УДК 539.3

© 2004 г. И. И. Аргатов

МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ В КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ

Методом сращиваемых асимптотических разложений изучается контактная задача для системы большого числа малых штампов, размещенных вдоль заданной кривой на границе упругого полупространства. Рассматриваются случаи цилиндрических штампов (линейная задача) и шарообразных штампов (конструкционно нелинейная контактная задача). В линейном случае устанавливается свойство монотонности приведенной логарифмической емкости пятна контакта и строится ее асимптотика. Выводятся результирующие интегральные уравнения для осредненной плотности погонных давлений.

1. Постановка линейной контактной задачи. Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур длиной $2l$ на плоскости переменных (x_1, x_2). Введем в его окрестности систему локальных координат (s, n), где s – длина дуги, n – расстояние (с учетом знака) вдоль внутренней нормали. Пусть еще N – большое натуральное число и $\varepsilon = 1/N$ – малый параметр. Обозначим через ω_1 область на плоскости "растянутых" координат (ξ_1, ξ_2), содержащуюся в круге радиусом l, а через ω_ε область, получаемую из ω_1 сжатием в N раз. Вдоль контура Γ определим периодически изменяющееся узкое множество

$$\Gamma(\varepsilon) = \left\{(x_1, x_2): \left(s - j\frac{2l}{N}, n\right) \in \omega_e, j = 0, 1, \ldots, N-1\right\} \tag{1.1}$$

Иными словами, $\Gamma(\varepsilon)$ – объединение N взаимно непересекающихся областей ω_ε^j $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ малого (порядка $2\varepsilon l$) диаметра, имеющих в локальных координатах форму области ω_ε.

Контактная задача о давлении без трения штампа с плоским основанием $\Gamma(\varepsilon)$ на упругое (с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν) полупространство $x_3 \le 0$ при помощи представления Папковича – Нейбера сводится [1] к задаче

$$\Delta_x\varphi(\mathbf{x}) = 0, \quad x_3 < 0; \quad \partial_3\varphi(\mathbf{x}) = 0, \quad x_3 = 0 \quad (x_1, x_2) \notin \overline{\Gamma(\varepsilon)} \tag{1.2}$$

$$\varphi(x_1, x_2, 0) = -\delta_0 - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 \quad (x_1, x_2) \in \Gamma(\varepsilon) \tag{1.3}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = o(1), \quad |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \to \infty \tag{1.4}$$

Здесь δ_0 и β_1, β_2 – поступательное смещение и углы поворота штампа $\Gamma(\varepsilon)$ относительно горизонтальных осей координат, $\partial_3 = \partial/\partial x_3$.

Давление на полубесконечное упругое тело со стороны штампа вычисляется по формуле

$$p(x_1, x_2) = -E[2(1-\nu^2)]^{-1}\partial_3\varphi(x_1, x_2, 0) \quad (x_1, x_2) \in \Gamma(\varepsilon) \tag{1.5}$$

Была построена [2] асимптотика контактной задачи для системы штампов, плотно размещенных в пределах ограниченной площадки на поверхности упругого полупространства. В настоящей работе осреднение сингулярно возмущенной контактной задачи (1.2) – (1.4), отвечающей случаю цепочки штампов, размещенных вдоль заданной кривой, осуществляется методом, разработанным С. А. Назаровым [3]. Отличительная черта рассматриваемой задачи – необходимость применения метода сращиваемых асимптотических разложений (см. [4–6] и др.) вместо метода составных асимптотических разложений [7], использованного ранее [3] при выводе задачи для пограничного слоя.

2. Конструкция асимптотики линейной контактной задачи. На удалении от зоны контакта $\Gamma(\varepsilon)$ функция $\varphi(\mathbf{x})$ в главном представляется в виде потенциала простого слоя, плотность которого рассредоточена по контуру Γ,

$$\upsilon(\gamma;\, \mathbf{x}) \;=\; -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\gamma(t)dt}{\sqrt{(x_1-f_1(t))^2+(x_2-f_2(t))^2+x_3^2}} \tag{2.1}$$

Здесь dt – элемент длины дуги, уравнения $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$ задают естественную параметризацию контура Γ. (Для определенности считаем, что при обходе Γ в сторону возрастания координаты s область, охватываемая контуром Γ, остается слева.) Функция $\gamma(s)$ подлежит определению. Величина $E[2(1-\nu^2)]^{-1}\gamma(s) \equiv P(s)$ имеет смысл осредненного погонного контактного давления.

В плоскостях, нормальных к кривой Γ, введем полярные координаты (r, φ) так, что $n = r\cos\varphi$, $x_3 = r\sin\varphi$, $\varphi \in [-\pi, 0]$. В предположении, что функция γ непрерывно дифференцируема, при $r \to 0$ справедлива следующая формула (см., например, [8]):

$$\upsilon(\gamma;\, s, r, \varphi) \;=\; \frac{\gamma(s)}{\pi}\left(\ln\frac{r}{2l} - J^0(s)\right) - \frac{1}{\pi}(J\gamma)(s) + O(r\ln(k_m r)) \tag{2.2}$$

где k_m – максимальная кривизна контура Γ, а также введены обозначения

$$J^0(s) \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{s-l}^{s+l}(R_0(s,t)^{-1} - |s-t|^{-1})dt \tag{2.3}$$

$$(J\gamma)(s) \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{R_0(s,t)}dt$$
$$R_0(s,t) \;=\; [(f_1(s)-f_1(t))^2 + (f_2(s)-f_2(t))^2]^{1/2} \tag{2.4}$$

