УДК 539.374

© 2004 г. С. И. Сенашов

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СРЕДЫ МИЗЕСА СО СПИРАЛЬНО-ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Приведены серии точных решений уравнений пластичности Мизеса, которые обладают спирально-винтовой симметрией. Они могут быть использованы при анализе напряженно-деформированного состояния круглых стержней и труб, находящихся под действием внутреннего давления, осевой силы и крутящего момента.

При построении точных решений задач теории пластичности с условием текучести Мизеса в осесимметричном и пространственном случаях приходится обычно действовать обратным способом, т.е. сначала построить точное решение, а потом постараться подобрать для него конкретную физическую задачу. Тем не менее даже такой подход позволяет решить многие практически важные проблемы механики: делать оценки предельных нагрузок, строить поля напряжений и т.п. [1–5]. Число полученных таким образом решений остается весьма ограниченным [5]. И это замечание сорокалетней давности справедливо до сих пор. Малое количество решений не позволяет до конца изучить структуру уравнений, доказывать теоремы существования и единственности, тестировать численные расчеты, поэтому задача построения точных решений актуальна до сих пор.

К наиболее мощным методам решения задач обратными методами относится групповой анализ дифференциальных уравнений. Применение его сразу позволило построить новые классы точных решений уравнений пластичности с условием текучести Мизеса [6]; первой в этом направлении была работа [7].

Рассмотрим уравнения идеальной пластичности с условием текучести Мизеса в пространственном случае, записанные в цилиндрической системе координат r, z, θ. Введем новую переменную по формуле $\xi = z + k\theta$ и будем считать, что все компоненты вектора скорости u, υ, w и гидростатическое давление p зависят только от двух переменных: r и ξ. Уравнения в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{k}{r}\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \xi} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial \xi} + \frac{2S_r - S_\theta}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} + \frac{k}{r}\frac{\partial S_\theta}{\partial \xi} + \frac{\partial S_{\theta z}}{\partial \xi} + \frac{2S_{r\theta}}{r} = \frac{k}{r}\frac{\partial p}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{k}{r}\frac{\partial S_\theta}{\partial \xi} + \frac{\partial S_z}{\partial \xi} + \frac{S_{rz}}{r} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \tag{1}$$

$$S_r^2 + S_\theta^2 + S_z^2 + 2(S_{r\theta}^2 + S_{rz}^2 + S_{\theta z}^2) = 2k_s^2, \quad S_r + S_\theta + S_z = 0$$

$$S_r = \lambda u_r, \quad S_\theta = \lambda r^{-1}(k\upsilon_\xi + u), \quad S_z = \lambda\omega_\xi$$

$$2S_{r\theta} = \lambda(r^{-1}ku_\xi + r(r^{-1}\upsilon)_r), \quad 2S_{rz} = \lambda(\upsilon_\xi + \omega_r), \quad 2S_{\theta z} = \lambda(r^{-1}k\omega_\xi + \upsilon_\xi)$$

Здесь S_r, S_θ, S_z, $S_{r\theta}$, S_{rz}, $S_{\theta z}$ – компоненты тензора напряжений, k_s – предел текучести.

Система (1) описывает пластическое течение вещества при условии спиральной симметрии. Приведенные уравнения при $k = 0$ и $\upsilon = 0$ переходят в уравнения осесимметричной деформации и по сравнению с ними обладают более высокой степенью симметрии. Это дает возможность построить не только обобщение осесимметричных решений [6], но и решения, не имеющие осесимметричных аналогов.

Ищем решение системы (1) в виде

$$u = u(r)\sin\xi, \quad \upsilon = \upsilon(r)\cos\xi, \quad \omega = \omega(r)\cos\xi, \quad p = p(r, \xi)$$

Пусть $S_{r\theta} = S_{rz} = 0$, тогда оставшиеся компоненты девиатора тензора напряжений зависят только от одной переменной r. Если $p = p(r)$, то второе и третье уравнения системы (1) удовлетворяются тождественно, а первое служит для определения $p(r)$.

