УДК 539.3

© 2004 г. В. Б. Зеленцов

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ШИРИНОЙ ЗОНЫ КОНТАКТА

Рассматриваются две нестационарные динамические контактные задачи о внедрении жесткого штампа в упругую полуплоскость. В первой задаче штамп клиновидной форы, во второй – параболической. Для решения задач применяется метод, разработанный ранее [1, 2]. Требования, накладываемые на гладкость решения рассматриваемых задач, приводят к дополнительным условиям, благодаря которым определяется изменяющаяся во времени ширина зоны контакта между штампом и упругой полуплоскостью как функция времени и закона внедрения штампа в упругую полуплоскость, определяемого из дифференциального уравнения движения массивного штампа на упругой полуплоскости.

Ранее решения смешанных задач теории упругости с изменяющейся во времени границей смены краевых условий в аналитической форме рассматривались в ряде работ ([3, 4] и др.). Приведена [5] подробная библиография рассматриваемого класса задач.

1. Постановка задач и их интегральные уравнения. Рассматриваются нестационарные динамические контактные задачи (НДКЗ) о внедрении жесткого штампа клиновидной (НДКЗ 1) и параболической (НДКЗ 2) формы в упругую полуплоскость ($-\infty < x < \infty$, $y \geq 0$). Внедрение штампов в полуплоскость осуществляется вдоль оси y ($x = 0$), являющейся осью их симметрии. Начальная скорость штампов v_0, погонная масса каждого из них m, полуширина зоны контакта штампов с упругой полуплоскостью $a(t)$ – знакоположительная функция времени t. Силы трения и сцепления в зоне контакта штампов с упругой средой отсутствуют. Форма штампов и закон их внедрения в упругую среду задаются функцией $g(x, t)(t > 0, |x| \leq a(t))$, которая в случае клиновидного штампа (НДКЗ 1) имеет вид

$$g(x,t) = \varepsilon(t) - \theta_1|x|, \quad \theta_1 = \operatorname{ctg}\alpha \tag{1.1}$$

где 2α – угол раствора клина, $\varepsilon(t)$ – закон его внедрения в упругую среду, а в случае параболического штампа (НДКЗ 2) определяется равенством

$$g(x, t) = \varepsilon(t) - \theta_2 x^2 \tag{1.2}$$

где θ_2 – параметр, характеризующий пологость (крутизну) формы параболического штампа, размерности м$^{-1}$.

В начальный момент времени упругая полуплоскость находится в покое и поэтому смещения упругой среды $u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$ при $t = 0$ и их скорости равны нулю.

Граничные условия рассматриваемых НДКЗ в общепринятых обозначениях теории упругости [6, 7] имеют вид ($t > 0$)

$$v(x, 0, t) = g(x, t), \quad |x| \leq a \tag{1.3}$$

$$\sigma_{yy}(x, 0, t) = 0, \quad a < |x| < \infty; \quad \sigma_{xy}(x, 0, t) = 0, \quad |x| < \infty \tag{1.4}$$

где σ_{yy}, σ_{xy} – нормальные и касательные напряжения. На бесконечности (при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$) напряжения и смещения в упругой полуплоскости равны нулю.

Поставленные НДКЗ 1 и НДКЗ 2 с помощью интегральных преобразований Лапласа (по времени t) с параметром p и Фурье (по координате x) [8], последовательно применяющихся к дифференциальным уравнениям теории упругости [6, 7] и к граничным условиям (1.3), (1.4), с учетом условий на бесконечности и нулевых начальных условий, приводятся к решению интегрального уравнения (ИУ) первого рода в безразмерной форме [1, 2]

$$\int_{-1}^{1} \varphi^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f^L(x, p), \quad |x| \le 1 \tag{1.5}$$

$$k(t) = \int_{\Gamma} K(u) e^{iut} du, \quad K(u) = 2(1 - \beta^2)\sigma_2 R^{-1}(u) \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} R(u) = (2u^2 + 1)^2 - 4u^2\sigma_1\sigma_2; \quad \sigma_1 = \sqrt{u^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 + \beta^2} \\ \Lambda = \frac{c_2}{pa}, \quad \beta = \frac{c_2}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $\varphi^L(x, p)$ – трансформанта Лапласа функции $\varphi(x, t)$ – искомой функции распределения контактных напряжений под штампом; $f^L(x, p) = \Delta g^L(x, p)$, $\Delta = 2(1 - \beta^2)\mu a^{-1}$, $g^L(x, p)$ – изображение Лапласа функции $g(x, t)$, описывающей форму штампа и закон его внедрения в упругую среду (1.1), (1.2)

$$g^L(x, p) = \varepsilon^L(p) - \theta_1 a p^{-1}|x|, \quad |x| \le 1 \quad \text{для} \quad \text{НДКЗ 1} \tag{1.8}$$

$$g^L(x, p) = \varepsilon^L(p) - \theta_2 a^2 p^{-1} x^2, \quad |x| \le 1 \quad \text{для НДКЗ 2} \tag{1.9}$$

где $\varepsilon^L(p)$ – изображение Лапласа функции $\varepsilon(t)$ из (1.1), (1.2), $a = a(t)$ – полуширина зоны контакта ($a(t) \ge 0$), c_1 и c_2 – скорости распространения продольной и поперечной упругих волн смещений и напряжений, λ, μ – коэффициенты Лямэ, ρ – плотность материала упругой среды. Контур интегрирования Γ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ проходит от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль действительной оси ($\tau = 0$) под углом $-\arg p$ к ее положительному направлению.

2. Символ ядра ИУ (1.5) и его основные свойства. Функция $K(u)$ (второе равенство (1.6)) – символ ядра ИУ (1.5) является четной, вещественной на действительной оси комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$. Ее асимптотическое поведение в нуле и на бесконечности дается соотношениями

$$K(u) = |u|^{-1} + O(|u|^{-3}) \quad \text{при} \quad |u| \to \infty \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} K(u) = K(0) + \frac{1}{2!}K''(0)u^2 + O(u^4) \quad \text{при} \quad u \to 0 \\ K(0) = 2\beta(1 - \beta^2), \quad K''(0) = 2\beta^{-1}(1 - 9\beta^2 + 8\beta^3 + 8\beta^4 - 8\beta^5) \end{gathered} \tag{2.2}$$

В комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ функция $K(u)$ имеет четыре точки ветвления $u = \pm i\beta$, $u = \pm i$ и два полюса Релея $u = \pm i\eta_0$, определяющихся из алгебраического уравнения Релея $R(iu) = 0$ [7].

Для однозначного представления функции $K(u)$ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ проводятся разрезы от точек ветвления $u = i$, $u = i\beta$ до $+i\infty$ вдоль положительной части мнимой оси ($\mathrm{Im}\,u > 0$) и от точек ветвления $u = -i$, $u = -i\beta$ ($\beta > 0$) до $-i\infty$ вдоль отрицательной части мнимой оси ($\mathrm{Im}\,u \le 0$). В разрезанной таким образом комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ с выколотыми точками полюсов Релея $u = \pm i\eta_0$ функция $K(u)$ – аналитическая, включая полосу $|\mathrm{Im}(u)| < \beta$, ($\beta < 1 < \eta_0$).