Функция двух переменных $R_0(s, t)$ задает расстояние между двумя точками на контуре Γ с координатами s и t, причем

$$R_0(s,t) \;=\; |s-t|(1 + O(k_m^2|s-t|^2)), \quad t \to s \tag{2.5}$$

В окрестности зоны контакта $\Gamma(\varepsilon)$ возникает явление пограничного слоя, т. е. для решения $\varphi(\mathbf{x})$ задачи (1.2) – (1.4) характерны резкие изменения в малой окрестности узкого множества $\Gamma(\varepsilon)$. Функция $w(s;\, \xi^j)$ типа пограничного слоя, описывающая такое поведение решения исходной задачи, зависит как от "медленной" переменной s, так и от растянутых координат

$$\xi^j \;=\; (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j), \quad \xi^j \;=\; \varepsilon^{-1}(s - s_\varepsilon^j, n, x_3); \quad s_\varepsilon^j \;=\; j2lN^{-1} \tag{2.6}$$

Следуя описанному ранее алгорифму [3], приходим к уравнению

$$\Delta_\xi w(s_\varepsilon^j;\, \xi) \;=\; 0, \quad \xi_3 < 0; \quad |\xi_1| < l \tag{2.7}$$

в полуслое толщины $2l$. Здесь и далее индекс j в символе ξ^j не пишется ввиду отсутствия различия в соотношениях, слагающих задачу для пограничного слоя, при различных значениях индекса j. При этом дискретная переменная $s_\varepsilon^j \in \{j2\varepsilon l, j = 0, 1, \dots$ $\dots, N-1\}$ заменяется непрерывным параметром $s \in [0, 2l)$.

Согласно соотношениям (1.2) и (1.3) функция $w(s;\ \xi)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$\frac{\partial w}{\partial \xi_3}(s;\ \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0,\ (\xi_1, \xi_2) \notin \overline{\omega}_1, \quad |\xi_1| < l \tag{2.8}$$

$$w(s;\ \xi_1, \xi_2, 0) = w_0(s), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \omega_1 \tag{2.9}$$

Здесь введено обозначение

$$w_0(s) = -\delta_0 - \beta_2 f_1(s) + \beta_1 f_2(s) \tag{2.10}$$

Кроме того, должны выполняться условия согласования

$$w(s;\ -l, \xi_2, \xi_3) = w(s;\ l, \xi_2, \xi_3), \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_1}(s;\ -l, \xi_2, \xi_3) = \frac{\partial w}{\partial \xi_1}(s;\ l, \xi_2, \xi_3), \quad \xi_3 < 0 \tag{2.11}$$

Наконец, условие сращивания внутреннего асимптотического представления $w(s;\ \xi)$ с внешним $\upsilon(\gamma;\ \mathbf{x})$, определяемым формулой (2.1), ввиду асимптотической формулы (2.2) приводит к постановке следующего асимптотического условия на бесконечности:

$$w(s;\ \xi) = \frac{\gamma(s)}{\pi}\left(\ln\frac{\varepsilon\rho}{2l} - J^0(s)\right) - \frac{1}{\pi}(J\gamma)(s) + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty \tag{2.12}$$

Здесь введено обозначение $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, причем $\rho = \varepsilon^{-1} r$, где r – расстояние до контура Г. Заметим также, что координата s входит в соотношения (2.9) и (2.12) как параметр.

По решению $w(s;\ \xi)$ задачи (2.8) – (2.12) контактное давление под подошвой штампа ω_ε^j в растянутых координатах вычисляется по формуле (см. формулы (1.5) и (2.6))

$$p(x_1, x_2) \approx -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial \xi_3^j}(s;\ \xi_1^j, \xi_2^j, 0) \quad (\xi_1^j, \xi_2^j) \in \omega_1 \tag{2.13}$$

3. Логарифмическая емкость пятен контакта. Была доказана [3] теорема существования и единственности решения $e(\xi)$ однородной задачи (2.7) – (2.11), растущего на бесконечности как $-\ln\rho$. Постоянная в асимптотической формуле

$$e(\xi) = -\ln\rho + \kappa_1 + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty \tag{3.1}$$

связана с так называемой [3] приведенной логарифмической емкостью $c_{\log}(\omega_1)$ множества $\{\xi\colon \xi_3 = 0, (\xi_1, \xi_2) \in \overline{\omega}_1\}$ по формуле

$$c_{\log}(\omega_1) = \exp(\kappa_1) \tag{3.2}$$

Согласно принципу максимума для гармонических функций (см., например, [9]) справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial e}{\partial \xi_3}(\xi_1, \xi_2, 0-) > 0, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \omega_1 \tag{3.3}$$

$$e(\xi_1, \xi_2, 0) < 0 \quad (\xi_1, \xi_2) \notin \bar{\omega}_1, \quad |\xi_1| \le l \tag{3.4}$$

Кроме того, применением формулы Грина устанавливаем равенство

$$\frac{1}{2\pi l}\iint\limits_{\omega_1} \frac{\partial e}{\partial \xi_3}(\xi_1, \xi_2, 0-)d\xi_1 d\xi_2 = 1 \tag{3.5}$$

Было показано [3], что существует единственное ограниченное решение задачи (2.7), (2.8), (2.11), удовлетворяющее неоднородному граничному условию

$$w(s; \xi_1, \xi_2, 0) = w_0(s; \xi_1, \xi_2) \quad (\xi_1, \xi_2) \in \omega_1$$

и допускающее асимптотическое разложение

$$w(s; \xi) = c^0(s) + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty \tag{3.6}$$

При этом величина $c^0(s)$ из формулы (3.6) по методу Мазьи – Пламеневского [10] выражается следующим образом:

$$c^0(s) = \frac{1}{2\pi l}\iint\limits_{\omega_1} w_0(s; \xi_1, \xi_2)\frac{\partial e}{\partial \xi_3}(\xi_1, \xi_2, 0-)d\xi_1 d\xi_2 \tag{3.7}$$

