УДК 539.3: 539.4

© 2004 г. Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

РАВНОНАПРЯЖЕННОЕ АРМИРОВАНИЕ КИРХГОФОВСКИХ ПЛАСТИН ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Сформулирована задача равнонапряженного армирования кирхгофовских пластин волокнами постоянного поперечного сечения при упругопластическом поперечном изгибе. Проведен качественный анализ системы разрешающих уравнений. Показана возможность существования нескольких альтернативных решений поставленной задачи, которыми можно управлять за счет перераспределения плотностей армирования. Получено аналитическое решение рассматриваемой задачи в случае цилиндрического изгиба прямоугольной удлиненной пластины. Проведены расчеты для бороалюминия, показывающие, что несущая способность равнонапряженно-армированных пластин при упругопластическом изгибе в несколько раз выше, чем при чистоупругом изгибе.

Одним из наиболее естественных прочностных критериев рационального проектирования композитных конструкций служит требование равнонапряженности волокон вдоль их траекторий, что позволяет наиболее полно использовать несущую способность высокопрочной арматуры и создавать надежные конструкции даже при использовании низкопрочного связующего. В силу актуальности проблемы равнонапряженного армирования (РА) ей посвящены многие работы, например [1–5] и др. Однако до настоящего времени при исследовании задачи РА изгибаемых пластин предполагалось, что все фазы композиции ведут себя линейно-упруго [4, 5], т.е. не учитывалось реальное поведение фазовых материалов за пределом текучести и не была проведена оценка эффективности использования несущей способности реальных волокон при рассмотрении задачи РА в упругой постановке. В связи с этим цель настоящей работы – математическая формулировка и качественный анализ задачи РА пластин при упругопластическом поперечном изгибе, а также сопоставление на конкретных примерах несущей способности РА-пластин при чистоупругом и упругопластическом изгибах.

1. Исходные уравнения задачи равнонапряженного армирования пластин при упругопластическом поперечном изгибе. Будем рассматривать чистоупругий и упругопластический поперечный изгиб кирхгофовских пластин постоянной толщины H, состоящих из изотропной матрицы и внедренной в нее тонковолокнистой однородной высокомодульной арматуры постоянного поперечного сечения. Предполагается, что пластина по толщине имеет регулярную и квазиоднородную структуру, тепловое воздействие не учитывается, прогибы считаются малыми. Все фазы композиции могут вести себя линейно-упруго или неупруго. Путь нагружения пластины предполагается квазистатическим и несложным, поэтому для описания нелинейно-упругого или неупругого поведения фазовых материалов используются соотношения теории упругопластических деформаций [6, 7]. В качестве критерия рационального проектирования выступает требование равнонапряженности волокон всех семейств во всей области G, занимаемой пластиной в плане.

Пластина рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат $x_1 x_2 z$; плоскость $x_1 x_2$ совмещена со средней плоскостью пластины до изгиба, а ось z перпендикулярна срединной плоскости. Пластина армирована N семействами волокон (возможно, различной физической природы), которые уложены в плоскостях, параллельных плоскости x_1x_2.

Для формулировки задачи равнонапряженного армирования (РА) поперечно изгибаемых кирхгофовских пластин необходимо использовать известные уравнения равновесия в перерезывающих силах F_i и моментах M_{ij} [7]

$$F_{1,1}+F_{2,2}+p = 0, \quad M_{i1,1}+M_{i2,2} = F_i-m_i, \quad i = 1,2 \tag{1.1}$$

связь между средними напряжениями в композиции σ_{ij} и моментами M_{ij}

$$M_{ij} = \int\limits_{-H/2}^{H/2} \sigma_{ij}z dz, \quad i,j = 1,2 \tag{1.2}$$

соотношения между изгибными деформациями ε_{ij} и прогибом w

$$\varepsilon_{ij} = -zw_{,ij}, \quad i,j = 1,2 \quad (|z| \le H/2) \tag{1.3}$$

а также выражения для осредненных напряжений σ_{ij} через напряжения в фазовых материалах (используется модель армированного слоя с "одномерными" волокнами [8])

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = a\sigma_{\mathrm{m}ij}+\sum_k \sigma_k\omega_k l_{ki}l_{kj} \quad (i,j = 1,2) \\ l_{k1} = \cos\psi_k, \quad l_{k2} = \sin\psi_k, \quad a = 1-\sum_k \omega_k \end{gathered} \tag{1.4}$$

где p, m_i – распределенная поперечная нагрузка и внешние изгибающие моменты соответственно; $\sigma_{\mathrm{m}ij}$, σ_k – напряжения в связующей матрице и арматуре k-го семейства соответственно; ω_k, ψ_k – интенсивность и угол (отсчитываемый от направления x_1) армирования волокном k-го семейства; суммирование производится от 1 до N; нижний индекс i после запятой означает частное дифференцирование по переменной x_i и т.п.

Будем полагать, что диаграммы растяжения и сжатия фазовых материалов совпадают и имеют линейное упрочнение. Тогда связь между напряжением σ_k и продольной деформацией ε_k арматуры k-го семейства имеет вид [8]

$$\sigma_k = \begin{cases} E_k\varepsilon_k, & |\varepsilon_k| \le \varepsilon_{sk} = \sigma_{sk}/E_k \\ \operatorname{sign}(\varepsilon_k)\sigma_{sk}+E_{sk}(\varepsilon_k-\operatorname{sign}(\varepsilon_k)\varepsilon_{sk}), & \varepsilon_{sk} < |\varepsilon_k| \le \varepsilon_{*k} \equiv \varepsilon_{\mathrm{p}k} \end{cases} \tag{1.5}$$

где σ_{sk} – предел текучести материала волокон k-го семейства; E_k, E_{sk} – модули упругости и упрочнения материала волокон k-го семейства; ε_{sk}, ε_{*k} – деформации, соответствующие пределу текучести и временному сопротивлению $\sigma_{\mathrm{p}k}$ материала волокон k-го семейства соответственно.

Связь между деформациями пластины ε_{ij} и деформациями волокон ε_k в рамках модели с одномерными волокнами определяется соотношениями [8]

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{11}\cos^2\psi_k+\varepsilon_{22}\sin^2\psi_k+\varepsilon_{12}\sin 2\psi_k, \quad k = 1,2,\ldots,N \tag{1.6}$$

Согласно соотношениям (1.3), (1.5), (1.6) максимальные по модулю значения напряжений в арматуре достигаются на лицевых поверхностях пластины ($z = \pm H/2$), поэтому условие РА для однозначности целесообразно задавать только на верхней стороне пластины ($z = H/2$):

$$\sigma_k(x_1,x_2,H/2) = \sigma_{0k} = \mathrm{const}, \quad k = 1,2,\ldots,N \tag{1.7}$$

где σ_{0k} – значение напряжения в волокнах k-го семейства на верхней стороне пластины (на нижней стороне $\sigma_k(x_1, x_2, -H/2) = -\sigma_{0k} = \mathrm{const}$).

