимое сжимающее напряжение. В задаче расщепления при $x > 0$ допускается любое напряжение $\sigma_y(x, 0)$, но при использовании выражения (3.21) возникает проблема пересечения берегов трещины на $-\infty$, что требует дополнительной проверки.

Зная величину K_{IC} – предельный для данного материала КИН, можно найти M . Из условия разрушения Ирвина $K_I = K_{IC}$ и из выражения (3.20) имеем

$$M = -K_{IC} \frac{a(1-b^2)}{2\sqrt{2}\mu\alpha_-} \quad (3.27)$$

При $c \rightarrow 0$ величина $M \rightarrow -K_{IC}(\lambda + 2\mu)/[2\sqrt{2}\mu(\lambda + \mu)]$. Если задана амплитуда

$$-M \geq K_{IC}(\lambda + 2\mu)/[2\sqrt{2}\mu(\lambda + \mu)]$$

то соответствующую скорость можно найти из формулы (3.27) как алгебраического уравнения.

T -волны (3.21) и (3.22) в сечении $x = x_0 < 0$ могут быть представлены в виде

$$u_{k+}^T(x, y) = -M \text{Re}[(A_k + iB_k)(\cos 2\beta_0 x + i \sin 2\beta_0 x)] \quad (3.28)$$

$$u_{k-}^T(x, y) = -M \text{Im}[(A_k + iB_k)(\cos 2\beta_0 x + i \sin 2\beta_0 x)] \quad (3.29)$$

где A_k и B_k – некоторые функции β_0 и y . В сечении $x = x_0 + \pi(4\beta_0)^{-1}$ вторая волна имеет вид

$$u_{k-}^T = -M(A_k \cos 2\beta_0 x_0 - B_k \sin 2\beta_0 x_0)$$

и совпадает с первой. Так как потоки энергии в промежутках $x \in (-\infty, 0)$ и $x \in (0, \infty)$ остаются постоянными, поток второй волны в сечении $x = x_0 + \pi(4\beta_0)^{-1}$ будет тот же, что при $x = x_0$, следовательно, потоки энергии T -волн (3.28), (3.29) одинаковы.

Рассмотрим кососимметричную задачу Б. Учитывая свойства функций $N_3(p)$, $N_4(p)$ и исходя из прежних принципов, уравнение (3.6) разобьем на две задачи Римана

$$\tau_j^+(p) = K_j(p)u_j^-(p), \quad j = 1, 2, \quad p \in L \quad (3.30)$$

$$\tau^+(p) = \tau_1^+(p)\tau_2^+(p), \quad u^-(p) = u_1^-(p)u_2^-(p)$$

$$K_1(p) = H_1 p \operatorname{tg} \pi p \frac{\operatorname{tg} \pi(p - 2i\beta_0) \operatorname{tg} \pi(p + 2i\beta_0)}{\operatorname{tg} \pi(p - i\beta_0) \operatorname{tg} \pi(p + i\beta_0)}, \quad K_2(p) = \frac{K(p)}{K_1(p)}$$

$$K_1(p) \sim H_1 \pi \frac{\operatorname{th}^2 2\pi\beta_0}{\operatorname{th}^2 \pi\beta_0} p^2, \quad p \rightarrow 0; \quad K_1(i\beta) \sim -H_1 |\beta|, \quad \beta \rightarrow \pm\infty; \quad H_1 = \frac{2\mu\alpha_-}{b(1-b^2)}$$

$$K_2(0) = \lim_{p \rightarrow 0} K_2(p) = \frac{\alpha b h \operatorname{th}^2 \pi\beta_0}{2\pi\alpha_- \operatorname{th}^2 2\pi\beta_0} > 0; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} K_2(p) = 1$$

$$\tau_{20}^+(p) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln K_2(t)}{t-p} dt\right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \tau_{20}^+(p) = 1 \tag{3.31}$$

$$\tau_{20}^+(i\beta) = \sqrt{K_2(i\beta)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln K_2(t)}{t-i\beta} dt\right\}, \quad \tau_{20}^+(0) = \sqrt{K_2(0)}$$

Здесь $\tau_{20}^+(p)$ – каноническое решение второй задачи Римана (3.30). Функция $K_2(i\beta)$ на мнимой оси строго положительна, следовательно, ее индекс равен нулю. Контуры L_q , проходя по мнимой оси, огибают слева и справа теперь пять точек: $p = 0, p = \pm i\beta_0, p = \pm 2i\beta_0$. Соответственно решения можно искать на 2^5 контурах L_q ($q = 4, 5, \dots$).