Рассмотрим лежащие в полосе $|\xi_1| < l$ две области ω_1' и ω_1'', одна из которых содержит другую, т. е. $\omega_1' \subset \omega_1''$, причем площадь множества $\omega_1''\backslash\overline{\omega_1'}$ положительна. Для соответствующих приведенных логарифмических емкостей выполняется неравенство

$$c_{\log}(\omega_1') < c_{\log}(\omega_1'') \tag{3.8}$$

Действительно, рассмотрим растущие на бесконечности как $-\ln\rho$ решения $e'(\xi)$ и $e''(\xi)$ однородных задач (2.7) – (2.11) с граничным условием Дирихле (2.9), заданным на площадках ω_1' и ω_1''. Разность $w(\xi) = e''(\xi) - e'(\xi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (2.7), условиям периодичности (16) и следующим соотношениям:

$$w(\xi_1, \xi_2, 0) = 0, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \omega_1'$$

$$w(\xi_1, \xi_2, 0) = -e'(\xi_1, \xi_2, 0), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \omega_1''\backslash\overline{\omega_1'}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi_3}(\xi_1, \xi_2, 0) = 0, \quad (\xi_1, \xi_2) \notin \overline{\omega_1''}, \quad |\xi_1| < l$$

$$w(\xi) = \kappa_1'' - \kappa_1' + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty$$

Согласно формуле (3.7) будем иметь

$$\kappa_1'' - \kappa_1' = -\frac{1}{2\pi l}\iint\limits_{\omega_1''/\overline{\omega_1'}} e'(\xi_1, \xi_2, 0)\frac{\partial e''}{\partial \xi_3}(\xi_1, \xi_2, 0-)d\xi_1 d\xi_2 \tag{3.9}$$

Принимая во внимание неравенство (3.3) для нормальной производной функции $e''(\xi)$ и неравенство (3.4) для граничных значений функции $e'(\xi)$, из равенства (3.9) выводим неравенство $\kappa_1'' - \kappa_1' > 0$, откуда непосредственно следует требуемое неравенство (3.8).

Заметим, что поскольку по построению область ω_1 содержится в квадрате $|\xi_1| < l$, $|\xi_2| < l$, справедливы оценки

$$\kappa_1 < \ln(l/2), \quad c_{\log}(\omega_1) < l/2$$

вытекающие из рассмотрения плоской задачи.

Площадка ω_1 представляет собой пятно контакта в растянутых координатах (2.6). Поэтому в качестве логарифмической емкости реального пятна контакта ω_ε, получаемого сжатием области ω_1 в $1/\varepsilon$ раз, следует положить $c_{\log}(\omega_\varepsilon) = \varepsilon c_{\log}(\omega_1)$.

4. Интегральное уравнение для осредненной плотности погонных давлений. Решение задачи для пограничного слоя (2.7) – (2.12) представим в виде

$$w(s;\xi) = -\delta_0 - \beta_2 f_1(s) + \beta_1 f_2(s) - \pi^{-1}\gamma(s)e(\xi) \tag{4.1}$$

Гармоническая функция (2.8) в точности удовлетворяет граничным условиям (2.8), (2.9) и условиям периодичности (2.11). При этом согласно формуле (3.1) получаем

$$w(s;\xi) = w_0(s) - \pi^{-1}\gamma(s)[-\ln\rho + \kappa_1] + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty \tag{4.2}$$

Приравнивая теперь в разложениях (4.2) и (2.12) члены $O(1)$, приходим к уравнению

$$\frac{\gamma(s)}{\pi}\left(\ln\frac{\varepsilon}{2l} - J^0(s)\right) - \frac{1}{\pi}(J\gamma)(s) = w_0(s) - \frac{\gamma(s)}{\pi}\kappa_1$$

откуда, принимая во внимание обозначения (2.10) и (3.2), выводим

$$\gamma(s)\left(\ln\frac{2l}{\varepsilon c_{\log}(\omega_1)} + J^0(s)\right) + (J\gamma)(s) = -\pi w_0(s) \tag{4.3}$$

Свойства оператора J, определяемого формулой (2.4), изучены ранее [3, 11]. В частности, установлено ([3], лемма 3), что оператор $J^0\mathbf{1} + J$ имеет дискретный спектр, сгущающийся к $-\infty$, причем для его собственных чисел верна асимптотика $\lambda_k = -\ln k + O(1)$ при $k \to \infty$. Поэтому уравнение (4.3) разрешимо не при всех правых частях, если значение параметра ε таково, что $\ln[\varepsilon c_{\log}(\omega_1)/(2l)] + \lambda_k = 0$. Тем самым, для бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_k\}$ искомую плотность γ непосредственно из уравнения (4.3), вообще говоря, определить не удается.

Для преодоления указанного препятствия были предложены [12, 11, 3] разнообразные конструкции асимптотического решения результирующего уравнения (4.3), достаточные для построения асимптотики решения исходной задачи (1.2) – (1.4). Была предложена [13] модифицированная процедура сращивания, приводящая к корректно разрешимому результирующему интегральному уравнению относительно плотности $\gamma(s)$.