3. Асимптотическое решение ИУ (1.6). Нулевой член асимптотики решения ИУ (1.5) $\varphi^L(x, p)$ при малых Λ (большие p) может быть построен по формуле [1, 2, 9]

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_+^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \varphi_-^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) - \varphi_\infty^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right), \quad |x| \le 1 \tag{3.1}$$

в которой функции $\varphi_\pm^L(x, p)$, $\varphi_\infty^L(x, p)$ определяются из ИУ

$$\int_0^\infty \varphi_\pm^L(\xi, p)k(\xi - x)d\xi = 2\pi f^L(\pm\Lambda x \mp 1, p)\Lambda^{-1}, \quad 0 \le x < \infty \tag{3.2}$$

$$\int_0^\infty \varphi_\infty^L(\xi, p)k(\xi - x)d\xi = 2\pi f^L(\Lambda x, p)\Lambda^{-1}, \quad -\infty < x < \infty \tag{3.3}$$

Ядро $k(t)$ (1.6) после деформации контура интегрирования Γ в действительную ось имеет вид

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)e^{iut}du$$

Уравнения (3.2) являются ИУ Винера–Хопфа на полуоси [10], а (3.3) – уравнение свертки Фурье на оси [11].

Решение ИУ (3.3) находится с помощью интегрального преобразования Фурье и дается формулой

$$\varphi_\infty^L(x, p) = \frac{1}{2\pi\Lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{LF}(u, p)}{K(u)}e^{-iux}du \tag{3.4}$$

где

$$f^{LF}(u, p) = 2\pi\lambda_0\delta(u) - 2\lambda_1\Lambda a u^{-2}, \quad \text{для НДКЗ 1} \tag{3.5}$$

$$f^{LF}(u, p) = 2\pi\lambda_0\delta(u) - 2\lambda_2\Lambda^2\delta''(u), \quad \text{для НДКЗ 2} \tag{3.6}$$

причем $\lambda_0 = 2(1 - \beta^2)\mu a^{-1}\varepsilon^L(p)$, $\lambda_1 = -2(1 - \beta^2)\mu\theta_1 p^{-1}$, $\lambda_2 = -2(1 - \beta^2)\mu a\theta_2 p^{-1}$, $\delta(u)$ – дельта-функция Дирака в комплексной плоскости u (штрихами обозначены производные).

После вычисления квадратур в (3.4) в случае НДКЗ 1 получаем

$$\Delta^{-1}\varphi_\infty^L(x, p) = \frac{1}{\Lambda K(0)}\left[\varepsilon^L(p) - \frac{\theta_1 a^2}{c_2}\left(\frac{2}{\pi}K(0)\int_\beta^\infty \frac{l(\xi)}{\xi^2}\exp(-|x|\xi)d\xi + |x|\right)\right]$$

$$l(u) = \begin{cases} l_1(u) - 4u^2\sigma_{10}\sigma_{20}l_0^{-1}(u), & 1 \le u < \infty \\ l_1(u), \quad \beta \le u < 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$l_1(u) = (2u^2 - 1)^2 l_0^{-1}(u), \quad l_0(u) = 2(1 - \beta^2)\sigma_{20}, \quad \sigma_{10} = \sqrt{u^2 - 1}, \quad \sigma_{20} = \sqrt{u^2 - \beta^2}$$

а в случае НДКЗ 2

$$\Delta^{-1}\varphi_{\infty}^{L}(x, p) = \frac{1}{\Lambda K(0)}\left[\varepsilon^{L}(p) - \frac{\theta_2 a^3}{c_2}\Lambda\left(x^2 + \Lambda^2\frac{K''(0)}{K(0)}\right)\right] \tag{3.8}$$

При получении соотношений (3.7), (3.8) учитывалось, что $K'(0) = 0$ ввиду четности функции $K(u)$.

Для решения ИУ (3.2) применяется стандартная процедура их решения методом Винера–Хопфа [1, 2, 10–12]. Рассмотрим ИУ (3.2) для $\varphi_{+}^{L}(x, p)$, доопределив его на всю действительную ось

$$\int_0^{\infty}\varphi_{+}^{L}(\xi, p)k(\xi - x)d\xi = \begin{cases} 2\pi f^{L}(\Lambda x - 1, p)\Lambda^{-1}, & 0 \le x < \infty \\ 2\pi \upsilon_{-}^{L}(x, p), & -\infty < x < 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Под $\upsilon_{-}^{L}(x, p)$ понимается интегральный оператор

$$\upsilon_{-}^{L}(x, p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\varphi_{+}^{L}(\xi, p)k(\xi - x)d\xi \tag{3.10}$$

определяющий трансформанту Лапласа упругих вертикальных перемещений $\upsilon(x, t)$ поверхности упругой среды вне штампа.

После применения к ИУ (3.9) интегрального преобразования Фурье получим функциональное уравнение

$$K(u)\varphi_{+}^{LF}(u, p) = \Lambda^{-1}f_{+}^{LF}(u, p) + \upsilon_{-}^{LF}(u, p) \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} \varphi_{+}^{LF}(u, p) = \int_0^{\infty}\varphi_{+}^{L}(\xi, p)e^{iu\xi}d\xi \\ f_{+}^{LF}(u, p) = \int_0^{\infty}f^{L}(\Lambda\xi - 1, p)e^{iu\xi}d\xi, \quad \upsilon_{-}^{LF}(u, p) = \int_{-\infty}^{0}\upsilon_{-}^{L}(\xi, p)e^{iu\xi}d\xi \end{gathered} \tag{3.12}$$

относительно неизвестной трансформанты Лапласа–Фурье функции $\varphi_{+}^{LF}(u, p)$, являющейся изображением Фурье искомой функции $\varphi_{+}^{L}(x, p)$. Функция $f_{+}^{LF}(u, p)$ в случае НДКЗ 1 определяется формулой

$$f_{+}^{LF}(u, p) = \Delta\Lambda^{-1}\left\lfloor -(\varepsilon^{L}(p) - \eta_1\Lambda)(iu)^{-1} + \eta_1\Lambda^2(1 - 2\exp(iu\Lambda^{-1}))(iu)^{-2}\right\rfloor \tag{3.13}$$

а в случае НДКЗ 2

$$\begin{gathered} f_{+}^{LF}(u, p) = \Delta\Lambda^{-1}\left\lfloor -(\varepsilon^{L}(p) - \eta_2\Lambda)(iu)^{-1} + 2\eta_2\Lambda^2(1 + \Lambda(iu)^{-1})(iu)^{-2}\right\rfloor \\ \eta_k = \theta_k a^{1+k}c_2^{-1}, \quad k = 1, 2 \end{gathered} \tag{3.14}$$