В этом случае для определения функций u, υ, ω из системы (1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ku + r\upsilon' - \upsilon = 0, \quad \omega' + u = 0, \quad ru' - k\upsilon + u - \omega = 0$$

которая сводится к уравнению Бесселя

$$r^2u'' + ru' + (r^2 + k^2 - 1)u = 0$$

Решая это уравнение, получим

$$u = C_1J_\nu + C_2Y_\nu, \quad \nu^2 = 1 - k^2$$

При $|k| \le 1$ функция u принимает вещественные значения; если же $|k| > 1$, то можно воспользоваться интегральным представлением функции Бесселя

$$J_\nu = \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)\pi^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\sin^{2\nu} t\,dt$$

учитывая только действительную часть.

Окончательно решение имеет вид (при $C_2 = 0$)

$$u = AJ_\nu\sin\xi, \quad \upsilon = -Ark\cos\xi\int_0^r J_\nu r^{-1}dr, \quad \omega = -A\cos\xi\int_0^r J_\nu dr$$

где J_ν – функция Бесселя мнимого аргумента, удовлетворяющая условию $J_\nu(0) = 0$ для всех $\nu > 0$, A – произвольная постоянная.

Для ненулевых компонент девиатора тензора напряжений и гидростатического давления получаем

$$S_r = -(1 + f)S_\theta, \quad S_\theta = k_s(1 + f + f^2 + \varphi^2)^{-1/2}, \quad S_z = fS_\theta$$
$$p = S_r - \int_a^r (2 + f)S_\theta r^{-1}dr, \quad S_{\theta z} = \varphi S_\theta; \quad f = \frac{S_z}{S_\theta}, \quad \varphi = \frac{S_{\theta z}}{S_\theta} \tag{2}$$

Это решение можно интерпретировать, в частности при $A > 0$, как пластическое течение круглой трубы, которая находится под действием внутреннего давления p, осевой силы N и крутящего момента M, причем

$$\sigma_r|_{r=a} = -p, \quad \sigma_r|_{r=b} = 0, \quad N = 2\pi\int_a^b \sigma_z r dr, \quad M = 2\pi\int_a^b S_{\theta z} r dr$$

где a и b – внутренний и внешний радиусы трубы. При $k = 0$, $\nu = 0$ это решение построено Хиллом [5].

Система уравнений (1) допускает алгебру Ли операторов с базисом

$$A_1 = \partial_\xi, \quad A_2 = \partial_\omega, \quad A_3 = \partial_p, \quad A_4 = u\partial_u + \upsilon\partial_\upsilon + \omega\partial_\omega, \quad A_5 = r\partial_\upsilon$$

Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли L_5 имеет вид

θ_1: $A_2 \pm A_5$, A_4, A_2, A_5

θ_2: $(A_2 \pm A_5, A_4)$, (A_2, A_4), (A_5, A_4), (A_2, A_5)

Здесь учтено, что операторы A_1, A_3 порождают центр алгебры Ли L_5.

Построенная оптимальная система подалгебр позволяет перечислить все различные, с точностью до преобразований симметрии, инвариантные решения уравнений (1).

Построим решение, инвариантное относительно подалгебры $A_4 - A_1$. Это решение следует искать в виде

$$u = u_0(r)e^\xi, \quad \upsilon = \upsilon_0(r)e^\xi, \quad \omega = \omega_0(r)e^\xi, \quad p = p_0(r)$$

Ниже везде нулевые индексы опущены.