Если $|\sigma_{0k}| \le \sigma_{sk}$, то из соотношений (1.3), (1.5)–(1.7) вытекает

$$\sigma_k(x_1, x_2, z) = 2z\sigma_{0k}/H \quad (|z| \le H/2) \tag{1.8}$$

Если же $|\sigma_{0k}| > \sigma_{sk}$, то из тех же соотношений следует

$$\sigma_k(x_1, x_2, z) = \begin{cases} E_k z e_k = 2z\,\mathrm{sign}(\sigma_{0k})\sigma_{sk}/h_k, & |z| \le h_k/2 \\ \mathrm{sign}(z\sigma_{0k})\sigma_{sk} + E_{sk}[ze_k - \mathrm{sign}(z\sigma_{0k})\varepsilon_{sk}], & h_k/2 < |z| \le H/2 \end{cases} \tag{1.9}$$

где $h_k/2$ – абсолютные величины аппликат границ между упругим и неупругим слоями в арматуре k-го семейства (т.е. при $|z| \le h_k/2$ волокна k-го семейства ведут себя упруго, а при $h_k/2 < |z| \le H/2$ неупруго); e_k – параметр искривления срединной плоскости пластины в направлении армирования волокном k-го семейства, который согласно соотношениям (1.3), (1.6) имеет выражение

$$e_k = -w_{,11}\cos^2\psi_k - w_{,22}\sin^2\psi_k - w_{,12}\sin 2\psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.10}$$

С другой стороны, из условия РА (1.7) и выражений (1.3), (1.5), (1.6), (1.10) следует

$$e_k = \begin{cases} 2\sigma_{0k}/(HE_k) = \mathrm{const}, & |\sigma_{0k}| \le \sigma_{sk} \\ \dfrac{2}{HE_{sk}}[\sigma_{0k} - \mathrm{sign}(\sigma_{0k})(\sigma_{sk} - E_{sk}\varepsilon_{sk})] = \mathrm{const}, & |\sigma_{0k}| > \sigma_{sk} \end{cases} \tag{1.11}$$

Таким образом, вместо условия РА в форме (1.7) можно использовать геометрическое условие

$$e_k = \mathrm{const}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.12}$$

Значение e_k определяется выражениями (1.10), (1.11).

Величины h_k в формулах (1.9) в силу линейного распределения деформаций по толщине пластины (1.3) и по своему смыслу определяются равенствами

$$h_k = \begin{cases} H = \mathrm{const}, & |\sigma_{0k}| \le \sigma_{sk} \\ 2\varepsilon_{sk}/|e_k| = \mathrm{const}, & |\sigma_{0k}| > \sigma_{sk} \end{cases} \tag{1.13}$$

т.е. в силу условия РА (1.11) $h_k = \mathrm{const}$ всюду в области G.

Линейно-упругое поведение материала связующего определяется законом Гука

$$\sigma_{\mathrm{m}ii} = Ea_1(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}), \quad \sigma_{\mathrm{m}ij} = Ea_2\varepsilon_{ij}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2 \quad (|z| \le h/2) \tag{1.14}$$

а интенсивность деформаций ε_0 при этом равна [7]:

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3(\varepsilon_{11}^2 - a_4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2) + \varepsilon_{12}^2} \tag{1.15}$$

где

$$a_1 = \frac{1}{1-\nu^2}, \quad a_2 = \frac{1}{1+\nu}, \quad a_3 = \frac{1-\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2}, \quad a_4 = \frac{1-4\nu+\nu^2}{1-\nu+\nu^2} \tag{1.16}$$

E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона связующего.

Нелинейно-упругое и неупругое поведение материала связующего определяется основными соотношениями теории упругопластических деформаций [6, 7], упрощенными допущением о несжимаемости материала (не меняя существа задачи, учет сжимаемости при неупругом поведении связующего изгибаемой пластины связан со значительными трудностями даже в простом случае деформирования материала без упрочнения [6, 7]). В случае использования диаграммы деформирования с линейным упрочнением связь между напряжениями σ_{mij} и деформациями ε_{ij} за пределами линейной упругости при отсутствии дилатации имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{mii} &= \frac{2}{3\varepsilon}[\sigma_s + E_*(\varepsilon - \varepsilon_*)](2\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{jj}) \\ \sigma_{mij} &= \frac{2}{3\varepsilon}[\sigma_s + E_*(\varepsilon - \varepsilon_*)]\varepsilon_{ij}; \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{1.17}$$

где σ_s, E_* – предел текучести и модуль упрочнения материала связующего, известные из диаграммы деформирования [6], ε_* – деформация, соответствующая σ_s на диаграмме деформирования, интенсивность деформаций ε в предположении о несжимаемости материала связующего имеет выражение [7]

$$\varepsilon^2 = 4(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{12}^2)/3 \tag{1.18}$$

Введем в рассмотрение положительные величины e_0, e, составленные из параметров искривления $w_{,ij}$ срединной плоскости пластины таким же образом, как и интенсивности ε_0, ε (1.15), (1.18) соответственно

$$e_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3(w_{,11}^2 - a_4 w_{,11} w_{,22} + w_{,22}^2) + w_{,12}^2} \tag{1.19}$$

$$e^2 = 4(w_{,11}^2 + w_{,11}w_{,22} + w_{,22}^2 + w_{,12}^2)/3 \tag{1.20}$$

Тогда из соотношений (1.3), (1.15), (1.18)–(1.20) следует

$$\varepsilon_0 = |z| e_0(x_1, x_2), \quad \varepsilon = |z| e(x_1, x_2) \tag{1.21}$$

При упругопластическом напряженном состоянии в связующем в крайних слоях пластины, примыкающих к лицевым поверхностям, материал связующего ведет себя неупруго, а средний слой остается еще упругим. Следовательно, если $h/2$ – абсолютная величина аппликат границ между упругим и неупругим слоями в связующем, то интенсивность напряжений

$$\sigma < \sigma_s (0 \le |z| < h/2), \qquad \sigma \ge \sigma_s \quad (h/2 \le |z| \le H/2) \tag{1.22}$$

В упругом слое связующего интенсивность напряжений равна [6, 7]

$$\sigma = 3G_m\varepsilon_0 = 3G_m|z|e_0, \quad G_m = E/[2(1+\nu)] \tag{1.23}$$

где G_m – модуль сдвига связующей матрицы. На границах $|z| = h/2$ между упругим и неупругим слоями в связующем $\sigma = \sigma_s$, поэтому из выражений (1.23) следует

$$h_*/2 = \sigma_s/(3G_m e_0) \tag{1.24}$$

откуда

$$h = \begin{cases} H = \text{const}, & h_* \ge H \\ h_*, & h_* < H \end{cases} \tag{1.25}$$

Соотношения (1.19), (1.24), (1.25) определяют толщину h упругого слоя в связующем через вторые производные от прогиба, причем в общем случае $h \ne \text{const}$.