Функции $\varphi_{+}^{LF}(u, p)$, $f_{+}^{LF}(u, p)$ регулярны в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(u) > 0$, а $\upsilon_{-}^{LF}(u, p)$ регулярна в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}(u) < \beta$, $\beta > 0$ комплексной плоскости

$u = \sigma + i\tau$, функция $K(u)$ регулярна в полосе $|\mathrm{Im}(u)| < \beta$. Предполагая возможность факторизации функции $K(u)$ [10]

$$K(u) = K_+(u)K_-(u) \tag{3.15}$$

где функции $K_+(u)$, $K_-(u)$ регулярны соответственно в верхней ($\mathrm{Im}(u) > -\beta$) и нижней ($\mathrm{Im}(u) < \beta$) полуплоскостях, подставим выражение (3.15) в уравнение (3.11) и разделим его левую и правую части на $K_-(u)$. Образовавшуюся в результате этого функцию

$$g(u, p) = \Lambda K_-^{-1}(u) f_+^{LF}(u, p) \tag{3.16}$$

представим в виде суммы двух функций [10]

$$g(u, p) = g_+(u, p) + g_-(u, p) \tag{3.17}$$

где $g_+(u, p)$ регулярна в верхней ($\mathrm{Im}(u) > 0$), а $g_-(u, p)$ в нижней ($\mathrm{Im}(u) < \beta$) полуплоскости $u = \sigma + i\tau$. При этом в случае НДКЗ 1

$$g_+(u, p) = \Delta \sum_{k=1}^{2} \sum_{n=0}^{1} c_{kn}(p) \overset{+}{g}_{kn}(u) \tag{3.18}$$

$$c_{10}(p) = -(\varepsilon^L(p) - \eta_1 \Lambda(1 + \Lambda\gamma'_- - 2\Lambda\gamma_p))\Lambda^{-1}$$

$$c_{11}(p) = c_{21}(p) = -2c_{20}(p) = -2\eta_1\Lambda$$

$$\overset{+}{g}_{k0}(u) = \frac{1}{(iu)^k K_-(0)}, \quad k = 1, 2, \quad \overset{+}{g}_{11}(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{0+}} \frac{\exp(i\zeta\Lambda^{-1})}{\zeta K_-(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - u} \frac{1}{iu}$$

$$\overset{+}{g}_{21}(u) = \frac{\exp(iu\Lambda^{-1})}{(iu)^2 K_-(0)}, \quad \gamma'_- = \frac{iK'_-(0)}{K_-(0)}, \quad \gamma_p = \frac{K_-(0)}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{0+}} \frac{\exp(i\zeta\Lambda^{-1})}{(i\zeta)^2 K_-(\zeta)} d\zeta$$

а в случае НДКЗ 2

$$g_+(u, p) = \Delta \sum_{n=1}^{3} c_n(p) \overset{+}{g}_{n0}(u) \tag{3.19}$$

$$c_1(p) = -(\varepsilon^L(p) - \eta_2 a(1 + 2\Lambda^2\gamma'_- + 2\Lambda^3(\gamma''_- + \gamma'^2_-)))\Lambda^{-1}$$

$$c_2(p) = 2\eta_2\Lambda(1 + 2\Lambda\gamma'_-), \quad c_3(p) = 4\eta_2\Lambda^2$$

$$\overset{+}{g}_{30}(u) = \frac{1}{(iu)^3 K_-(0)}; \quad \gamma''_- = \frac{K''_-(0)}{K_-(0)}$$

Формулы для $\overset{+}{g}_{10}(u)$, $\overset{+}{g}_{20}(u)$ даны в (3.18), η_k даны в (3.13), (3.14). Контур интегрирования Γ_{0+} проходит в верхней полуплоскости вдоль разрезов от $+i\infty$ до $i\beta$ вдоль мнимой оси (справа) и от $i\beta$ до $+i\infty$ (слева); выбор ветвей для вычисления корней σ_1, σ_2 осуществляется так, что вдоль берегов разреза

$$\sqrt{-u^2 + \beta^2} = \pm i\sqrt{u^2 - \beta^2}, \quad \sqrt{-u^2 + 1} = \pm i\sqrt{u^2 - 1}$$

где верхний знак берется для правого берега, а нижний – для левого берега разреза. Штрихами обозначены производные.

В результате представления (3.17) функциональное уравнение принимает вид

$$\varphi_+^{LF}(u,p)K_+(u)-g_+(u,p) = g_-(u,p)+\upsilon_-^{LF}(u,p)K_-^{-1}(u) \tag{3.20}$$

и ввиду убывания на бесконечности всех функций в (3.20) и теоремы Лиувилля получим из уравнения (3.20) два равенства

$$\varphi_+^{LF}(u,p)K_+(u)-g_+(u,p) = 0 \tag{3.21}$$

$$\upsilon_-^{LF}(u,p)K_-^{-1}(u)+g_-(u,p) = 0 \tag{3.22}$$

для определения $\varphi_+^{LF}(u,p)$ и $\upsilon_-^{LF}(u,p)$.

Искомое решение $\varphi_+^{L}(x,p)$ ИУ (3.2) определяется с помощью обратного преобразования Фурье от $\varphi_+^{LF}(u,p)$ из соотношения (3.21)

$$\varphi_+^{L}(x,p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+ic}^{\infty+ic}\frac{g_+(u,p)}{K_+(u)}e^{-iux}du,\quad c>0,\quad 0\le x<\infty \tag{3.23}$$

Функция $g_+(u,p)$ в случае НДКЗ 1 дается формулой (3.18), в случае НДКЗ 2 – формулой (3.19).

Заметим, что из соотношения (3.22) определяется вторая неизвестная функция $\upsilon_-^{LF}(u,p)$ и после ее обращения по Фурье получим

$$\upsilon_-^{L}(x,p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_-(u,p)K_-(u)e^{-iux}du,\quad -\infty<x<0$$

где

$$g_-(u,p) = g(u,p)-g_+(u,p)$$

тогда как функция $g(u,p)$ дана выражением (3.16).

Решение $\varphi_-^{L}(x,p)$ второго уравнения (3.2) совпадает с $\varphi_+^{L}(x,p)$ ($\varphi_-^{L}(x,p)=\varphi_+^{L}(x,p)$) на основании того, что для рассматриваемых НДКЗ 1 и НДКЗ 2 $f(x,t)$ – четные функции x и $f^L(+\Lambda x-1,p)=f^L(-\Lambda x+1,p)$ в (3.2). На этом же основании и $\upsilon_+^{L}(x,p)=\upsilon_-^{L}(x,p)$.

Заметим, что для вычисления квадратур в выражении (3.23), определяющем решения ИУ (3.2) $\varphi_\pm^{L}(x,p)$, необходимо знание функций $K_\pm(u)$. В общем случае они даются в сингулярных квадратурах [7], что затрудняет анализ полученных результатов и их численную реализацию.