Следуя описанному ранее подходу [13], в соотношениях (4.1), (4.2) осуществим обратную к (2.6) замену координат и срастим внешнее (2.1) и внутреннее (4.1) асимптотические представления функции $\varphi(\mathbf{x})$. Главные члены асимптотик функций $\upsilon(\gamma; s, r, \varphi)$ (при $r \to 0$) и $w(s; \varepsilon^{-1}(s - s^j), \varepsilon^{-1}n, \varepsilon^{-1}x_3)$ (при $\varepsilon^{-1}r \to \infty$) совпадают. В области сращивания, где $r/l = O(\sqrt{\varepsilon})$ при $\varepsilon \to 0$, асимптотическое соотношение

$$w(s;\varepsilon^{-1}(s - s^j), \varepsilon^{-1}n, \varepsilon^{-1}x_3) - \upsilon(\gamma; s, r, \varphi) = o(1) \tag{4.4}$$

в соответствии с асимптотической формулой (4.2) преобразуется к виду

$$w_0(s) + \frac{\gamma(s)}{\pi}\ln\frac{r}{\varepsilon c_{\log}(\omega_1)} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\gamma(t)dt}{R_r(s, t)} = o(1), \quad \frac{r}{l} \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.5}$$

где

$$R_r(s, t)^2 = R_0(s, t)^2 + r^2 - 2r\cos\varphi\{f_2'(s)[f_1(s) - f_1(t)] - f_1'(s)[f_2(s) - f_2(t)]\}$$

Очевидно, что подстановка разложения (2.2) в (4.5) вновь приводит к уравнению (4.3). Иначе говоря, левая часть равенства (4.5) в зоне сращивания окажется малой, если приравнять ее нулю под подошвой штампа на глубине $\sqrt{\varepsilon}\, l$, т. е. при $\varphi = 0$ и $r = \sqrt{\varepsilon}\, l$. Таким путем приходим к уравнению

$$\gamma(s)\ln\frac{k}{\sqrt{\varepsilon}c_{\log}(\omega_1)} + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\frac{\gamma(t)dt}{\sqrt{R_0(s, t)^2 + \varepsilon l^2}} = -\pi w_0(s) \tag{4.6}$$

Вспоминая обозначения $\varepsilon = 1/N$ и $P(s) = E[2(1 - \nu^2)]^{-1}\gamma(s)$, уравнение (4.6) переписываем в окончательном виде

$$2P(s)\ln\frac{\sqrt{N}l}{c_{\log}(\omega_1)} + \int\limits_{\Gamma}\frac{P(t)dt}{\sqrt{R_0(s, t)^2 + (l^2/N)}} = -\frac{\pi E}{1 - \nu^2}w_0(s) \tag{4.7}$$

Следуя, например, схеме, примененной ранее [13], нетрудно доказать теорему существования и единственности решения интегрального уравнения (4.7) при любых достаточно больших значениях параметра N.

5. Асимптотика приведенной логарифмической емкости. В разд. 3 было показано, что приведенная логарифмическая емкость $c_{\log}(\omega_1)$ является монотонным функционалом области ω_1. Найдем теперь асимптотику величины $c_{\log}(\omega_1)$ при стремлении к нулю диаметра области ω_1.

Обозначим через μ малый положительный параметр и введем множество

$$\omega_\mu = \{(\xi_1, \xi_2)\colon \mu^{-1}(\xi_1, \xi_2) \in \omega_1\}$$

Построим асимптотику при $\mu \to 0$ решения $e_\mu(\xi)$ задачи, составляемой уравнением (2.7), граничными условиями

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial \xi_3}(\xi) = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad (\xi_1, \xi_2) \notin \overline{\omega_\mu}, \quad |\xi_1| < l$$

$$e_\mu(\xi_1, \xi_2, 0) = 0 \quad (\xi_1, \xi_2) \in \omega_\mu$$

условиями периодичности (2.11) и асимптотическим условием (3.1).

Воспользуемся методом сращиваемых разложений и введем растянутые координаты

$$\zeta = \mu^{-1}\xi \tag{5.1}$$

(При переходе к координатам (5.1) из уравнения границы области ω_μ устраняется параметр μ.)

Обозначим через $Y(\zeta)$ и $\mathbf{c}_1$ емкостной потенциал и гармоническую емкость множества $\{\zeta\colon \zeta_3 = 0, (\zeta_1, \zeta_2) \in \overline{\omega_1}\}$ (см., например, [14])

$$\Delta_\zeta Y(\zeta) = 0, \quad \zeta_3 < 0; \quad Y(\zeta_1, \zeta_2, 0) = 1 \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in \omega_1$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \zeta_3}(\zeta) = 0, \quad \zeta_3 = 0 \ (\zeta_1, \zeta_2) \notin \overline{\omega_1}$$

Имеем

$$Y(\zeta) = \mathbf{c}_1 |\zeta|^{-1} + O(|\zeta|^{-2}), \quad |\zeta| \to \infty \tag{5.2}$$

При этом справедливо интегральное представление

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\omega_1} \frac{\partial Y}{\partial \zeta_3}(\zeta_1, \zeta_2, 0-) d\zeta_1 d\zeta_2 \tag{5.3}$$

Поскольку согласно формуле (3.5) для функции $e_\mu(\xi)$ должно выполняться равенство

$$1 = \frac{\mu}{2\pi l} \iint\limits_{\omega_1} \frac{\partial e_\mu}{\partial \zeta_3}(\mu^{-1}\zeta_1, \mu^{-1}\zeta_2, 0-) d\zeta_1 d\zeta_2$$

в качестве внутреннего асимптотического представления функции $e_\mu(\xi)$, справедливого в окрестности площадки ω_μ, назначим следующую функцию:

$$\mathcal{W}(\zeta) = \frac{l}{\mu \mathbf{c}_1}(Y(\zeta) - 1) \tag{5.4}$$

Ввиду формулы (5.2) при $|\zeta| \to \infty$ справедливо разложение

$$\mathcal{W}(\zeta) = \frac{l}{\mu \mathbf{c}_1}\left(-1 + \frac{\mathbf{c}_1}{|\zeta|} + O(|\zeta|^{-2})\right) \tag{5.5}$$

В качестве внешнего асимптотического представления, призванного приближать искомую функцию $e_\mu(\xi)$ на удалении от начала координат, назначим сумму

$$\mathcal{V}(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n_\mu}^{n_\mu} f(k;\xi) + A_\mu; \quad f(k;\xi) = \frac{2l}{\sqrt{(\xi_1 - 2kl)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} \tag{5.6}$$

где n_μ – зависящее от параметра μ большое натуральное число, A_μ – постоянная. Заметим, что функция (5.6) оставляет невязку во втором условии сопряжения (2.11), тем меньшую, чем больше число n_μ.