Окончательно напряжения в связующем $\sigma_{\mathrm{m}ij}$ при учете выражений (1.3), (1.14), (1.17), (1.21) задаются соотношениями

$$\sigma_{\mathrm{m}ii} = -zEa_1(w_{,ii} + \nu w_{,jj}), \quad \sigma_{\mathrm{m}ij} = -zEa_2 w_{,ij} \quad (|z| \le h/2) \tag{1.26}$$

$$\sigma_{\mathrm{m}ii} = -A(z)(2w_{,ii} + w_{,jj}), \quad \sigma_{\mathrm{m}ij} = -A(z)w_{,ij}, \quad j = 3-i, \quad i = 1,2 \tag{1.27}$$
$$A(z) = 2[zE_* + \operatorname{sign}(z)(\sigma_s - E_*\varepsilon_*)/e]/3, \quad h/2 < |z| \le H/2$$

Величины a_1, a_2 определены формулами (1.16).

Подставляя в выражения (1.2) соотношения (1.4) и учитывая представления (1.9), (1.13), (1.25)–(1.27), в пластине с РА-структурой получим следующие выражения для моментов через прогиб пластины:

$$M_{ij} = aM_{\mathrm{m}ij} + \sum_k \omega_k l_{ki} l_{kj} \times$$
$$\times [E_k e_k h_k^3 + E_{sk} e_k (H^3 - h_k^3) + 3\operatorname{sign}(\sigma_{0k})(\sigma_{sk} - E_{sk}\varepsilon_{sk})(H^2 - h_k^2)]/12, \quad i,j = 1,2 \tag{1.28}$$

$$M_{\mathrm{m}ij} = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{\mathrm{m}ij} z\,dz, \quad i,j = 1,2$$
$$M_{\mathrm{m}ii} = -[Ea_1 h^3 (w_{,ii} + \nu w_{,jj}) + B(2w_{,ii} + w_{,jj})]/12 \tag{1.29}$$
$$M_{\mathrm{m}ij} = -(Ea_2 h^3 + B)w_{,ij}/12, \quad j = 3-i, \quad i = 1,2$$
$$B = 2[(H^3 - h^3)E_*/3 + (\sigma_s - E_*\varepsilon_*)(H^2 - h^2)/e]$$

Если $|\sigma_{0k}| \le \sigma_{sk}$, $h_* \ge H$ (см. (1.13), (1.24), (1.25)), то в соотношениях (1.28), (1.29) следует принять $h_k = h = H$, после чего получим выражения для моментов в случае чистоупругого изгиба пластины с равнонапряженной арматурой.

К уравнениям равновесия (1.1), выражениям для моментов (1.28), (1.29), условиям РА (1.10)–(1.12) и уравнению (1.24), определяющему при учете соотношений (1.19), (1.25) толщину упругого слоя в связующем, необходимо добавить условия постоянства поперечных сечений волокон [3]

$$(\omega_k \cos\psi_k)_{,1} + (\omega_k \sin\psi_k)_{,2} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.30}$$

Пусть область G ограничена контуром Γ, тогда на одной части этого контура (обозначим ее Γ_p) могут быть заданы статические граничные условия по изгибающему моменту [7]

$$\begin{gathered} M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + 2M_{12}n_1n_2 = M_n \\ n_1 = \cos\beta, \quad n_2 = \sin\beta, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \end{gathered} \tag{1.31}$$

и приведенной поперечной силе Кирхгофа

$$\begin{gathered} F_1 n_1 + F_2 n_2 + \partial_\tau(M_{n\tau}) = F_{nz}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \\ M_{n\tau} = (M_{22} - M_{11})n_1n_2 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2) \\ \partial_\tau(M_{n\tau}) = -n_2 M_{n\tau,1} + n_1 M_{n\tau,2} \end{gathered} \tag{1.32}$$

а на другой части (обозначим ее Γ_u) – кинематические граничные условия

$$w(\Gamma_u) = w_0, \quad w_{,1}n_1 + w_{,2}n_2 = \theta_n, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_u \tag{1.33}$$

где M_n, F_{nz} – изгибающий момент и приведенная поперечная сила Кирхгофа, заданные на Γ_p; w_0, θ_n – прогиб на Γ_u и производная от прогиба по направлению внешней нормали к контуру, задаваемой углом β; ∂_τ – производная вдоль контура. (На контуре Γ могут быть заданы и смешанные из (1.31)–(1.33) граничные условия, например условия свободного опирания.)

На той части контура Γ (обозначим ее Γ_k), на которой волокна k-го семейства входят в область G, необходимо задать краевые условия для интенсивностей армирования [4]

$$\omega_k(\Gamma_k) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.34}$$

где ω_{0k} – заданные на Γ_k функции.

Решение задачи РА изгибаемых пластин должно удовлетворять физическим [1–3]

$$0 \le \omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad \sum_k \omega_k \le \omega_* \le 1 \tag{1.35}$$

и прочностным [6–8]

$$\begin{gathered} \sigma(x_1, x_2, \pm H/2) \le \sigma_{\mathrm{m}}, \quad |\sigma_{0k}| \le \sigma_k^* = \min(\sigma_k^-, \sigma_k^+) \\ \sigma_{\mathrm{m}} > 0, \quad \sigma_k^\pm > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N \end{gathered} \tag{1.36}$$

ограничениям, где $\omega_* = \mathrm{const}$ – предельно допустимая суммарная интенсивность армирования, σ_{m} – предел прочности связующей матрицы, равный пределу текучести σ_s при чистоупругом изгибе или временному сопротивлению $\sigma_* \equiv \sigma_{\mathrm{p}}$ при упругопластическом изгибе, σ_k^-, σ_k^+ – пределы прочности волокон k-го семейства при сжатии и растяжении соответственно (при воздействии сжимающих нагрузок может возникнуть некоторая форма неустойчивости волокон, поэтому в общем случае $\sigma_k^- \ne \sigma_k^+$).