Из уравнений (1) следует

$$S_{r\theta} = C_1/r^2, \quad S_{rz} = C_2/r$$

Если произвольные постоянные C_1, C_2 равны нулю, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ku' + r\upsilon' - \upsilon = 0, \quad \omega' + u = 0, \quad ru' + k\upsilon + u + \omega = 0 \tag{3}$$

Она сводится к уравнению Бесселя, решение которого имеет вид

$$u = AJ_\nu(r), \quad \nu^2 = 1 + k^2 \tag{4}$$

Считая, что функция u ограничена при $r = 0$ (иначе в выражение (4) добавляем функцию Макдональда), получаем

$$u = AJ_\nu, \quad \omega = -\int_0^r u\,dr, \quad k\upsilon = -r\omega - ru' - u$$

где J_ν – функция Бесселя мнимого аргумента, удовлетворяющая условию $J_\nu(0) = 0$ для всех $\nu > 0$, A – произвольная постоянная. Напряженное состояние описывается формулами (2). Механическая интерпретация – та же, что и в предыдущем случае.

Если положить $k = 0$, $\nu = 0$, то $M = 0$ и получаем осесимметричное решение [8], которое описывает пластическое течение цилиндра со свободной от напряжения боковой поверхностью.

Напряженное состояние (2) получается, если ищем решение уравнений (1) в виде (при условии $S_{r\theta} = S_{rz} = 0$)

$$u = u_0(r)\operatorname{sh}\xi, \quad \upsilon = \upsilon_0(r)\operatorname{ch}\xi, \quad w = w_0(r)\operatorname{ch}\xi, \quad p = p_0(r)$$

Это приводит к системе (3), и решение имеет точно такую же механическую интерпретацию, как и указанная выше.

Инвариантное решение на подгруппе $A_1 + \alpha A_2 + \alpha A_5$ ищем в виде

$$u = f(r), \quad \omega - \alpha\xi = \varphi(r), \quad \upsilon - \gamma\xi r = \psi(r), \quad p = p(r), \quad \gamma = \beta/\alpha$$

Подставим эти соотношения в систему (1).

Из уравнения несжимаемости имеем (C_1 и C_2 постоянные)

$$f = C_1 r + C_2 r^{-1}, \quad C_1 = (\alpha + \gamma k)/2$$

Пусть $\varphi = \psi = 0$, тогда $S_{r\theta} = S_{rz} = 0$, а остальные компоненты девиатора тензора напряжений имеют вид

$$S_r = \lambda(C_1 - C_2 r^{-2}), \quad S_\theta = \lambda(k\gamma + C_1 + C_2 r^{-2}), \quad S_z = \alpha\lambda, \quad 2S_{\theta z} = \lambda(\alpha k r^{-1} + \gamma r)$$

$$p = S_r + \int_a^r \lambda(-k\gamma - 2C_2 r^{-2})dr$$

$$2k_s^2\lambda^{-2}r^4 = \left\lfloor (C_2 - C_1 r^2)^2 + [(k\gamma + C_1)r^2 + C_2]^2 + (\gamma r^3 + akr)/2 + a^2 r^4 \right\rfloor$$

Это решение описывает предельное состояние трубы под действием постоянного внутреннего давления p_0, осевой силы N и крутящего момента M. При $k = 0$, $v = 0$ оно переходит в осесимметричное решение [3] или решение [1], описывающее сжатие пластического слоя коаксиальными цилиндрическими поверхностями.

Известно [9], что геликоидальные поверхности $z + k\theta = \text{const}$ в скручиваемом пластическом стержне обладают рядом замечательных свойств: они служат границей между жесткой и пластической областями и являются наиболее вероятными поверхностями разрушения. Построим решение, которое описывает пластическое течение с такими поверхностями.