Для того чтобы срастить внешнее асимптотическое представление (5.6) с внутренним (5.4), найдем асимптотику функции $\mathcal{V}(\xi)$ при $|\xi| \to 0$. Для функции (5.6) имеет место разложение

$$\mathcal{V}(\xi) = \frac{l}{|\xi|} + S(n_\mu) + A_\mu + O(|\xi|^2); \quad S(n_\mu) = \sum_{k=1}^{n_\mu} \frac{l}{k}$$

Переходя здесь к растянутым координатам (5.1), получаем

$$\mathcal{V}(\mu\zeta) = \frac{l}{\mu|\zeta|} + S(n_\mu) + A_\mu + O(\mu^2|\zeta|^2) \tag{5.7}$$

Теперь два разложения (5.7) и (5.5) ставим в соответствие одной и той же функции $e_\mu(\xi)$ в зоне сращивания, где величина $|\zeta|/l$ оказывается порядка $\mu^{-1/2}$ при $\mu \to 0$. Так, выписанные справа в разложениях (5.7) и (5.5) члены совпадут полностью, если положить

$$A_\mu = -\frac{l}{\mu \mathbf{c}_1} - S(n_\mu) \tag{5.8}$$

Подставив выражение (5.8) в формулу (5.6), будем иметь (штрих означает, что $j \neq 0$):

$$\mathcal{V}(\xi) = \frac{l}{|\xi|} - \frac{l}{\mu \mathbf{c}_1} + \frac{1}{2} \sum_{k=-n_\mu}^{n_\mu}{}' \left(f(k;\xi) - \frac{1}{|k|} \right) \tag{5.9}$$

Теперь в сумме (5.9) можно устремить параметр n_μ к бесконечности, так как получающийся ряд сходится (по интегральному признаку Коши).

Итак, в качестве конструкции внешнего асимптотического представления функции $e_\mu(\xi)$ окончательно назначим функцию (5.9) при $n_\mu = \infty$.

Займемся выяснением поведения этой функции при $\rho = \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} \to \infty$. При $|\xi_1| \le l$, очевидно, $f(|k|;\xi) > f(|k|+1;\xi)$. Значит верны оценки

$$\int_1^n f(t;\xi)dt + f(n;\xi) < \sum_{k=1}^n f(k;\xi) < \int_1^n f(t;\xi)dt + f(1;\xi)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^n f(k;\xi) = \int_1^n f(t;\xi)dt + R_n(\xi), \quad R_n(\xi) \in (f(n;\xi), f(1;\xi)) \tag{5.10}$$

С другой стороны, известно разложение (см., например, [15], гл. 8, § 3)

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{dt}{t} + \mathbf{C} + O(n^{-1}), \quad n \to \infty \tag{5.11}$$

где $\mathbf{C} = 0.577...$ – постоянная Эйлера.

Комбинируя соотношения (5.10) и (5.11) и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{k=1}^n \left(f(k,\xi) - \frac{1}{k} \right) = \int_1^\infty \left(f(t,\xi) - \frac{1}{t} \right) dt - \mathbf{C} + O(f(1,\xi))$$

Таким образом, для функции (5.9) при $n_\mu = \infty$ находим следующее асимптотическое разложение:

$$\mathcal{V}(\xi) = -\ln\frac{\rho}{4l} - \frac{l}{\mu \mathbf{c}_1} - \mathbf{C} + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty \tag{5.12}$$

откуда для постоянной κ_μ в разложении (3.1) функции $e_\mu(\xi)$ вытекает асимптотическая формула

$$\kappa_\mu = \ln(4l) - \frac{l}{\mu \mathbf{c}_1} - \mathbf{C} + o(1), \quad \mu \to 0 \tag{5.13}$$

Тем самым, приходим к итоговому результату

$$c_{\log}(\omega_\mu) = 4l\exp\left(-\frac{l}{\mu \mathbf{c}_1} - \mathbf{C}\right)(1 + o(1)), \quad \mu \to 0 \tag{5.14}$$

Можно показать, что остатки в асимптотических формулах (5.13) и (5.14), оцененные величиной $o(1)$, оказываются $O(\mu^2)$.

6. Постановка конструкционно нелинейной контактной задачи. Представим себе, что вдоль контура Γ расположено N соединенных жесткой обоймой шарообразных штампов радиусом R, определяемых уравнениями

$$x_3 = \Phi_j(x_1, x_2), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{6.1}$$

$$\Phi_j(x_1, x_2) = (2R)^{-1}[(x_1 - f_1(s_\varepsilon^j))^2 + (x_2 - f_2(s_\varepsilon^j))^2] \tag{6.2}$$

Естественно допустить, что радиус R сравним с расстоянием между соседними штампами, равным величине порядка $2l/N$ при больших значениях N. Кроме того, будем считать, что каждый из штампов получает смещение, малое в сравнении с радиусом R. Смещения штампов определяются перемещением обоймы, для характеристики последнего используем следующие параметры: δ_0 – величина поступательного смещения обоймы в направлении, противоположном направлению вертикальной оси Ox_3, β_1 и β_2 – углы поворота обоймы относительно горизонтальных осей координат Ox_1 и Ox_2. Обозначая, как и прежде, через $\varepsilon = 1/N$ малый параметр, конкретизируем предыдущие предположения следующим образом:

$$\delta_0 = \varepsilon^2\delta_0^*, \quad \beta_i = \varepsilon^2\beta_i^*, \quad i = 1, 2; \quad R = \varepsilon R^* \tag{6.3}$$

где величины δ_0^*, β_1^*, β_2^* и R^* сравнимы с величиной l при $\varepsilon \to 0$.