На границах Γ_e^p между чистоупругой G_e и упругопластической G_p зонами в связующем, т.е. при $h_* = H$ (см. (1.24)), имеют место общеизвестные статические и кинематические условия сопряжения решения [6, 7]. Из первого прочностного ограничения (1.36) при $\sigma_{\mathrm{m}} = \sigma_s$ в силу линейного распределения напряжений $\sigma_{\mathrm{m}ij}$ по толщине пластины в чистоупругой зоне в связующем следует, что указанная граница определяется уравнением [7]

$$\Gamma_e^p\colon M_{\mathrm{m}11}^2 - M_{\mathrm{m}11}M_{\mathrm{m}22} + M_{\mathrm{m}22}^2 + 3M_{\mathrm{m}12}^2 = H^4\sigma_s^2/36 = \mathrm{const} \tag{1.37}$$

Таким образом, для формулировки задачи РА изгибаемых пластин волокнами постоянного поперечного сечения необходимо использовать уравнения и соотношения (1.1), (1.10)–(1.12), (1.24), (1.25), (1.28)–(1.30); на контуре Γ, ограничивающем область G, могут быть заданы статические (1.31), (1.32), кинематические (1.33) или смешанные из (1.31)–(1.33) граничные и краевые (1.34) условия; граница между чистоупругой и упругопластической зонами в связующем при непрерывном изменении на ней РА-структуры определяется уравнением (1.37). Решение задачи РА должно удовлетворять физическим (1.35) и прочностным (1.36) ограничениям, причем в силу гипотез Кирхгофа и предположения о совпадении диаграмм растяжения и сжатия фазовых материалов неравенства (1.36) достаточно удовлетворить на лицевых поверхностях пластины ($z = \pm H/2$).

2. Система разрешающих уравнений задачи равнонапряженного армирования пластин при упругопластическом изгибе и ее качественный анализ. Для получения уравнения равновесия РА-пластины в прогибах необходимо соотношения (1.28), (1.29) подставить в уравнения (1.1) и исключить из рассмотрения поперечные силы F_i. В результате с учетом условия постоянства поперечных сечений волокон (1.30) будем иметь следующее уравнение равновесия:

$$H^2\sum_k \sigma_{*k}[\partial_n(\psi_k, A_k) - A_k^2/\omega_k] - C(w, \boldsymbol{\omega}, h) =$$
$$= -12(p + m_{1,1} + m_{2,2}) \quad (\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}) \tag{2.1}$$

где

$$A_k = \omega_k \partial_s(\psi_k, \psi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{2.2}$$

$$\partial_s(\gamma, \cdot) = \cos\gamma\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} + \sin\gamma\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2}, \quad \partial_n(\gamma, \cdot) = -\sin\gamma\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} + \cos\gamma\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \tag{2.3}$$

A_k – введенные для удобства функции, имеющие смысл кривизны траекторий РА k-го семейства, умноженной на интенсивность армирования этого семейства; γ – некоторый угол; в зонах упругопластического поведения материала связующего дифференциальный оператор C имеет вид

$$C(w, \boldsymbol{\omega}, h) = \sum_{i=1,2} \{a[Ea_1(w_{,ii} + \nu w_{,jj})h^3 + B(2w_{,ii} + w_{,jj})]\}_{,ii} +$$
$$+ 2[a(Ea_2h^3 + B)w_{,12}]_{,12}, \quad j = 3 - i \tag{2.4}$$

в зонах чистоупругого поведения материала связующего оператор C упрощается и получается из (2.4) при $h = H$; a_1, a_2, e, h имеют выражения (1.16), (1.20), (1.24), (1.25) соответственно; σ_{*k} – постоянная величина, имеющая выражение

$$\sigma_{*k} = E_k e_{*k} h_{*k}^3 + E_{sk} e_{*k}(1 - h_{*k}^3) + 3\,\mathrm{sign}(\sigma_{0k})(E_k - E_{sk})\varepsilon_{sk}(1 - h_{*k}^2) = \mathrm{const} \tag{2.5}$$

Величины h_{*k}, e_{*k} в (2.4), (2.5) определяются следующими соотношениями (см. (1.11), (1.13)):

$$e_k = \frac{e_{*k}}{H}$$
$$e_{*k} = \begin{cases} 2\sigma_{0k}/E_k = \mathrm{const}, & |\sigma_{0k}| \le \sigma_{sk} \\ 2[\sigma_{0k} - \mathrm{sign}(\sigma_{0k})(\sigma_{sk} - E_{sk}\varepsilon_{sk})]/E_{sk} = \mathrm{const}, & |\sigma_{0k}| > \sigma_{sk} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$h_k = h_{*k}H, \quad h_{*k} = \begin{cases} 1, & |\sigma_{0k}| \le \sigma_{sk} \\ 2\varepsilon_{sk}/|e_{*k}| = \mathrm{const} < 1, & (|\sigma_{0k}| > \sigma_{sk}) = E_k\varepsilon_{sk} \end{cases} \tag{2.7}$$

Из равенств (2.5)–(2.7) следует, что при чисто-упругом деформировании арматуры k-го семейства ($|\sigma_{0k}| \le \sigma_{sk}$) величина σ_{*k} в (2.1) является удвоенным напряжением в этой арматуре на верхней стороне пластины ($z = H/2$).

К уравнениям (2.1), (2.2), (1.24) следует добавить условия РА волокон k-го семейства (1.10), (1.11), которые запишем с учетом выражений (2.2), (2.3)

$$\begin{gathered}\partial_s(\psi_k, \partial_s(\psi_k, w)) - A_k\partial_n(\psi_k, w)/\omega_k = -e_{*k}/H = \text{const}\\ k = 1, 2, \ldots, N\end{gathered} \tag{2.8}$$

Чтобы окончательно замкнуть систему (2.1), (2.2), (1.24), (2.8), следует использовать условие постоянства поперечных сечений волокон (1.30), которое при учете обозначений (2.3) примет вид

$$\partial_s(\psi_k, \omega_k) + \omega_k\partial_n(\psi_k, \psi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{2.9}$$

Для записи статических граничных условий (1.31), (1.32) в прогибах нужно из них за счет соотношений (1.1), (1.28), (1.29) исключить силовые факторы F_i, M_{ij}. В результате с учетом условия постоянства поперечных сечений волокон (1.30) на кромке Γ_p получим статические граничные условия по моменту

$$H^2\sum_k \sigma_{*k}\omega_k\cos^2(\psi_k - \beta) - D_M(w, \boldsymbol{\omega}, h) = 12M_n, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \tag{2.10}$$