Ищем решение системы уравнений (1) в виде

$$u = 0, \quad \upsilon = -r\varphi(\xi), \quad \omega = k\varphi(\xi), \quad p = p(r) \tag{5}$$

После подстановки выражений (5) в систему (1) получаем точное решение

$$u = 0, \quad \upsilon = -r\varphi(\xi), \quad \omega = k\varphi(\xi), \quad \rho = \rho(r)$$

$$\begin{gathered}
\sigma_r = S_r - p = 2\chi k_s \operatorname{arctg}\frac{r}{k} + c \\
\sigma_\theta = S_\theta - p = -2\chi k_s \frac{rk}{r^2 + k^2} + \sigma_r \\
\sigma_z = S_z - p = 2\xi k_s \frac{rk}{r^2 + k^2} + \sigma_r \\
S_{r\theta} = S_{rz} = 0, \quad S_{\theta z} = \chi k_s \frac{r^2 - k^2}{r^2 + k^2}; \quad \chi = \operatorname{sign}\varphi'(\xi)
\end{gathered} \tag{6}$$

где φ – произвольная гладкая функция, c – произвольная постоянная.

Это решение можно использовать для описания пластического течения круглого стержня радиуса R, который находится под действием растягивающего усилия и крутящего момента. Пусть боковая поверхность стержня свободна от напряжений, потребуем выполнение условия $S_{\theta z} = 0$. Отсюда получаем $k = \pm R$. На торце $z = 0$ задана скорость $w = R\varphi(R\theta)$. Поскольку функция φ гладкая, получаем, что здесь она 2π-периодическая, а значит, имеет по крайней мере одну точку, где $\varphi' = 0$, т.е. существует геликоидальная поверхность ξ_0, такая, что $\varphi'(\xi_0) = 0$. Из формул (6) следует, что вдоль этой поверхности в стержне возникает жесткая область в соответствии с рассуждениями [9], согласно которым поверхности $z + k\theta = \text{const}$ могут разделять жесткие и пластические области. Эти же поверхности являются и наиболее вероятными поверхностями разрушения.

Из формул (6) следует, что, выбирая функцию φ, можно задавать различные пластические течения, в частности можно описать технологический процесс продавливания материала между двумя геликоидальными поверхностями $\xi = C_1$, $\xi = C_2$. Этот процесс может служить основой, например, для изготовления сверл.

Укажем еще одно точное решение уравнений (1)

$$u = \xi(cr^{-1} - (a+kb)r)$$

$$v = \xi br + k(a+kb)r\ln r + ckr^{-1}/2 + c_1 r$$

$$\omega = \xi^2 a + (a+kb)r^2/2 - c\ln r + c_2$$

где a, b, c, c_1, c_2 – произвольные постоянные. Компоненты скоростей деформации даются выражениями

$$e_r = -\xi(cr^{-2} + (a+kb)), \quad e_\theta = 2kb\xi + \xi(cr^{-1} + (a+kb)), \quad e_z = 2\xi a$$

$$e_{r\theta} = e_{rz} = 0, \quad e_{\theta z} = 2ak\xi r^{-1} + 2kr\xi$$

В этом случае существует только одна жесткая область, она задается уравнением $\xi = 0$. Указанное решение можно использовать для описания пластического течения круглой трубы, разрезанной вдоль образующей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
2. *Ишлинский А.Ю.* Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринеля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
3. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 382 с.
4. *Prager W.* Tree – dimensional plastic flow under uniform stress // Rov. Faculte Sci., Univ. Istanbul. 1954. 19. 1. P. 23–27 = *Прагер В.* Трехмерное пластическое течение при однородном напряженном состоянии // Механика. Период. сб. перев. и обзоров иностр. статей. 1958. № 3. С. 95–98.
5. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950 = *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
6. *Olszak W., Mróz Z., Perzyna P.* Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity. L.: Pergamon Press, 1963 = *Ольшак В., Мруз З., Пежина П.* Современное состояние теории пластичности. М.: Мир, 1964. 243 с.
7. *Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 142 с.
8. *Аннин Б.Д.* Одно точное решение осесимметричной задачи идеальной пластичности // ПМТФ. 1973. № 2. С. 171–172.
9. *Tomas T.Y.* Plastic Flow and Fracture in Solids. N.Y.; L.: Acad. Press, 1961 = *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.

Красноярск
e-mail: senashov@kgtei.kts.ru

Поступила в редакцию
13.III.2003