Контактная задача о давлении без трения рассматриваемой системы штампов на упругое полупространство $x_3 \le 0$ при помощи представления Папковича – Нейбера сводится к задаче для потенциала $\varphi(\mathbf{x})$, составляемой соотношениями (1.2), (1.4) и граничным условием одностороннего контакта (см. [16], а также [17, 18] и др.)

$$\varphi(\mathbf{x}) \le -\delta_0 - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 + \Phi_j(x_1, x_2), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \le 0$$

$$[\varphi(\mathbf{x}) + \delta_0 + \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2 - \Phi_j(x_1, x_2)]\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = 0 \tag{6.4}$$

$$x_3 = 0 \quad (x_1, x_2) \in \omega_\varepsilon^j \quad (j = 0, 1, \ldots, N-1)$$

Здесь ω_ε^j – область, наверняка охватывающая пятно контакта под штампом с номером j. Поскольку контакт заведомо отсутствует там, где поверхность штампа располагается выше уровня невозмущенной границы упругого основания, можно положить

$$\omega_\varepsilon^j = \{(x_1, x_2)\colon \delta_0 + \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2 - \Phi_j(x_1, x_2) > 0\}$$

При этом ввиду соотношений (6.3) диаметр области ω_ε^j оказывается $O(\varepsilon^{3/2}l)$ и малым в сравнении с расстоянием между штампами.

В целях построения главных членов асимптотики решения рассматриваемой задачи в явном виде (для упрощения некоторых рассуждений при выводе задачи одностороннего контакта для пограничного слоя) выражение (6.2) заменим асимптотически эквивалентным ему выражением

$$\Phi_j(x_1, x_2) = (2R)^{-1}[(s - s_\varepsilon^j)^2 + n^2] \tag{6.5}$$

где s и n – локальные координаты в окрестности кривой Γ, s_ε^j – координата вершины штампа, определяемая третьей формулой (2.6).

7. Конструкция асимптотики конструкционно нелинейной контактной задачи. Внешнее асимптотическое представление (2.1) остается без изменений, поскольку на удалении от штампов своеобразие их формы подошвы нивелируется. Как и раньше, плотность $\gamma(s)$ предполагается зависящей от параметра ε, и это обстоятельство не обозначается в ее записи.

Задачу для пограничного слоя составляют уравнение Лапласа (2.7), условие периодичности (2.11) и следующее граничное условие одностороннего контакта, получающееся из условия (6.4) при учете выражения (6.5):

$$\begin{gathered} w(s;\xi) \le \varepsilon^2 w_0^*(s) + \varepsilon\Phi^*(\xi_1, \xi_2), \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_3}(s;\xi) \le 0 \\ [w(s;\xi) - \varepsilon^2 w_0^*(s) - \varepsilon\Phi^*(\xi_1, \xi_2)]\frac{\partial w}{\partial \xi_3}(s;\xi) = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad |\xi_1| < l \end{gathered} \tag{7.1}$$

Здесь введены растянутые координаты (2.6) и обозначения

$$w_0^*(s) = -\delta_0^* - \beta_2^* f_1(s) + \beta_1^* f_2(s), \quad \Phi^*(\xi_1, \xi_2) = (2R^*)^{-1}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \tag{7.2}$$

Перечисленные соотношения замыкаются асимптотическим условием (2.12), получаемым в результате сращивания на основе соотношения (2.2).

Решение задачи для пограничного слоя, граничное условие (7.1) которой содержит малый параметр ε, построим методом сращиваемых разложений, применяя описанный ранее подход [19] и приемы, использованные в разд. 5. Так, в качестве внешнего асимптотического представления для функции $w(s;\xi)$ по аналогии с (5.9) назначим функцию

$$\mathcal{V}(s;\xi) = -\frac{\gamma(s)}{\pi}\left\{\frac{l}{|\xi|} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(f(k;\xi) - \frac{1}{|k|}\right)\right\} + A(\varepsilon; s) \tag{7.3}$$

Постоянная $A(\varepsilon; s)$, как и множитель перед фигурными скобками в (7.3), определяется при подчинении функции (7.3) асимптотическому условию (2.12). Именно ввиду разложения (5.12), справедливого для функции (5.9), для функции (7.3) получаем

$$\mathcal{V}(s;\xi) = -\frac{\gamma(s)}{\pi}\left\{-\ln\frac{\rho}{4l} - \mathbf{C}\right\} + A(\varepsilon; s) + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty \tag{7.4}$$

Добиваясь совпадения членов, выписанных в асимптотических формулах (7.4) и (2.12), находим

$$A(\varepsilon; s) = -\frac{\gamma(s)}{\pi}\left(\ln\frac{1}{2\varepsilon} + \mathbf{C} + J^0(s)\right) - \frac{1}{\pi}(J\gamma)(s) \tag{7.5}$$

С другой стороны, при $|\xi| \to 0$ имеем

$$\mathcal{V}(s;\xi) = -\frac{\gamma(s)}{\pi}\frac{l}{|\xi|} + A(\varepsilon; s) + O(|\xi|^2) \tag{7.6}$$

Для построения внутреннего асимптотического представления $\mathcal{W}(s;\ \zeta)$ функции $w(s;\ \xi)$ вводим растянутые координаты

$$\zeta = \varepsilon^{-1/2}\xi \tag{7.7}$$

Величина показателя у параметра ε в соотношении (7.7) выбирается так, чтобы уравнять порядки слагаемых в правой части первого неравенства в граничном условии (7.1).