4. Аппроксимация символа ядра ИУ (1.5). Для получения эффективного решения ИУ (3.2) заменим функцию $K(u)$ – символ ядра (1.6) ИУ (3.2) аппроксимирующей функцией $K_0(u)$, предложенной ранее [1, 2]. Имеем

$$K_0(u) = \sqrt{u^2+\beta^2}(u^2+\eta_0^2)^{-1}\exp[M_n^+(u)+M_n^-(u)] \tag{4.1}$$

$$M_n^\pm(u) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}d_k(\sqrt{\beta\pm iu}-\sqrt{1\pm iu})^{2k+2}$$

Постоянные d_k определяются из условий наилучшей аппроксимации $K(u)$ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ с разрезами, описанными в разд. 2. В этой области $K_0(u)$ – однозначная аналитическая функция. Ее факторизация, т.е. представление в виде $K_0(u) = K_+^0(u)K_-^0(u)$, достигается элементарными средствами, при этом

$$K_\pm^0(u) = \frac{\sqrt{\beta \mp iu}}{\eta_0 \mp iu}\exp[M_n^\pm(u)] \tag{4.2}$$

Основные свойства функций $K_0(u)$ и $K_\pm^0(u)$ указаны ранее [1].

С технической точки зрения аппроксимация символа ядра $K(u)$ (1.6) функцией (4.1) сводится к определению коэффициентов аппроксимации d_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Для их определения могут использоваться различные классические методы теории аппроксимации функций в комплексной области [13]. Вследствие того что асимптотика функции $K_0(u)$ (4.1) на бесконечности (при $|u| \to \infty$) совпадает с асимптотикой $K(u)$ (2.1), то аппроксимацию $K(u)$ (1.6) функцией $K_0(u)$ достаточно осуществить в круге с центром в начале координат. Учитывая степенной характер функций $K(u)$ (2.2) и $K_0(u)$ (4.1) в окрестности нуля ($u = 0$), для определения постоянных d_k можно использовать разложения этих функций в степенные ряды. Это приводит к условиям совпадения функций $K(u)$ и $K_\pm(u)$ с функциями $K_0(u)$ и $K_\pm^0(u)$ и совпадения соответствующих производных в нуле, которые можно записать в виде (верхний индекс j указывает порядок производной)

$$K^{(j)}(0) = K_0^{(j)}(0), \quad j = 0, 2, \ldots, 2m \tag{4.3}$$

$$K_\pm^{(j)}(0) = K_\pm^{0(j)}(0), \quad j = 1, 3, 5, \ldots, 2m-1 \tag{4.4}$$

при этом должно выполняться условие $n = 2m$, а в соотношениях (4.4) берутся только либо верхние, либо нижние знаки плюс и минус. Также учитывались следующие свойства функций $K_\pm^0(u)$:

$$K_+^0(u) = K_-^0(-u); \quad K_+^{0(j)}(u) = (-1)^j K_-^{0(j)}(-u), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

Для реализации условий (4.4) необходимо определить функции $K_\pm^{(j)}(0)$, что легко достигается классическими средствами [10] по формуле

$$K_+^{(j)}(u) = \frac{K_+(u)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K'(\alpha)}{K(\alpha)}\frac{d\alpha}{(\alpha-u)^j}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

причем учитывается равенство

$$K_\pm(0) = \sqrt{K(0)} \tag{4.7}$$

Ввиду четности $K(u)$ все $K^{(2j-1)}(0) = 0$ ($j = 1, 2, \ldots$), а все $K_\pm^{(2j)}(0)$ выражаются через $K^{(2j)}(0)$ и $K_\pm^{(2j-1)}(0)$, например

$$K_\pm''(0) = \frac{1}{K_\pm(0)}\left[\frac{1}{2}K''(0) + K_\pm'^2(0)\right] \tag{4.8}$$

Аппроксимация (4.1) при $n = 0$ использовалась ранее [1, 2]. При решении поставленных НДКЗ 1 и НДКЗ 2 необходима более точная аппроксимация, так как уже полученные общие формулы решений (3.23) содержат производные от функций $K(u)$ и $K_{\pm}(u)$ при $u = 0$. Для $n = 2$ ($m = 1$) условия (4.3), (4.4) принимают вид

$$K(0) = K_0(0), \quad K'_{+}(0) = K_{+}^{0'}(0), \quad K''(0) = K''_0(0), \tag{4.9}$$

из которых получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных d_0, d_1, d_2

$$\begin{aligned} d_0 + bd_1 + b^2 d_2 &= b_1 \\ d_0 + 2bd_1 + 3b^2 d_2 &= b_2 \\ d_0 + 2b\varepsilon_1 d_1 + 3b^2 \varepsilon_2 d_2 &= b_3 \end{aligned} \tag{4.10}$$

в которой

$$b_1 = b^{-1}\ln(2(1-\beta^2)\eta_0^2), \quad b_2 = -(2\beta - \eta_0 + 2\eta_0\beta c_0)(b\eta_0\sqrt{\beta})^{-1}$$

$$b_3 = 4\beta\sqrt{\beta}(4\eta_0^2 - 4\eta_0^2\beta - 1)(db)^{-1}, \quad \varepsilon_1 = (\beta + 4\sqrt{\beta} + 1)d^{-1}, \quad \varepsilon_2 = (\beta + 6\sqrt{\beta} + 1)d^{-1}$$

$$d = (1 + \sqrt{\beta})^2, \quad b = (1 - \sqrt{\beta})^2, \quad c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{K'(u)}{uK(u)}du$$

При выводе соотношений (4.10) использовалась производная от $K_{\pm}^0(0)$ при $n = 2$, вычисляемая по формуле

$$K_{+}^{0'}(0) = \pm i\frac{2\beta - \eta_0 + \eta_0 b\sqrt{\beta}(d_0 + 2bd_1 + 3b^2 d_2)}{2\eta_0\beta}K_{\pm}(0) \tag{4.11}$$

Расчеты показали, что оптимальным вариантом аппроксимации является вариант при $n = 1$ и при выполнении первого и третьего условий в (4.9). В этом случае для определения d_0 и d_1 необходимо в системе линейных алгебраических уравнений (4.10) положить $d_2 = 0$ и оставить первое и третье уравнения, откуда определяются d_0 и d_1

$$d_0 = (2b_1\varepsilon_2 - b_3)\Delta_0^{-1}, \quad d_1 = (b_3 - b_1)\Delta_0^{-1}, \quad \Delta_0 = 2\varepsilon_2 - 1 \tag{4.12}$$

Ниже приведены величины d_0 и d_1, рассчитанные по формулам (4.12) для различных значений коэффициента Пуассона ν

ν	0.10	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
d_0	8.1762	7.4446	6.9315	6.3164	5.5968	4.7638	3.7701
d_1	49.5091	25.7310	16.8167	9.6998	4.2849	0.5234	–1.5457

При $\nu \in [0, 0.48]$ погрешность аппроксимации по $|K(u)|$ не превышает 5%, а при $\nu \in [0.48, 0.49]$ не превышает 6%. Увеличение погрешности при значениях ν, близких к 0.5, связано с тем, что при $\nu = 0.5$ ($\beta = 0$) и $K'_{\pm}(0)$ и $K''(0)$ не существуют, что видно из соотношений (2.2) и (4.11).