Факторизуя тангенсы на контуре L_4 (фиг. 2, а) получим каноническое решение первой задачи Римана

$$\tau_{14}^+(p) = H_1 Q_1(p) (p^2 + 4\beta_0^2) (p^2 + \beta_0^2)^{-1}, \quad u_{14}^-(p) = [p^2 Q_1(-p)]^{-1}$$

$$Q_1(p) = Q(p) \frac{\Gamma(1+p-i\beta_0)\Gamma(1+p+i\beta_0)}{\Gamma(1/2+p-i\beta_0)\Gamma(1/2+p+i\beta_0)}$$

причем

$$\tau_{14}^+(p) \sim H_1 p^{-1/2}, \quad p \rightarrow \infty; \quad \tau_{14}^+(0) = 2H_1 \sqrt{\pi} \operatorname{th} 2\pi\beta_0 / \operatorname{th} \pi\beta_0 > 0 \tag{3.32}$$

Таким образом,

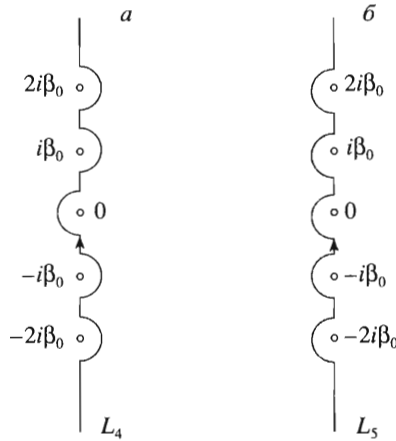
$$\tau_{04}^+(0) = \tau_{14}^+(0) \sqrt{K_2(0)} = \frac{2\mu}{1-b^2} \sqrt{\frac{2h\alpha\alpha_-}{b}}$$

Аналогично на контуре L_5 (фиг. 2, б)

$$\tau_{15}^+(p) = H_1 Q_1(p), \quad \tau_{15}^+(p) \sim H_1 p^{-1/2}, \quad p \rightarrow \infty, \quad \tau_{15}^+(0) = \frac{1}{4} \tau_{14}^+(0) \tag{3.33}$$

Построим общее решение уравнения (3.6) на контурах L_4 и L_5 . Можно показать, что на других контурах решение либо не существует, либо является линейной комбинацией уже полученных. На контурах L_4 и L_5 имеем

$$\frac{\tau^+(p)}{\tau_{0q}^+(p)} = \frac{u^-(p)}{u_{0q}^-(p)}, \quad \tau_{0q}^+(p) = \tau_{1q}^+(p) \tau_{20}^+(p), \quad u_{0q}^-(p) = u_{1q}^-(p) u_{20}^-(p) \tag{3.34}$$



Фиг. 2

Поскольку решение исходной задачи, которому в окрестности края трещины соответствует ограниченная энергия, представимо в виде $\tau_{xy}(x, 0) \sim K_{II}/\sqrt{2\pi x}$, $x \rightarrow 0$, то $\tau^+(p) \sim K_{II}/\sqrt{2p}$, $p \rightarrow \infty$, и, согласно соотношениям (3.31) – (3.33), при $p \rightarrow \infty$ отношения (3.34) постоянны. Отсюда по обобщенной теореме Лиувилля получим

$$\tau^+(p) = M_q \tau_{0q}^+(p), \quad K_{II} = M_q \frac{2\sqrt{2}\mu\alpha_-}{b(1-b^2)}, \quad q = 4, 5 \quad (3.35)$$

где M_q – произвольные постоянные, K_{II} – КИН, с точностью до M_q не зависящий от q . Как и в случае трещины нормального отрыва, если заданы скорость c и характеристика разрушения материала K_{IIc} , равенство

$$M_q = K_{IIc} \frac{b(1-b^2)}{2\sqrt{2}\mu\alpha_-} \quad (3.36)$$

служит для вычисления M_q , если заданы K_{IIc} и M_q , из уравнения (3.36) можно найти c . Так как

$$K_{II}^0 = \lim_{c \rightarrow 0} K_{II} = M_q \frac{2\sqrt{2}\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$$

то предельно малая амплитуда нагрузок (при предельно малой скорости $c \rightarrow 0$) определяется формулой

$$M_q = K_{IIc} \frac{\lambda + 2\mu}{2\sqrt{2}\mu(\lambda + \mu)}$$

Рассмотрим вопросы, связанные с распространением волн и потоками энергии. Разлагая решение (2.5) в ряд по вычетам справа от L_4 , при $x < 0$ получим

$$u_{k4}(x, y) = \frac{M_4}{2\pi i} \int_{L_4} \frac{\tau_{04}^+(p)}{N_3(p)} U_k(p, y) e^{px} dp = -M_4 u_k^P(x, y) - M_4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tau_{04}^+(a_n)}{N_3'(a_n)} U_k(a_n, y) e^{a_n x} + \frac{\tau_{04}^+(\bar{a}_n)}{N_3'(\bar{a}_n)} U_k(\bar{a}_n, y) e^{\bar{a}_n x} \epsilon_n \right] \quad (3.37)$$