и по приведенной силе Кирхгофа

$$\begin{gathered}-H^2\sum_k \sigma_{*k}A_k\sin(\psi_k - \beta) + H^2\sum_k \sigma_{*k}\partial_\tau[\omega_k\sin 2(\psi_k - \beta)]/2 -\\ - C_F(w, \boldsymbol{\omega}, h) - D_F(w, \boldsymbol{\omega}, h) = 12(F_{nz} - m_1n_1 - m_2n_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p\end{gathered} \tag{2.11}$$

где в подобластях G_p с упругопластическим поведением материала связующего дифференциальные операторы D_M, C_F, D_F имеют выражения

$$\begin{gathered}D_M = \sum_{i=1,2} a[W_i + B(2w_{,ii} + w_{,jj})]n_i^2 + 2aw_{,12}(Ea_2h^3 + B)n_1n_2\\ C_F = \sum_{i=1,2}\{a[W_i + B(2w_{,ii} + w_{,jj})]\}_{,i}n_i + \sum_{i=1,2}[a(Ea_2h^3 + B)w_{,ij}]_{,i}n_j\\ D_F = \partial_\tau\left\{n_1n_2a\sum_{i=1,2}(-1)^i[W_i + B(2w_{,ii} + w_{,jj})] +\right.\\ \left. + a(n_1^2 - n_2^2)(Ea_2h^3 + B)w_{,12}\right\}, \quad W_i = Ea_1(w_{,ii} + \nu w_{,jj})h^3; \quad j = 3 - i\end{gathered} \tag{2.12}$$

в подобластях G_e с чистоупругим поведением материала связующего дифференциальные операторы D_M, C_F, D_F получаются из выражений (2.12) при $h = H$; ∂_τ – оператор дифференцирования вдоль контура Γ_p, причем

$$\partial_\tau(\cdot) = \partial_n(\beta, \cdot) \tag{2.13}$$

Кинематические граничные условия (1.33) при учете обозначений (2.3) примут вид

$$w(\Gamma_u) = w_0, \quad \partial_s(\beta, w) = \theta_n \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_u \tag{2.14}$$

Краевые условия (1.34) остаются без изменения.

Граница Γ_e^p между чистоупругой и упругопластической зонами в связующем определяется уравнением в прогибах

$$H^2E^2\left\{a_1^2\sum_{i=1,2}(w_{,ii}+\nu w_{,jj})^2-a_1^2\prod_{i=1,2}(w_{,ii}+\nu w_{,jj})+3a_2^2w_{,12}^2\right\} = 4\sigma_s^2, \quad j = 3-i \quad (2.15)$$

которое получается из (1.37) при учете выражений (1.29).

Таким образом, в подобластях G_p с упругопластическим поведением материала связующего система уравнений задачи РА изгибаемых пластин состоит из $3N+2$ уравнений (2.1), (2.2), (1.24), (2.8), (2.9) и замкнута относительно следующих неизвестных функций: прогиба w, параметров РА A_k, ψ_k, ω_k и толщины упругого слоя в связующем $h = h_*$. В подобластях G_e с чистоупругим поведением материала связующего ($h = H$) система разрешающих уравнений состоит из $3N+1$ уравнений (2.1), (2.2), (2.8), (2.9) и замкнута относительно неизвестных функций w, A_k, ψ_k, ω_k ($k = 1, 2,\ldots, N$). Для однозначного интегрирования системы разрешающих уравнений на кромках должны быть заданы граничные и краевые условия (2.10), (2.11), (2.14), (1.34). Граница между зонами чистоупругого и упругопластического поведения материала связующего при непрерывном изменении на ней РА-структуры определяется уравнением (2.15).

Полученная система уравнений задачи РА (2.1), (2.2), (1.24), (2.8), (2.9) и соответствующие ей статические граничные условия (2.10), (2.11) показывают, что подзадачи определения прогиба и параметров РА связаны и решать их необходимо совместно, причем в целом система уравнений и статические граничные условия существенно нелинейны. Нелинейность имеет двойное происхождение: во-первых, “структурная” нелинейность (так как параметры РА A_k, ψ_k, ω_k, определяющие структуру материала, суть неизвестные функции), во-вторых, физическая нелинейность в зонах упругопластического поведения материала связующего. Все это значительно усложняет качественный анализ краевой задачи РА изгибаемых пластин и разработку методов ее решения.

Характеристическое уравнение разрешающей системы имеет вид

$$P(x_2')\prod_{k=1}^{N}(\sin\psi_k - x_2'\cos\psi_k) = 0 \quad (2.16)$$

Производная $x_2' = dx_2/dx_1$ задает направление характеристики; $P(x_2')$ – полином четвертого порядка относительно x_2', коэффициенты которого зависят от значений неизвестных функций $w_{,ij}$, ω_k, ψ_k, h. В подобластях с чистоупругим поведением материала связующего, в которых в уравнении (2.4) следует принять $h = H$, полином $P(x_2')$ определяется выражением

$$P(x_2') = HaEa_1(1+x_2'^2)^2\prod_{k=1}^{N}\gamma_k +$$

$$+\sum_k(\sigma_{m11}x_2'^2-2\sigma_{m12}x_2'+\sigma_{m22}+\varsigma_k^2\sigma_{*k})\omega_k\eta_k\varsigma_k\prod_{l=1}^{N}\gamma_l, \quad l\neq k$$

где

$$\varsigma_k = \sin\psi_k - x_2'\cos\psi_k, \quad \eta_k = \cos\psi_k + x_2'\sin\psi_k$$

$$\gamma_k = (w_{,22}-w_{,11})\sin2\psi_k + 2w_{,12}\cos2\psi_k; \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

σ_{mij} имеют выражения (1.26) при задании $z = H/2$. В подобластях с упругопластическим поведением материала связующего выражение для полинома $P(x_2')$ становится чрезвычайно громоздким в силу сложного выражения оператора C в (2.4) при $h \neq H$, поэтому не будем его здесь приводить.

Сомножители, стоящие в уравнении (2.16) под знаком произведения, указывают на то, что система разрешающих уравнений имеет N действительных характеристик, совпадающих с траекториями РА. Полином $P(x_2')$ в зависимости от значений неизвестных функций $w_{,ij}$, ω_k, ψ_k, h (т.е. в зависимости от коэффициентов) может иметь разное количество действительных корней в разных точках области G. Следовательно, система разрешающих уравнений задачи РА изгибаемых пластин является квазилинейной системой смешанно-составного типа [9].