В специальных случаях аппроксимацию вида (4.1) можно строить, определяя постоянные d_k из других условий и по другим характерным точкам, например, по точкам ветвления, по полюсам Релея и т.п.

5. Приближенное решение ИУ (3.2). При получении решения ИУ (3.2) по формулам (3.23) воспользуемся аппроксимацией $K(u)$ вида (4.1) при $n = 1$, коэффициенты которой d_0 и d_1 определены формулами (4.12) для любых значений коэффициента Пуассона ν. Подставив $K_+^0(u)$ из (4.2) в (3.23) вместо $K_+(u)$, после вычисления квадратур получим $\varphi_\pm^L(x, p)$ решение ИУ (3.2) для НДКЗ 1

$$\Delta^{-1}\varphi_\pm^L(x, p) = \sum_{k=1}^{5} c_{1k}(p)\varphi_{1k}(x, p) + \sum_{k=6}^{7} c_{1k}(p)\varphi_{1k}(\pm\Lambda x \pm 1, p) \tag{5.1}$$

$$\varphi_{11}(x, p) = k_{\pi 0}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi}\exp(-\xi x)d\xi$$

$$\varphi_{12}(x, p) = k_{\pi 0}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi}\exp(-\xi x)d\xi$$

$$\varphi_{13}(x, p) = -\frac{2}{\pi^2}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi}\exp\left(-\frac{\xi}{\Lambda}\right)d\xi\int_\beta^\infty \frac{m(\eta)}{(\eta+\xi)}\exp(-\eta x)d\eta$$

$$\varphi_{14}(x, p) = -\frac{2}{\pi}\int_\beta^\infty \frac{l(\xi)}{\xi^2}\exp(-\xi|x|)d\xi$$

$$\varphi_{15}(x, p) = 1, \quad \varphi_{16}(x, p) = x, \quad \varphi_{17}(x, p) = |x|H(\pm x)$$

$$c_{11}(p) = (\varepsilon^L(p) - \eta_1\Lambda(1 + \Lambda\gamma'_- + 2\Lambda\gamma_p^0))\Lambda^{-1}, \quad c_{1k} = \eta_1\Lambda, \quad k = 2, 3, 4$$

$$c_{15}(p) = (\varepsilon^L(p) - \eta_1\Lambda)(\Lambda K(0))^{-1}, \quad c_{16}(p) = K^{-1}(0)\eta_1\Lambda$$

$$c_{17}(p) = -c_{14}(p)(\Lambda K(0))^{-1}$$

$$\gamma_p^0 = \frac{1}{\pi}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi}\exp\left(-\frac{\xi}{\Lambda}\right)d\xi, \quad k_{\pi 0} = (\pi K_-(0))^{-1}$$

$$m(\xi) = \begin{cases} m_1(\xi), \quad 1 \le \xi < \infty, \quad m_1(\xi) = \psi_1(\xi)\exp\left[\frac{1}{2}(d_0\omega(\xi) - d_1\omega^2(\xi))\right] \\ m_2(\xi), \quad \beta \le \xi \le 1, \quad m_2(\xi) = \psi_1(\xi)\exp\left(-\frac{1}{2}\psi_2(\xi)\right)\cos\psi_3(\xi) \end{cases}$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{\eta_0 - \xi}{\xi\sqrt{\xi - \beta}}, \quad \psi_2(\xi) = (1 + \beta - 2\xi)d_0 + ((\xi - \beta)^2 - 6(\xi - \beta)(1 - \xi) + (1 - \xi)^2)d_1,$$

$$\psi_3(\xi) = \sqrt{\xi - \beta}\sqrt{1 - \xi}(2(1 + \beta - 2\xi)d_1 + d_0), \quad \omega(\xi) = (\sqrt{\xi - \beta} - \sqrt{\xi - 1})^2$$

$$\gamma'_+ = iK'_+(0)/K_+(0)$$

Функция $l(u)$ дана второй формулой (3.7).

Совершенно аналогично при том же виде аппроксимации получается из выражения (3.23) решение ИУ (3.2) для случая НДКЗ 2

$$\Delta^{-1}\varphi^L_{\pm}(x, p) = \sum_{k=1}^{6} c_{2k}(p)\varphi_{2k}(x, p) \tag{5.2}$$

$$\varphi_{21}(x, p) = \varphi_{11}(x, p), \quad \varphi_{22}(x, p) = \varphi_{12}(x, p), \quad \varphi_{23}(x, p) = k_{\pi 0}\int_{\beta}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi}\exp(-\xi x)d\xi$$

$$\varphi_{24}(x, p) = 1, \quad \varphi_{25}(x, p) = x, \quad \varphi_{26}(x, p) = x^2$$

$$c_{21}(p) = -(\varepsilon^L(p) - \eta_2\Lambda(1 + 2\Lambda\gamma'_- + 2(2\gamma'^2_- + \gamma''_-)))\Lambda^{-1}$$

$$c_{22}(p) = 2\eta_2\Lambda(1 + 2\Lambda\gamma'_-), \quad c_{23}(p) = 2\eta_2\Lambda^2$$

$$c_{24}(p) = -K^{-1}(0)(c_{21}(p) + \gamma'_+c_{22}(p) + (\gamma'^2_+ + \gamma''_+/2)c_{23}(p)$$

$$c_{25}(p) = -K^{-1}(0)(c_{22}(p) - c_{23}(p))\gamma'_+, \quad c_{26}(p) = -\frac{1}{2}K^{-1}(0)c_{23}(p)$$

$$\gamma''_+ = K''_+(0)/K_+(0)$$

Величины γ'_+, $k_{\pi 0}$, $m(\xi)$, $\varphi^L_{1k}(x, p)$ даны формулами (5.1), γ'_-, γ''_- – формулами (3.18), (3.19).

Отметим, что решения ИУ (3.2) получены в классе интегрируемых функций, допускающих особенности трансформанты Лапласа контактных напряжений на крае зоны контакта в точках $x = \pm 1$, т.е. $\varphi^L_{\pm}(x, p) = \omega(x, p)(1 \pm x)^{-1/2}$ где $\omega(x, p) \in C_{[-1, 1]}$. Эту особенность в соотношениях (5.1), (5.2) доставляет функция $\varphi^L_{11}(x, p)$ после вычисления квадратуры. Кроме того, $\varphi^L_{\pm}(x, p)$ в (5.1) имеет логарифмическую особенность при $x \to 0$, которую доставляет ей функция $\varphi^L_{14}(x, p)$.