где

$$u_1^P(x, y) = \frac{1-b^2}{\alpha\mu h} [\tau_{0q}^+(0)x + \tau_{0q}^{+*}(0)], \quad u_2^P(x, y) = s(y)\tau_{0q}^+(0), \quad u_3^P(x, y) = 0$$

$$u_4^P(x, y) = 4(a^2 - b^2)(\alpha h)^{-1}\tau_{0q}^+(0), \quad u_5^P(x, y) = 0, \quad q = 4 \quad (3.38)$$

$$s(y) = \{a^2 + (1 - 2a^2 + b^2)[yh^{-1} - (1 - b^2)^{-1}]\}(\alpha\mu)^{-1}$$

Подставив выражения (3.38) в формулу (3.26), найдем мощность потока энергии уединенной P -волны, возбуждаемой на $-\infty$,

$$E_{4-}^P = 4K_{II4}^2 R, \quad R = \frac{bc(1-b^2)}{4\mu\alpha_-}$$

Поскольку она в четыре раза превосходит мощность потока в формуле Кострова – Никитина – Флитмана, соответствующего данному K_{II} и вытекающему через вершину трещины, из закона сохранения потока следует, что 3/4 этой мощности, минуя трещину, уходит на $+\infty$ с T -волной, определяемой вычетами в точках $p = \pm i\beta_0$

$$u_{k4+}^T(x, y) = 2M_4 \operatorname{Re} \left[\frac{u_{04}^-(i\beta_0)}{N_4^+(i\beta_0)} U_k(i\beta_0, y) (\cos \beta_0 x + i \sin \beta_0 x) \right], \quad k = 1, 2 \quad (3.39)$$

$$E_{4+}^T = 3K_{II}^2 R$$

Решение на контуре L_5 при $x \rightarrow -\infty$ включает в себя как P -волны (3.38), где $q = 5$,

$$\tau_{05}^+(0) = \frac{1}{4}\tau_{04}^+(0), \quad \tau_{05}^{+*}(0) = \frac{1}{4}\tau_{04}^{+*}(0)$$

так и T -волны

$$u_{k5-}^T(x, y) = -2M_5 \operatorname{Re} \left[\frac{\tau_{05}^+(2i\beta_0)}{N_3^+(2i\beta_0)} U_k(2i\beta_0, y) (\cos 2\beta_0 x + i \sin 2\beta_0 x) \right] \quad (3.40)$$

При $x \rightarrow +\infty$ оно, очевидно, распространяющихся волн не имеет.

Формируя линейные комбинации

$$u(x, y) = u_{15}(x, y) - \frac{1}{4}u_{14}(x, y), \quad v(x, y) = u_{25}(x, y) - \frac{1}{4}u_{24}(x, y) \quad (3.41)$$

при $M_4 = M_5$ получим решение, не содержащее P -волн. В нем на $-\infty$ возбуждается только T -волна (3.40) с частотой $2\beta_0$, которая переносит поток энергии мощностью

E_-^T и трансформируется за вершиной трещины в T -волну с частотой β_0

$$u_{k+}^T(x, y) = -\frac{1}{2}M_4 \operatorname{Re} \left[\frac{u_{04}^-(i\beta_0)}{N_4^+(i\beta_0)} U_k(i\beta_0, y) (\cos \beta_0 x + i \sin \beta_0 x) \right]$$

Согласно формуле (3.39), мощность ее потока

$$E_+^T = -\frac{3}{4}K_{II4}^2 R$$

КИН в этом решении выражается соотношением

$$K_{II} = K_{II5} - \frac{1}{4}K_{II4} = \frac{3}{4}K_{II4} = M_4 \frac{3\mu\alpha_-}{\sqrt{2b(1-b^2)}} \quad (3.42)$$

и, в силу формулы Кострова – Никитина – Флитмана, определяет мощность потока энергии, стекающей в вершину,

$$E_0 = \frac{9}{16}K_{II5}^2 R$$

Так как $E_-^T = E_0 + E_+^T$, то

$$E_-^T = -\frac{3}{16}K_{II5}^2 R$$

Последняя формула показывает, что в рассматриваемом решении поток мощностью $E_+^T < 0$, возбуждаемый при $x \rightarrow \infty$, движется в сторону вершины трещины, часть своей энергии $E_0 > 0$ он отдает на разрушение материала и стационарное движение трещины, оставшаяся энергия E_-^T уходит на $-\infty$.