Решение задачи РА пластин при упругопластическом изгибе обладает теми же свойствами и особенностями, что и при чистоупругом изгибе [4]. Обезразмерив систему разрешающих уравнений и граничные условия по аналогии с использованной ранее процедурой [5], при безразмерных операторах C, C_F, D_M, D_F в соотношениях (2.1), (2.10), (2.11) можно выделить малый параметр $\lambda = E/E_1$. После этого для решения задачи РА можно использовать методы теории возмущений, аналогичные примененным ранее [5].

Остановимся на вопросе о неединственности решения задачи РА изгибаемых пластин. С одной стороны, задача РА обладает произволами, связанными с краевыми условиями для интенсивностей армирования (1.34), и чем больше количество используемых семейств волокон, тем больше количество этих произволов. Варьируя функции ω_{0k} в краевых условиях (1.34), можно получать пучки решений задачи РА, из которых можно выбирать проекты с наиболее приемлемыми механическими, весовыми или технологическими свойствами. С другой – в силу существенной нелинейности статических граничных условий (2.10), (2.11) и условий равнонапряженности арматуры (2.8) относительно функций ψ_k задача РА может иметь несколько решений даже при фиксированных функциях ω_{0k} в краевых условиях (1.34), что дополнительно расширяет спектр решений задачи. (Возможность существования нескольких альтернативных решений задачи РА при фиксированных входных данных объясняется тем, что эта задача относится к разряду обратных задач механики деформируемого твердого тела [10].)

3. Равнонапряженное армирование пластин при цилиндрическом изгибе. Исследуем случай цилиндрического изгиба прямоугольной удлиненной пластины, позволяющий получить решение задачи РА в аналитической форме. Для этого рассмотрим прямоугольную удлиненную пластину (в идеале бесконечной длины) ширины D, ориентированную вдоль оси Ox_2. Предполагая, что в продольном направлении нагрузка, закрепление и армирование пластины не изменяются, и пренебрегая локальными торцевыми эффектами, получим, что решение задачи РА будет зависеть только от переменной x_1. Уравнения (2.1), (2.9) при этом можно проинтегрировать, после чего система разрешающих уравнений задачи РА примет вид

$$12M_{11}(x_1) \equiv H^2\sum_k \sigma_{*k}\omega_k\cos^2\psi_k - \left(1-\sum_k \omega_k\right)[b_1(h)w'' + b_2(h)\operatorname{sign}(w'')] = 12P(x_1) \quad (3.1)$$

$$\omega_k\cos\psi_k = \omega_{*k} = \text{const} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

$$w''\cos^2\psi_k = -e_k/H = \text{const} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

$$h(x_1) = \begin{cases} H = \text{const}, & h_* \geq H \\ h_*, & h_* < H \end{cases}, \quad h_* = \frac{2\sigma_s}{Ea_1\sqrt{1-\nu+\nu^2}|w''|} \tag{3.4}$$

где

$$P(x_1) = -\int_0^{x_1}\int_0^{x_1} p(x_1)dx_1dx_1 + P_1x_1 + P_0, \quad m_1 = m_2 = 0$$
$$b_1(h) = Ea_1h^3 + 4E_*(H^3-h^3)/3, \quad b_2(h) = \sqrt{3}(\sigma_s - E_*\varepsilon_*)(H^2-h^2) \tag{3.5}$$

P_0, P_1 – постоянные интегрирования, определяемые из статических граничных условий, ω_{*k} – постоянные интегрирования, с точностью до H имеющие смысл суммарной площади поперечных сечений волокон k-го семейства, пересекающих площадку единичной (вдоль x_2) длины, ортогональную направлению x_1 [11] (ω_{*k} можно задавать вместо $\omega_{0k}(x_2) = \text{const}$ в краевых условиях (1.34)); штрих означает дифференцирование по x_1.

Из системы (3.1)–(3.4) следует, что при решении задачи РА в случае цилиндрического изгиба вполне достаточно внедрять в пластину два семейства арматуры ($N = 2$), изготовленных из одного материала ($E_1 = E_2$, $\sigma_{*1} = \sigma_{*2}$, $E_{s1} = E_{s2}$, $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{s2}$, $e_{*1} = e_{*2}$) и уложенных с одинаковой интенсивностью ($\omega_1 = \omega_2$) симметрично направления $x_1(\psi_1 = -\psi_2)$. Тогда из уравнений (3.1), (3.4) за счет (3.2), (3.3) можно исключить функции w'', ω_1, после чего получим

$$12M_{11}(x_1) \equiv 2H^2\sigma_{*1}\omega_{*1}\cos\psi_1 + (1-2\omega_{*1}/\cos\psi_1)\times$$
$$\times[b_1(h)e_{*1}/(H\cos^2\psi_1) + b_2(h)\operatorname{sign}(e_{*1})] = 12P(x_1) \tag{3.6}$$

$$h(x_1) = \begin{cases} H = \text{const}, & h_* \geq H \\ h_*, & h_* < H \end{cases}, \quad h_* = \frac{2H\sigma_s\cos^2\psi_1}{Ea_1\sqrt{1-\nu+\nu^2}|e_{*1}|} \tag{3.7}$$

В случае чистоупругого поведения материала связующего ($h = H$) уравнение (3.6) редуцируется к виду

$$2\sigma_{*1}\omega_{*1}\cos\psi_1 + Ea_1(1-2\omega_{*1}/\cos\psi_1)e_{*1}/\cos^2\psi_1 = 12P(x_1)/H^2 \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) умножением на $\cos^3\psi_1$ сводится к алгебраическому уравнению четвертого порядка относительно $\cos\psi_1$. Следовательно, при соответствующих входных данных эта задача может иметь до четырех разных решений, параметрически зависящих от ω_{*1}, т.е. от количества арматуры, внедряемой в пластину.

При упругопластическом поведении материала связующего ($h = h_* < H$) уравнение (3.6) после умножения на $\cos^3\psi_1$ при учете соотношений (3.7) сводится к алгебраическому уравнению седьмого порядка относительно $\cos\psi_1$. А значит, уравнение (3.6) может иметь до семи разных решений, параметрически зависящих от ω_{*1}.

Из всей совокупности действительных решений уравнений (3.6), (3.8) решениями задачи РА будут лишь те, которые удовлетворяют физическим ограничениям $\omega_1 > 0$, $\omega_* - 2\omega_1 \geq 0$, $|\cos\psi_1| \leq 1$ и прочностным ограничениям (1.36).