6. Решение поставленных НДКЗ. Асимптотическое решение поставленных в разд. 1 НДКЗ о внедрении клиновидного и параболического штампов в упругую полуплоскость получается после применения обратного преобразования Лапласа к полученным асимптотическим решениям ИУ (1.5), записанным в форме суперпозиции (3.1) решений ИУ (3.2), (3.3) в которой $\varphi^L_{\pm}(1 \pm x/\Lambda, p)$, $\varphi^L_{\infty}(x/\Lambda, p)$ даются формулами (5.1) для НДКЗ 1 и формулами (5.2) для НДКЗ 2. В результате решение поставленных НДКЗ 1 и НДКЗ 2 определяется формулой

$$\varphi(x, t) = \varphi_+\left(\frac{a(1+x)}{c_2}, t\right) + \varphi_-\left(\frac{a(1-x)}{c_2}, t\right) - \varphi_{\infty}\left(\frac{ax}{c_2}, t\right) \tag{6.1}$$

в которой $\varphi_\pm(x, t)$, $\varphi_\infty(x, t)$ для НДКЗ 1 даются формулами

$$\Lambda^{-1}\varphi_\pm(u, t) = \sum_{k=1}^{2} H(t-\beta u)u^{-3/2+k}\Phi_{1k}(u, t) + H(t-\beta u - t_1)u^{1/2}\Phi_{13}(u, t) +$$

$$+ H(t - |\beta u - t_1|)\Phi_{14}(|u - t_2|, t) + \sum_{k=5}^{6} H(t)\Phi_{1k}(u, t) + H(t)\Phi_{17}(|u - t_2|, t) \qquad (6.2)$$

$$\Delta^{-1}\varphi_\infty(u, t) = t_2K^{-1}(0)(\dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(0)) - \theta_1c_2H(t-\beta u)\Phi_{14}(u, t) - \theta_1c_2K^{-1}(0)u\delta(t) \qquad (6.3)$$

$$\Phi_{1k}(u, t) = k_{\pi 0}\int_{\beta u}^{t-\beta u} c_{1k}(\tau)q_k(t-\tau, u)m_*((t-\tau)u^{-1})d\tau, \quad k = 1, 2$$

$$\Phi_{13}(u, t) = -\frac{2}{\pi^2}\int_{\beta u + t_1}^{t}\int_{\beta}^{(\tau-\beta u)/t_2} c_{13}(\tau)q_1(\tau - \xi t_2, u)m_*((\tau - \xi t_2)u^{-1})m(\xi)\xi^{-1}d\xi d\tau$$

$$\Phi_{14}(u, t) = -\frac{2}{\pi}\int_{\beta}^{t/u}\xi^{-2}l(\xi)d\xi, \quad \Phi_{15}(u, t) = 1, \quad \Phi_{16}(u, t) = \Phi_{17}(u, t) = u$$

$$c_{11}(t) = -t_2(\dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(0)) + \eta_1t_2^{-1}\left(a\delta(t) + \gamma'_-H(t) + 2t_2^{-1}H(t-t_1)\int_{\beta}^{t/t_2}\xi^{-1}m(\xi)d\xi\right)$$

$$c_{1k}(t) = \eta_1t_2^{-1}H(t), \quad k = 2, 3, 4$$

$$c_{15}(t) = t_2K^{-1}(0)(\dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(0)) - \eta_1K^{-1}(0)\delta(t)$$

$$c_{16}(t) = \eta_1t_2^{-1}K^{-1}(0)\delta(t), \quad c_{17}(t) = -\eta_1K^{-1}(0)\delta(t)$$

где

$$m_*(\xi) = \frac{\xi\sqrt{\xi-\beta}}{\eta_0 - \xi}m(\xi), \quad q_k(t, u) = \frac{\eta_0u - t}{t^k\sqrt{t-\beta u}}, \quad t_k = \frac{a}{c_k}, \quad k = 1, 2$$

Функции $m(\xi)$ и $l(\xi)$ даны после формул (5.1) и (3.7) соответственно.

Для НДКЗ2 $\varphi_\pm(x, t)$, $\varphi_\infty(t)$ принимают такой вид:

$$\Delta^{-1}\varphi_\pm(u, t) = \sum_{k=1}^{3} H(t-u\beta)u^{-3/2+k}\Phi_{2k}(u, t) + \sum_{k=4}^{6} H(t)c_{2k}(t)\Phi_{2k}(u) \qquad (6.4)$$

$$\Delta^{-1}\varphi_\infty(u, t) = t_2K^{-1}(0)(\dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(0)) - \theta_2t_2a^2u^2\delta(t) - \theta_2K''(0)ac_2t) \qquad (6.5)$$

$$\Phi_{2k}(u_1, t) = k_{\pi 0}\int_{\beta u}^{t-\beta u} c_{2k}(\tau)q_k(t-\tau, u)m_*((t-\tau)u^{-1})d\tau, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\Phi_{24}(u) = 1, \quad \Phi_{25}(u) = u, \quad \Phi_{26}(u) = u^2$$

$$c_{21}(t) = -t_2(\dot{\varepsilon}(t)+\varepsilon(0)) + \theta_2\Lambda(a^2\delta(t) + 2a\gamma'_- + c_2t(2\gamma'^2_- + \gamma''_-))$$

$$c_{22}(t) = 2\theta_2a^2(1+2t_2\gamma'_-t), \quad c_{23}(t) = 2\theta_2c_2at$$

$$c_{24}(t) = -K^{-1}(0)(c_{21}(t) + \gamma'_+c_{22}(t) + (\gamma'^2_+ + \gamma''_+/2)c_{23}(t))$$

$$c_{25}(t) = -K^{-1}(0)(\dot{c}_{22}(t) - \dot{c}_{23}(t))\gamma'_+$$

$$c_{26}(t) = -K^{-1}(0)\ddot{c}_{23}(t)/2$$

В формулах (6.2)–(6.5), как и во всех предыдущих формулах, параметр a – полуширина зоны контакта штампа с упругой полуплоскостью – является функцией времени t, в том числе и под интегралами по τ. Формулы (6.2)–(6.5) для $\varphi_\pm(u, t)$, $\varphi_\infty(u, t)$ пока не могут быть решениями поставленных НДКЗ 1 и НДКЗ 2, так как содержат особенности корневого типа $(1 \pm x)^{-1/2}$ на краях зоны контакта, свидетельствующие о наличии на краях зоны контакта источников упругой энергии (или изломов поверхности упругой среды). Для получения гладких ограниченных на концах зоны контакта решений поставленных НДКЗ необходимо обратить в нуль коэффициенты, стоящие перед $(1 \pm x)^{-1/2}$ при $x \to \pm 1$, т.е. выполнить условия

$$\lim_{x\to\pm1}\Phi_{11}\left(\frac{a(1\pm x)}{c_2}, t\right) = 0 \quad \text{для} \quad \text{НДКЗ 1} \tag{6.6}$$

$$\lim_{x\to\pm1}\Phi_{21}\left(\frac{a(1\pm x)}{c_2}, t\right) = 0 \quad \text{для НДКЗ 2} \tag{6.7}$$