Решениями (3.37) и (3.41) с уединенными P - и T -волнами на $-\infty$ удобно пользоваться при построении функции Грина.

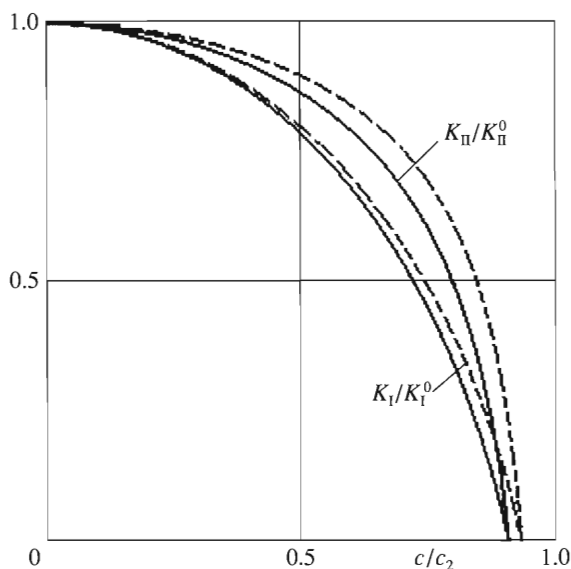
При заданной скорости c и величине $K_{II4} = K_{II5}$ формула (3.42) определяет амплитуду M_4 волны на $-\infty$, при заданных M_4 и K_{II5} – скорость распространения трещины.

Проведенное выше исследование приводит к естественно возникающему вопросу, обязательно ли поток энергии, идущий из $-\infty$ в квазистатических задачах, должен целиком вытекать из полосы через вершину трещины? Строго говоря, оправдать эту гипотезу можно только путем решения в каждом случае соответствующей краевой задачи, доказав, после исследования кусочно-однородных решений в волноводе, отсутствие в нем при $x \rightarrow +\infty$ незатухающих статических волн.

4. Заключение. Отметим основные результаты, полученные в работе. Решения однородных задач построены с учетом того, что поток энергии E^P , переносимый из $-\infty$ уединенной полиномиальной волной (решение (3.37),(3.38)), существенно превышает предельную величину E_C , поскольку большая часть энергии, минуя трещину, уходит с тригонометрической волной вдоль положительной полуоси на $+\infty$. При наличии в решении распространяющейся тригонометрической и полиномиальной волн, возбуждаемых на $-\infty$, составляющая потока энергии, генерируемая полиномиальной волной, связана с КИН соотношением, совпадающим с формулой Кострова – Никитина – Флитмана.

Показано, что из рассмотренных стационарных решений динамической задачи эластостатические решения не могут быть получены предельным переходом при $c \rightarrow 0$.

Найдены динамические КИН K_I и K_{II} в вершине трещины, распространяющейся по оси симметрии полосы с постоянной скоростью. На фиг.3 показана зависимость нормированных величин K_I/K_I^0 , K_{II}/K_{II}^0 (K_I и K_{II} определены формулами (3.20) и (3.35)) от нормированной скорости движения трещины c/c_2 . Рассматривались линейно-упругие материалы, моделирующие бетон ($E = 3.6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.2$, $\rho = 2.4$ т/м³) и скальный грунт ($E = 5 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0.35$, $\rho = 2.5$ т/м³). Результаты расчетов для указанных материалов изображены сплошной и штриховой линиями соответственно. При возрастании скорости от нуля до скорости волн Релея рассматриваемые величины, монотонно убывая, стремятся к нулю, что говорит о возможности ветвления трещины [9].



Фиг. 3

Получены критерии разрушения (3.27), (3.36), связывающие критический КИН со скоростью движения трещины и амплитудой распространяющихся волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение / Под ред. Либовица Г.М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 204–335.
2. Irwin G.R. Fracture mechanics // Structural Mechanics Proc. 1-th Symposium on Naval Structural Mech. Oxford etc.: Pergamon Press, 1960. P. 557–591.
3. Слепян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
4. Лащенков В.К. О стационарном движении упругих балок по границе изотропной упругой полосы // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 163–175.
5. Bellman R., Cooke K. Differential-Difference Equation. N.Y.; L.: Acad. Press, 1963 = Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
7. Костров Б.В., Никитин Л.В., Флитман Л.М. Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 112–125.
8. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамическая механика разрушения. М., Машиностроение, 1985. 263 с.
9. Yoffe E. The moving Griffith crack. Phil. Mag. Ser. 7. 1951. V. 42. № 330. P. 739–750.