Предположим, что на кромке $x_1 = D$ пластина жестко защемлена, а на кромке $x_1 = 0$ заданы статические граничные условия (2.10), (2.11) при $\beta = \pi$. Если внешние поперечные нагрузки отсутствуют ($p(x_1) = 0$, $F_{nz} = 0$), то реализуется случай чистого цилиндрического изгиба ($P(x_1) = P_0 = M_n = \text{const}$, $P_1 = 0$) и уравнения (3.6), (3.8) при учете краевого условия (1.34) соответственно примут вид

$$2\sigma_{*1}H^2\omega_{01}\cos^2\psi_1 + (1-2\omega_{01})[b_1(h)e_{*1}/(H\cos^2\psi_1) + b_2(h)\,\text{sign}(e_{*1})] = \\ = 12M_n, \quad 0 \le x_1 \le D \tag{3.9}$$

$$2\sigma_{*1}\omega_{01}\cos^2\psi_1 + Ea_1(1-2\omega_{01})e_{*1}/\cos^2\psi_1 = 12M_n/H^2, \quad 0 \le x_1 \le D \tag{3.10}$$

причем в соотношении (3.9) следует учесть выражения (3.5), (3.7). (При $x_1 = 0$ равенства (3.9), (3.10) соответствуют статическому граничному условию по моменту при цилиндрическом поперечном изгибе (3.6), (3.8).)

В случае чистоупругого поведения материала связующего уравнение (3.10) умножением на $\cos^2\psi_1$ сводится к биквадратному уравнению относительно $\cos\psi_1$. Так как волокна предполагаются входящими в пластину на кромке $x_1 = 0$, то должно быть $\cos\psi_1 > 0$. Поэтому решениями задачи РА будут только два действительных положительных корня уравнения (3.10), параметрически зависящих от ω_{01}. Из соотношений (2.5), (2.7) следует, что при чистоупругом изгибе $\sigma_{*1} = E_1e_{*1}$. Разделив уравнение (3.10) на σ_{*1}, при втором слагаемом в левой части (3.10) можно выделить малый параметр $\lambda = E/E_1$. Анализируя решения биквадратного уравнения (3.10), можно показать, что все неизвестные функции, соответствующие первому из решений этого уравнения, с учетом (3.3) имеют конечные пределы при $\lambda \to 0$. (Это решение назовем "регулярным".) А второе решение уравнения (3.10) обладает тем свойством, что $\cos^2\psi_1 \to 0$ при $\lambda \to 0$, а значит, по (3.3) $|w''| \to \infty$. (Это решение назовем "сингулярным".)

Исследуем решение задачи РА прямоугольной удлиненной пластины при цилиндрическом изгибе, изготовленной из алюминиевого сплава АДН и армированной борными волокнами. (В табл. 1 приведены механические характеристики фазовых материалов бороалюминия [12].)

Предположим, что пластина нагружена изгибающим моментом, значение которого равно $M_n = H^2\sigma_1^+/12(p(x_1) = F_{nz} = 0)$ ($\sigma_1^+ = \sigma_{p1}$ – временное сопротивление борных волокон). В этом случае при идеальноупругом поведении фазовых материалов решение задачи РА во всех точках конструкции определяется формулами (3.3), (3.10). В табл. 2 приведены значения неизвестных величин ψ_1, $|\bar{w}''| = H|w''|/(2\varepsilon_1^+)$ ($\varepsilon_1^+ = \sigma_1^+/E_1$), полученные при $\omega_{01} = 0.2$ и $\omega_{01} = 0.35$.

Сопоставление данных, приведенных в табл. 2, показывает, что изменение ω_{01}, т.е. количества арматуры в пластине, приводит к значительному изменению структуры РА и деформированного состояния в связующем, поэтому на множестве проектов РА изгибаемых пластин имеет смысл осуществлять целевую оптимизацию. Так, из четырех решений, приведенных в табл. 2, наилучшим с точки зрения прочности связующего ($\min|w''|$, так как величина σ при чистоупругом цилиндрическом изгибе пропорциональна $|w''|$, см. (1.23), (1.19)) и наименьшего расхода арматуры ($\min\omega_{01}$) будет проект, соответствующий регулярному решению задачи РА при $\omega_{01} = 0.2$. (Вообще из табл. 2 и многочисленных расчетов, проведенных авторами, следует, что проекты РА, соответствующие регулярному решению задачи, более эффективны с точки зрения прочности связующего, чем проекты, соответствующие сингулярному решению.)

Таблица 1

Материал	E, ГПа	$\sigma_{0.2}$, МПа	σ_p, МПа	δ, %	ν
Сплав АДН	71.0	100	150	6.0	0.31
Борные волокна	416.5	–	3150	0.2	0.23

Таблица 2

ω_{01}	ψ_1	$\lvert\bar{w}''\rvert$	$t_s = \lvert\bar{\varepsilon}_1^s\rvert$	$t_{\max}$
		Первое (регулярное) решение		
0.2	12°29′	1.0490	0.1810	0.7755
0.35	40°47′	1.7443	0.1088	0.8089
		Второе (сингулярное) решение		
0.2	56°59′	3.3696	0.0563	0.2506
0.35	67°57′	7.0932	0.0268	0.2049

Выше предполагалось, что фазовые материалы ведут себя как идеальноупругие. Оценим несущую способность реальных бороалюминиевых изгибаемых пластин при цилиндрическом изгибе. Очевидно, что при рассмотрении чистоупругого изгиба несущая способность пластины будет определяться возникновением пластических деформаций в связующем, а также разрушением или потерей устойчивости упругохрупких борных волокон на лицевых плоскостях пластины.

Для оценки несущей способности РА-пластин изгибающий момент M_n представим в виде

$$M_n = t\bar{M}_n\sigma_1^+H^2/6, \quad \bar{M}_n = 0.5, \quad t>0 \tag{3.11}$$

где t – параметр нагружения.

Используя общеизвестные формулы [12]

$$\varepsilon_*^0 = 2\sqrt{\omega_1 E/[3(1-\omega_1)E_1]}, \quad \varepsilon_*^1 = G_{\mathrm{m}}/[\omega_1[1-\omega_1]E_1]$$

оценим критические деформации волокон, при которых происходит их потеря устойчивости по моде растяжения (ε_*^0) и по моде сдвига (ε_*^1). Расчеты показали, что для рассматриваемой бороалюминиевой композиции в реальном диапазоне изменения интенсивности армирования ($0.05 \le \omega_1 \le 0.95$) величины ε_*^0, ε_*^1 более чем в два раза превышают значение предельной деформации ($\varepsilon_{\mathrm{p}1} = \sigma_{\mathrm{p}1}/E_1$) борных волокон при растяжении. (При расчете величин ε_*^0, ε_*^1 учитывалась возможность возникновения пластических деформаций в связующем.) Следовательно, при поперечном изгибе несущая способность борных волокон будет исчерпываться за счет их разрушения при растяжении, а не за счет потери устойчивости при сжатии.