Выполнение этих условий приводит к следующим уравнениям для определения полуширины зоны контакта $a(t)$:

$$a(t) = \frac{\sqrt{t}}{\theta_1}\int_0^t\frac{\dot{\varepsilon}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau - 2c_2\gamma'_-t - \frac{4}{\pi}c_2K_-(0)H(t-t_1)\sqrt{t}\int_\beta^{t/t_2}m(\xi)\frac{\sqrt{t-\xi t_2}}{\xi}d\xi, \quad t_k = \frac{a}{c_k}, \tag{6.8}$$

$k = 1, 2$ для НДКЗ 1

$$a(t) = -2\gamma'_-c_2t + \left(\frac{\sqrt{t}}{\theta_2}\int_0^t\frac{\dot{\varepsilon}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau - \frac{8}{3}(c_2t)^2\left(\frac{1}{2}\gamma'^2_- + \gamma''_-\right)\right)^{1/2} \quad \text{для} \quad \text{НДКЗ 2} \tag{6.9}$$

Уравнения (6.8), (6.9) записаны в виде, удобном для реализации на ЭВМ. Постоянные γ'_-, γ''_-, $\chi_- = \gamma'^2_-/2 + \gamma''_-$ даны ниже

ν	0.10	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
γ'_-	0.3519	0.3632	0.3600	0.3434	0.2996	0.1894	–0.1502
γ''_-	–0.4169	–0.4344	–0.3814	–0.2244	0.1747	1.2602	5.3802
χ_-	–0.3550	–0.3684	–0.3166	–0.1654	0.2196	1.2781	5.3915

Можно видеть существенное влияние на параметры γ'_-, γ''_-, χ_- коэффициента Пуассона ν, а следовательно, и существенную зависимость от свойств упругой среды ширины зоны контакта. При малых t имеют место следующие оценки $a(t)$:

$$a(t) = 2(\theta_1^{-1}\upsilon_0 - c_2\gamma'_-)t + O(t) \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad \text{для} \quad \text{НДКЗ 1} \tag{6.10}$$

$$a(t) = \sqrt{2\theta_2^{-1}\upsilon_0}\sqrt{t} + O(t) \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad \text{для} \quad \text{НДКЗ 2} \tag{6.11}$$

Из выражения (6.10) следует, что для выполнения требования $a(t) \geq 0$ должно выполняться неравенство

$$\theta_1^{-1}\upsilon_0 - c_2\gamma'_- \geq 0, \quad \theta_1 = \operatorname{ctg}\alpha$$

откуда следуют ограничения, накладываемые на угол раствора клина 2α,

$$2\operatorname{arctg}(c_2\gamma'_-/\upsilon_0) \leq 2\alpha \leq \pi \tag{6.12}$$

Из выражения (6.10) следует также оценка для $\dot{a}(t)$ – скорости изменения полуширины зоны контакта

$$\dot{a}(t) = 2(\theta_1^{-1}\upsilon_0 - c_2\gamma'_-) + O(\sqrt{t}), \quad t \to 0 \tag{6.13}$$

Из (6.11) следует, что при малых t зона контакта существует для достаточно малых величин раствора параболы θ_2, а скорость ее распространения $\dot{a}(t)$ имеет оценку

$$\dot{a}(t) = \sqrt{\frac{\upsilon_0}{2\theta_2}}\frac{1}{\sqrt{t}} + O(1), \quad t \to 0 \tag{6.14}$$

откуда следует, что в начальный момент скорость распространения зоны контакта под параболическим штампом неограничена [5].

В заключение этого раздела следует заметить, что решение НДКЗ1 содержит логарифмическую особенность по координате x при $x \to 0$, порождаемую угловой точкой клина и содержащуюся в (6.2) и (6.3) в функции $\Phi_{14}\left(\frac{|x|a}{c_2}, t\right)$

Выделение особенности в $\Phi_{14}(u, t)$ приводит ее к виду

$$\Phi_{14}\left(\frac{|x|a}{c_2}, t\right) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left|\frac{c_1 t + \sqrt{(c_1 t)^2}}{|x|a}\right| H\left(t - \frac{|x|a}{c_1}\right) + \Phi_{14}^*\left(\frac{|x|a}{c_2}, t\right)\right]$$

$$\Phi_{14}^*(u, t) = \left(\int_\beta^{t/u} \frac{d\xi}{(\xi^2 - \beta^2)^{1/2}} + \int_\beta^{t/u} g(\xi)d\xi\right) H(t - \beta u)$$

$$g(u) = \begin{cases} g_1(u) & 1 \leq u < \infty, \quad g_1(u) = u^{-2}(l_1(u) - 4u^2\sigma_{10}\sigma_{20}l_0^{-1}(u))\sigma_{20} + 1 \\ g_2(u) & \beta \leq u \leq 1, \quad g_2(u) = u^{-2}l_1(u)\sigma_{20} \end{cases}$$

Выражения для $l_k(u)$ ($k = 0.1$) содержатся в (3.7).

Решение для НДКЗ 2 (6.1), (6.4), (6.5) при условии (6.9) не содержит особенностей.

7. Движение штампов на упругой среде. Внедрение рассматриваемых штампов в упругую полуплоскость рассчитывается как движение абсолютно жестких тел и сводится к определению движения их центров масс, который располагается на оси симметрии штампов, совпадающей с осью y. В этом случае движение штампа можно рассматривать как движение материальной точки массы m. Дифференциальное уравнение движения штампа с начальными условиями имеет вид [1, 2]

$$m\ddot{\varepsilon}(t) = Q(t), \quad \dot{\varepsilon}(0) = \upsilon_0, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \tag{7.1}$$

где $Q(t)$ – сила упругого сопротивления среды внедрению штампа связана с силой контактного воздействия $P(t)$ формулой

$$Q(t) = \int_{-a}^{a}\sigma_{yy}(x, 0, t)dx = -\int_{-a}^{a}\varphi(x, t)dx = -P(t), \quad P(t) = \int_{-a}^{a}\varphi(x, t)dx \tag{7.2}$$

Здесь $\varphi(x, t)$ – контактные напряжения, определяемые формулой (6.1) для рассматриваемых НДКЗ.

Таким образом, при определении $Q(t)$ можно воспользоваться формулой (7.2). Укажем здесь более короткий путь определения $P(t)$. Для определения $P(t)$ найдем сначала $P^L(p)$

$$P^L(p) = \int_{-a}^{a}\varphi^L(x, p)dx \tag{7.3}$$

Для этого рассмотрим ИУ (1.5). Пусть известно его решение для правой части вида $f^L(x, p) = 1$. Обозначим его $\varphi_0^L(x, p)$. Умножим левую и правую части ИУ (1.5) на $a\varphi_0^L(x, p)dx$ и проинтегрируем полученное равенство по x от –1 до 1. Поменяв затем порядок интегрирования, учитывая четность $K(u)$ и свойства $\varphi_0^L(x, p)$, получим формулы

$$P^L(p) = a\lambda_0\int_{-1}^{1}\varphi_0^L(x, p)dx + a\lambda_1\int_{-1}^{1}\varphi_0^L(x, p)|x|dx \quad \text{для} \quad \text{НДКЗ 1} \tag{7.4}$$

$$P^L(p) = a\lambda_0\int_{-1}^{1}\varphi_0^L(x, p)dx + a\lambda_2\int_{-1}^{1}\varphi_0^L(x, p)x^2dx \quad \text{для} \quad \text{НДКЗ 2} \tag{7.5}$$

Выражения для λ_0, λ_1, λ_2 даны в (3.5), (3.6).