Функция $\mathcal{W}(s;\ \zeta)$ должна быть гармонической в полупространстве $\zeta_3 < 0$ и на его границе удовлетворять следующим соотношениям, вытекающим из соотношений (7.1) при учете равенства (7.7):

$$\begin{gathered}\mathcal{W}(s;\ \zeta) \le \varepsilon^2[w_0^*(s) + \Phi^*(\xi_1, \xi_2)], \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \zeta_3}(s;\ \zeta) \le 0 \\ (\mathcal{W}(s;\ \zeta) - \varepsilon^2[w_0^*(s) + \Phi^*(\xi_1, \xi_2)])\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \zeta_3}(s;\ \zeta) = 0, \quad \zeta_3 = 0\end{gathered} \tag{7.8}$$

Сращивание внутреннего асимптотического представления $\mathcal{W}(s;\ \zeta)$ с внешним асимптотическим представлением $\mathcal{V}(s;\ \zeta)$ функции $w(s;\ \zeta)$ согласно разложению (7.6) диктует следующее поведение функции $\mathcal{W}(s;\ \zeta)$ на бесконечности:

$$\mathcal{W}(s;\ \zeta) = -\varepsilon^{-1/2}\frac{\gamma(s)}{\pi}\frac{l}{|\zeta|} + A(\varepsilon;\ s) + O(|\zeta|^{-2}), \quad |\zeta| \to \infty \tag{7.9}$$

Рассмотрим потенциал простого слоя

$$\mathcal{W}^*(s;\ \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{\omega_1^*(s)}\frac{\tilde{q}^*(s;\ \eta_1, \eta_2)d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{(\zeta_1-\eta_1)^2 + (\zeta_2-\eta_2)^2 + \zeta_3^2}} \tag{7.10}$$

с герцевской плотностью (уравнения теории Герца см., например, в [20])

$$\tilde{q}^*(s;\ \eta_1, \eta_2) = \frac{3\tilde{Q}^*(s)}{2\pi a_*^2}\sqrt{a_*^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2} \tag{7.11}$$

распределенной по круговой площадке $\omega_1^*(s)$ с центром в начале координат и радиусом a_*. Функция (7.10) удовлетворяет следующему граничному условию:

$$\mathcal{W}^*(s;\ \zeta_1, \zeta_2, 0) = -\frac{3\tilde{Q}^*(s)}{16a_*^2}(2a_*^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2) \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in \omega_1^*(s) \tag{7.12}$$

Вне площадки $\omega_1^*(s)$ нормальная производная потенциала (7.10) равна нулю. С другой стороны, справедливо разложение

$$\mathcal{W}^*(s;\ \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\tilde{Q}^*(s)}{|\zeta|} + O(|\zeta|^{-3}), \quad |\zeta| \to \infty \tag{7.13}$$

Итак, внутреннее асимптотическое представление функции $\mathcal{W}(s;\ \zeta)$ представим в форме

$$\mathcal{W}(s;\ \zeta) = \varepsilon^2\mathcal{W}^*(s;\ \zeta) + A(\varepsilon;\ s) \tag{7.14}$$

Удовлетворяя условию сращивания (7.9) при учете разложения (7.13), получаем

$$\gamma(s) = \varepsilon^{5/2}(2l)^{-1}\tilde{Q}^*(s) \tag{7.15}$$

Далее, на площадке контакта $\omega_1^*(s)$ функция (7.14) ввиду соотношения (7.12) равна

$$\mathcal{W}(s;\zeta_1,\zeta_2,0) = A(\varepsilon;s) - \varepsilon^2\frac{3\tilde{Q}^*(s)}{8a_*} + \varepsilon^2\frac{3\tilde{Q}^*(s)}{16a_*^3}(\zeta_1^2+\zeta_2^2) \tag{7.16}$$

С другой стороны, согласно граничному условию (7.8) и обозначениям (7.2) на площадке контакта должно выполняться равенство

$$\mathcal{W}(s;\zeta_1,\zeta_2,0) = \varepsilon^2[w_0^*(s) + (2R^*)^{-1}(\zeta_1^2+\zeta_2^2)] \tag{7.17}$$

Приравнивая выражения (7.16) и (7.17), получаем связи

$$A(\varepsilon;s) - \varepsilon^2\frac{3\tilde{Q}^*(s)}{8a_*} = \varepsilon^2 w_0^*(s), \quad \frac{1}{2R^*} = \frac{3\tilde{Q}^*(s)}{16a_*^3} \tag{7.18}$$

Из второго уравнения (7.18) определяем радиус площадки контакта

$$a_* = \left(\frac{3}{8}\tilde{Q}^*(s)R^*\right)^{1/3} \tag{7.19}$$

Подставляя выражение (7.19) в первое уравнение (7.18), находим

$$A(\varepsilon;s) - \varepsilon^2\left(\frac{9\tilde{Q}^*(s)^2}{64R^*}\right)^{1/3} = \varepsilon^2 w_0^*(s) \tag{7.20}$$

Таким образом, весь произвол, допущенный в асимптотических конструкциях, устранен. Для определения функций $\gamma(s)$, $\tilde{Q}^*(s)$ и $A(\varepsilon;s)$ получена система уравнений (7.5), (7.15) и (7.20).