Для определения наибольшего значения параметра нагружения (t_s) при чистоупругом цилиндрическом изгибе необходимо оценить предельную величину $\lvert w_s''\rvert$, при которой напряженное состояние в связующем на лицевых поверхностях достигает предела текучести σ_s. При этом $h = h_* = H$, а значит, из выражений (3.4) получим

$$\lvert w_s''\rvert = 2\sigma_s/(HEa_1\sqrt{1-\nu+\nu^2}), \quad \sigma_s = \sigma_{0,2} \tag{3.12}$$

Так как нужно оценить несущую способность конструкции с уже полученными РА-структурами, то из соотношений (3.3) и (3.12) можно определить модуль деформации ε_1^s арматуры на лицевых поверхностях пластины, соответствующей значению $|w_s''|$:

$$|\varepsilon_1^s| \equiv |He_1^s/2| = |Hw_s''/2|\cos^2\psi_1 \tag{3.13}$$

После подстановки выражений (3.11)–(3.13) в уравнение (3.10) с учетом равенства $\sigma_{*1} = E_1 e_1^s H$ получим

$$t_s = [2|\bar{\varepsilon}_1^s|\omega_{01}\cos^2\psi_1 + \lambda a_1(1-2\omega_{01})|\bar{\varepsilon}_1^s|/\cos^2\psi_1]/|\overline{M}_n| \tag{3.14}$$

$$\bar{\varepsilon}_1^s = \varepsilon_1^s/\varepsilon_1^+,\ \lambda = E/E_1$$

Значения t_s, $|\bar{\varepsilon}_1^s|$, соответствующие РА-структурам, занесены в табл. 2. Значения t_s, $|\bar{\varepsilon}_1^s|$ совпадают в силу самого смысла этих величин (ср. соотношения (3.10), (3.11), (3.14)).

Из сравнения значений t_s следует, что наибольшую несущую способность имеет пластина, соответствующая регулярному решению задачи РА при $\omega_{01} = 0.2$, а наименьшую – конструкция, соответствующая сингулярному решению при $\omega_{01} = 0.35$. По смыслу величина $|\bar{\varepsilon}_1^s|$ равна отношению модуля напряжения в арматуре $|\sigma_{01}|$ на лицевых поверхностях пластины (при возникновении пластических деформаций в связующем) к значению временного сопротивления волокон σ_{p1}. Поэтому из сопоставления величин $|\bar{\varepsilon}_1^s|$, приведенных в табл. 2, можно сделать вывод о том, что несущая способность арматуры при чистоупругом изгибе бороалюминиевой пластины используется незначительно (менее чем на 20%).

Оценим несущую способность РА-пластин при цилиндрическом изгибе, в которых несущая способность волокон используется максимально, т.е. потребуем, чтобы напряжения в волокнах на лицевых поверхностях пластины по модулю равнялись пределу прочности ($|\sigma_{01}| = \sigma_{p1}$). Тогда в крайних слоях пластины, примыкающих к лицевым поверхностям, в связующем возникнут пластические деформации.

Для оценки несущей способности рассматриваемых конструкций при упругопластическом поведении материала связующего предварительно нужно определить относительную толщину $\bar{h} = h/H$ упругого слоя в связующем. Из сопоставления выражения (3.13) с (3.7), где $|e_{*1}| = 2\varepsilon_{p1}$, следует, что значение $\bar{h}$ совпадает с $|\bar{\varepsilon}_1^s|$. (Этот факт является следствием гипотез Кирхгофа.) При известной величине $\bar{h}$ из уравнения (3.9) с учетом выражений (3.11) получим максимальное значение параметра нагрузки $t_{\max}$ при упругопластическом поведении материала связующего

$$t_{\max} = \{2|\sigma_{*1}|H^2\omega_{01}\cos^2\psi_1 +$$
$$+ (1-2\omega_{01})[(Ea_1h^3 + 4E_*(H^3-h^3)/3)|e_{*1}|/(H\cos^2\psi_1) +$$
$$+ \sqrt{3}(\sigma_s - E_*\varepsilon_*)(H^2-h^2)]\}/(2|\overline{M}_n|H^2\sigma_1^+) \tag{3.15}$$

где $\sigma_{*1} = 2\sigma_{p1}$, $e_{*1} = 2\varepsilon_{p1}$ (см. (2.5)–(2.7) при $\sigma_{01} = \sigma_{p1} = \sigma_1^+$) значения ψ_1, ω_{01}, $h = \bar{h}H$ следует взять из табл. 2.

Полученные по формуле (3.15) значения t_{max} занесены в табл. 2. Сопоставление значений t_s и t_{max}, приведенных в табл. 2 в одних и тех же строках, показывает, что несущая способность изгибаемых РА-пластин при упругопластическом деформировании связующего в силу наиболее полного использования несущей способности волокон в 4–8 раз выше несущей способности соответствующих упругих конструкций. При этом наибольшей несущей способностью в неупругом случае обладает конструкция, соответствующая регулярному решению при $\omega_{01} = 0.35$, а не пластина, соответствующая регулярному решению при $\omega_{01} = 0.2$, которая при чистоупругом изгибе является наилучшей из всех рассмотренных пластин. Следовательно, проекты РА, наиболее эффективные по прочности при чистоупругом изгибе, могут оказаться не столь эффективными при упругопластическом изгибе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00115).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боган Ю.А., Немировский Ю.В.* О распределении напряжений в упругой равнонапряженно-армированной пластине // Прикладная механика. 1976. Т. 12. № 7. С. 33–38.
2. *Боган Ю.А., Немировский Ю.В.* Плоская задача теории упругости для среды с двумя семействами равнонапряженной волокнистой арматуры // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 150–159.
3. *Бушманов С.Б., Немировский Ю.В.* Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композитных материалов. 1983. № 2. С. 278–284.
4. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* О некоторых свойствах решения задачи поперечного изгиба пластины с равнонапряженной арматурой // Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 2. С. 15–28.
5. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Применение методов теории возмущений в задачах поперечного изгиба пластин с равнонапряженной арматурой // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 3. С. 3–22.
6. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
7. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
8. *Немировский Ю.В.* Об упругопластическом поведении армированного слоя // ПМТФ. 1969. № 6. С. 81–89.
9. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 238 с.
10. *Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б.* Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
11. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 2. С. 20–40.
12. Композиционные материалы. Справочник. Киев: Наук. думка, 1985. 592с.

Новосибирск
e-mail: shulgin@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию
6.III.2003