Вышеупомянутое решение $\varphi_0^L(x, p)$ ИУ (1.5) для случая $f^L(x, p) = 1$ находится элементарно [1, 2] в виде суперпозиции (3.1), в которой

$$\varphi_+^L(x, p) = \frac{1}{\pi\Lambda K_-(0)}\left[-\int_{\beta}^{\infty}m(u)e^{-ux}du + \frac{\pi}{K_+(0)}\right]$$
$$\varphi_\infty^L(x, p) = \frac{1}{\Lambda K(0)} \tag{7.6}$$

Функция $m(u)$ определена в формулах (5.1). Подставив $\varphi_0^L(x, p)$ в соотношения (7.4) и (7.5) и выполнив обратное преобразование Лапласа, получим

$$a^{-1}P^L(p) = (\lambda_0 + \lambda_1)P_1^L(p) - \lambda_1\Lambda P_{2+}^L(p) + 2\lambda_1\Lambda P_{20}^L(p) + (2\lambda_0 + \lambda_1)\Lambda^{-1}K^{-1}(0) \tag{7.7}$$
для НДКЗ 1

$$a^{-1}P^L(p) = (\lambda_0 + \lambda_1)P_1^L(p) - 2\lambda_1\Lambda P_2^L(p) + 2\lambda_1\Lambda^2 P_3^L(p) + \left(2\lambda_0 + \frac{2}{3}\lambda_1\right)\Lambda^{-1}K^{-1}(0) \tag{7.8}$$

для НДКЗ 2

Здесь

$$P_k^L(p) = -\frac{2}{\pi K_-(0)}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi^2}\left(1 - \exp\left(-\xi\frac{2}{\Lambda}\right)\right)d\xi, \quad k = 1, 2, 3$$

$$P_{2+}^L(p) = -\frac{2}{\pi K_-(0)}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi^2}\left(1 + \exp\left(-\xi\frac{2}{\Lambda}\right)\right)d\xi$$

$$P_{20}^L(p) = -\frac{2}{\pi K_-(0)}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi^2}\exp\left(-\frac{\xi}{\Lambda}\right)d\xi$$

Функция $m(u)$ дана в (5.1), а λ_0 и λ_1 даны в (3.6).

Взяв оригиналы от $P^L(p)$ в соотношениях (7.7), (7.8), получим

$$\begin{aligned}(a\Delta)^{-1}P(t) &= 2t_2K^{-1}(0)(\dot\varepsilon(0) + \varepsilon(0)) + \\ &+ P_{1\varepsilon}(t) - \theta_1 c_2(t_2P_1(t) - P_{2+}(t) + 2P_{20}(t) + t_2^2K^{-1}(0)\delta(t)) \quad \text{для НДКЗ 1}\end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}(a\Delta)^{-1}P(t) &= 2t_2K^{-1}(0)(\dot\varepsilon(t) + \varepsilon(0)) + \\ &+ P_{1\varepsilon}(t) - \theta_2 c_2\left(t_2^2P_1(t) - 2t_2P_2(t) + P_3(t) + \frac{2}{3}t_2^3K^{-1}(0)\delta(t)\right) \quad \text{для НДКЗ 2}\end{aligned} \tag{7.10}$$

Здесь

$$P_k(t) = -\frac{2}{\pi K_-(0)}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi^k}(t^{k-1}H(t) - (t - 2\xi t_2)^{k-1}H(t - 2\xi t_2))d\xi, \quad k = 1, 2, 3$$

$$P_{1\varepsilon}(t) = -\frac{2}{\pi K_-(0)}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi}(\varepsilon(t) - \varepsilon(t - 2\xi t_2)H(t - 2\xi t_2))d\xi,$$

$$P_{2+}(t) = -\frac{2}{\pi K_-(0)}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi}(tH(t) + (t - 2\xi t_2)H(t - 2\xi t_2))d\xi$$

$$P_{20}(t) = -\frac{2}{\pi K_-(0)}\int_\beta^\infty \frac{m(\xi)}{\xi}(t - \xi t_2)H(t - \xi t_2)d\xi$$

где $t_k = a/c_k$ ($k = 1, 2$), Δ из (1.6), а $\delta(t)$ и $H(t)$ – соответственно дельта-функция Дирака и функция Хевисайда.

Для определения законов движения штампов $\varepsilon(t)$ при решении НДКЗ 1 и НДКЗ 2 найденные формулы (7.9), (7.10) для функции $P(t)$ с учетом формул (7.2) подставляются в правую часть обыкновенного дифференциального уравнения (7.1). Полученные в результате этого для каждой НДКЗ интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерры относительно неизвестной функции $\varepsilon(t)$ содержат еще одну неизвестную $a(t)$, для определения которой используются полученные ранее дополнительные условия (6.8), (6.9) соответственно для НДКЗ 1 и НДКЗ 2.

При численном решении полученных интегро-дифференциальных уравнений (7.1), (7.2), (7.9), (7.10) на каждом шаге их интегрирования (определения $\varepsilon(t)$) соответствующее этому моменту времени значение другой неизвестной функции $a(t)$ определяется численно как корень алгебраического уравнения (6.8) или (6.9) соответственно для НДКЗ 1 и НДКЗ 2 с учетом выполнения естественного начального условия $a(0) = 0$. Такой алгоритм решения задачи достаточно просто реализуется в среде MathCad.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00428).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зеленцов В.Б.* Об одном асимптотическом методе решения нестационарных динамических контактных задач // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 317–326.
2. *Зеленцов В.Б.* Нестационарная контактная задача о внедрении жесткого штампа в упругую полуплоскость // Изв. РАН МТТ. 1999. № 3. С. 34–44.
3. *Костров Б.В.* Распространение трещин с переменной скоростью // ПММ. 1974. Т. 33. № 3. С. 551–560.
4. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
5. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 352 с.
6. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
7. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука. 1981, 688 с.
8. *Batman H., Erdelj A.* Tables on Integral Transforms. N.Y., etc. Mc Graw-Hill, 1954 = *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. 343 с.
9. *Александров В.М.* Асимптотические методы в механике контактных взаимодействий. В кн.: “Механика контактных взаимодействий”. М.: Физматлит., 2001. С. 10–19.
10. *Noble B.* Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L., etc.: Pergamon Press, 1958 = *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
11. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
12. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
13. *Gaier D.* Vorlesungen über Approximation in Komplexen. Basel, etc.: Birkhauser, 1980 = *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986. 216 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
11.II.2003