8. Уравнение для осредненной плотности погонных давлений в конструкционно нелинейной задаче. Выразим из уравнения (7.15) величину $\tilde{Q}^*(s)$ через $\gamma(s)$ и подставим в уравнения (7.5) и (7.20), после чего из полученной системы исключим величину $A(\varepsilon;s)$. В результате приходим к уравнению

$$m\gamma(s)^{2/3} + \gamma(s)(|\ln\varepsilon| - \ln 2 + \mathbf{C} + J^0(s)) + (J\gamma)(s) = -\pi w^0(s) \tag{8.1}$$

где введено обозначение

$$m = \pi(9l^2)^{1/3}(16R)^{-1/3}$$

Функция $w^0(s)$ определена формулой (2.10).

Вопрос о разрешимости уравнения (8.1) и построении асимптотики его решения при $\varepsilon \to 0$ (ввиду свойств оператора J) остается открытым.

Для получения корректно разрешимого результирующего уравнения относительно функции $\gamma(s)$ применим модифицированную процедуру сращивания [13]. Обратимся к асимптотическому разложению (7.4) функции $\mathcal{V}(\varepsilon;\xi)$ на бесконечности. В формуле (7.4) сделаем обратную к (2.6) замену координат, возвращаясь от растянутых координат к реальным, и с помощью полученного соотношения условие сращивания (4.4) представим в виде

$$\frac{\gamma(s)}{\pi}\left(\ln\frac{r}{\varepsilon 4l} + \mathbf{C}\right) + A(\varepsilon;s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\gamma(t)dt}{R_r(s,t)} = o(1), \quad \frac{r}{l} = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \to 0 \tag{8.2}$$

Приравнивая теперь нулю левую часть соотношения (8.2) под подошвой штампа при $r = \sqrt{\varepsilon}\, l$, получаем уравнение, связывающее величины $A(\varepsilon;\ s)$ и $\gamma(s)$, заменяющее уравнение (7.5). Таким образом, вместо (8.1) приходим к следующему уравнению относительно плотности $\gamma(s) = 2(1-\nu^2)E^{-1}P(s)$ погонных давлений:

$$m\gamma(s)^{2/3} + \gamma(s)\left(\ln\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} + \mathbf{C}\right) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\gamma(t)dt}{\sqrt{R_0(s,t)^2 + \varepsilon l^2}} = -\pi w_0(s) \qquad (8.3)$$

Заметим, что разрешимость уравнения (8.3) может быть установлена путем приведения его к интегральному уравнению типа Гаммерштейна (см., например, [21]).

9. Заключение. Функция $P(s)$ определяет контактное давление, рассчитанное на единицу длины дуги Г. Контактное давление, развивающееся под подошвой штампа ω_ε^j, определяется в растянутых координатах по решению задачи для пограничного слоя по формулам (2.13) и (7.11).

Основной результат работы – уравнения (4.7) и (8.3) относительно осредненной плотности контактных давлений, неравенство (3.8) и асимптотическая формула (5.14) для приведенной логарифмической емкости пятна контакта. Принципиальный момент построения асимптотики конструкционно нелинейной контактной задачи для пограничного слоя – назначение конструкции внешнего асимптотического представления в виде (7.4). Применением методики, разработанной ранее [19, 22], уравнение (7.18) может быть уточнено, что, естественно, приведет к изменению результирующего уравнения (8.3).

Заметим, что уравнения (4.7) и (8.3) остаются пригодными и в случае, когда Г – простая (без самопересечений) гладкая разомкнутая дуга. Однако в окрестности концов дуги Г возникает трехмерный пограничный слой. Для задач рассматриваемого класса этот вопрос не исследован.

Результаты работы докладывались на III Всероссийской конференции по теории упругости (Ростов-на-Дону, октябрь 2003 г.).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства промышленности, науки и технологий РФ (МД-182.2003.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
2. *Argatov I.I., Mel'nyk T.A.* Homogenization of a contact problem for a system of densely situated punches // Eur. J. Mech. A. Solids, 2001. V. 20, № 1. P. 91–98.
3. *Назаров С.А.* Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением // Тр. Моск. мат. о-ва. 1990. Т. 53. С. 98–129.
4. *Van Dyke M.D.* Perturbation methods in fluid mechanics. N. Y.; L.: Acad. Press, 1964 = *Ван-Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 73–82.
7. *Mazja V.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 432 S.
8. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Давление на упругое полупространство узкого кольцевого штампа // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 810–825.

9. *Bers L., John F., Schechter M.* Partial Differential Equations. N. Y.: Intersci., 1964 = *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.
10. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических задач в областях с коническими точками // Math. Nahr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
11. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 2. С. 187–217.
12. *Федорюк М. В.* Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Тр. семинара С. Л. Соболева. 1980. Т. 1. С. 113–131.
13. *Аргатов И.И.* Давление узкого прямоугольного штампа на упругое основание // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 2. С. 58–67.
14. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 515 с.
15. *Olver F.W.J.* Asymptotics and Special Functions. N. Y.: Acad. Press, 1974 = *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
16. *Signorini A.* Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearzzata // Rend. Mat. e Appl. 1959. V. 18. № 1–2. P. 95—139.
17. *Duvaut G., Lions J.-L.* Les Inèquations en Mècanique et en Physique. Paris: Dunod, 1972 = *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
18. *Кравчук А. С.* Метод вариационных неравенств в контактных задачах // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 93–115.
19. *Аргатов И. И.* Вдавливание штампа в форме эллиптического параболоида в плоскую границу упругого тела // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 671–679.
20. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
21. *Tricomi F. G.* Integral Equations. N. Y.: Intersci., 1957 = *Трикоми Ф.Дж.* Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
22. *Аргатов И. И.* Давление штампа в форме эллиптического параболоида на упругий слой конечной толщины // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 511–524.

Санкт-Петербург
argatov@home.ru

Поступила в редакцию
17.II.2003